Géométrie différentielle 2018-2019

Chapitre 2: Nappes et sous variétés

Pierre Mounoud

Le poly se trouve ici
`www.math.u-bordeaux.fr/~pmounoud/`

Rappels

On note $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ l'esp. vect. des applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$.

Définition 1

Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^p$. On dit que f est différentiable en $x \in U$ s'il existe une application linéaire dans $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ (la différentielle de f en x) notée $D_x f$ telle que

$$\|f(x+h) - f(x) - D_x f(h)\| = o(\|h\|).$$

Rappels

On note $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ l'esp. vect. des applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$.

Définition 1

Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^p$. On dit que f est différentiable en $x \in U$ s'il existe une application linéaire dans $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ (la différentielle de f en x) notée $D_x f$ telle que

$$\|f(x+h) - f(x) - D_x f(h)\| = o(\|h\|).$$

L'application $h \mapsto f(x) + D_x f(h)$ est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x.

Rappels

On note $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ l'esp. vect. des applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$.

Définition 1

Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^p$. On dit que f est différentiable en $x \in U$ s'il existe une application linéaire dans $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ (la différentielle de f en x) notée $D_x f$ telle que

$$\|f(x+h) - f(x) - D_x f(h)\| = o(\|h\|).$$

L'application $h \mapsto f(x) + D_x f(h)$ est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x.
La matrice de $D_x f$ dans la base canonique est la *jacobienne* de f au point x, elle est notée $J_x f$ et

$$J_x f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} .$$

Lorsque f est différentiable en tous points de U, on définit sa différentielle $Df : \mathbf{R}^n \supset U \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ par $x \mapsto D_x f$.

Lorsque f est différentiable en tous points de U, on définit sa différentielle $Df : \mathbf{R}^n \supset U \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ par $x \mapsto D_x f$.

On dit que f est de classe C^1 si Df est continue.

Lorsque f est différentiable en tous points de U, on définit sa différentielle $Df : \mathbf{R}^n \supset U \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ par $x \mapsto D_x f$.

On dit que f est de classe C^1 si Df est continue.
Comme toute application à valeurs dans un espace produit, Df est continue si et seulement si ses composantes sont continues

Lorsque f est différentiable en tous points de U, on définit sa différentielle $Df : \mathbf{R}^n \supset U \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ par $x \mapsto D_x f$.

On dit que f est de classe C^1 si Df est continue.
Comme toute application à valeurs dans un espace produit, Df est continue si et seulement si ses composantes sont continues c.-à-d. si pour tout (i, j) l'application $x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ est continue.

On définit par récurrence les dérivées d'ordre supérieur. La différentielle d'ordre k, notée $D^k f$ est donc l'application qui à x associe $D^k_x f$. Les composantes de $D^k_x f$ sont les dérivées partielles d'ordre k, c.-à-d. les $\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x)$.

On définit par récurrence les dérivées d'ordre supérieur. La différentielle d'ordre k, notée $D^k f$ est donc l'application qui à x associe $D^k_x f$. Les composantes de $D^k_x f$ sont les dérivées partielles d'ordre k, c.-à-d. les $\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}}(x)$.

Proposition 2

Soit $f : \mathbf{R}^n \supset U \to \mathbf{R}^p$ et $k \in \mathbf{N}^*$.
Si f est k fois différentiable en x alors pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}}(x) = \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_{\sigma(1)}} \ldots \partial x_{j_{\sigma(k)}}}(x).$$

L'application f est de classe C^k si et seulement si pour tout $(j_1, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$ l'application $x \mapsto \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}}(x)$ est définie et continue sur U.

On dit que f est lisse (de classe C^∞) si elle est de classe C^k pour tout k.

On dit que f est lisse (de classe C^∞) si elle est de classe C^k pour tout k.

Exemple 3

L'application $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ définie par $M \mapsto M^{-1}$ est lisse (indication : utiliser que $\det(M)M^{-1}$ est égal à la transposée de la matrice des cofacteurs).

On dit que f est lisse (de classe C^∞) si elle est de classe C^k pour tout k.

Exemple 3

L'application $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ définie par $M \mapsto M^{-1}$ est lisse (indication : utiliser que $\det(M)M^{-1}$ est égal à la transposée de la matrice des cofacteurs).

Définition 4

L'application $f : \mathbf{R}^n \supset U \to V \subset \mathbf{R}^p$ est un difféomorphisme si f est une bijection, f et f^{-1} sont partout différentiables.

On dit que f est lisse (de classe C^∞) si elle est de classe C^k pour tout k.

Exemple 3

L'application $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ définie par $M \mapsto M^{-1}$ est lisse (indication : utiliser que $\det(M)M^{-1}$ est égal à la transposée de la matrice des cofacteurs).

Définition 4

L'application $f : \mathbf{R}^n \supset U \to V \subset \mathbf{R}^p$ est un difféomorphisme si f est une bijection, f et f^{-1} sont partout différentiables.

En géométrie différentielle on voit deux objets permutés par un difféomorphismes comme étant « les mêmes. » On verra donc souvent un difféomorphisme comme un changement de coordonnées.

Exercice 1

Soit $f : U \to V$ un difféomorphisme. Montrer que si f est lisse alors f^{-1} l'est aussi. [on commencera par montrer que $D_{f(x)} f^{-1} = (Df(x))^{-1}$.]

Exercice 1

Soit $f : U \to V$ un difféomorphisme. Montrer que si f est lisse alors f^{-1} l'est aussi. [on commencera par montrer que $D_{f(x)}f^{-1} = (Df(x))^{-1}$.]

Tout ce chapitre s'appuie sur le résultat suivant :

Exercice 1

Soit $f : U \to V$ un difféomorphisme. Montrer que si f est lisse alors f^{-1} l'est aussi. [on commencera par montrer que $D_{f(x)}f^{-1} = (Df(x))^{-1}$.]

Tout ce chapitre s'appuie sur le résultat suivant :

Théorème 5 (Inversion locale)

Soient $f : \mathbf{R}^n \supset U \to \mathbf{R}^n$ une application de classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, et $x \in U$. Si $D_x f$ est inversible (c.-à-d. si $\det(J_x f) \neq 0$) alors il existe un ouvert V contenant x tel que la restriction de f à V est un difféomorphisme sur son image (qui est un ouvert).

Nappes

Définition 6

Une application différentiable $f : \mathbf{R}^d \supset U \to \mathbf{R}^n$ dont la différentielle en tout point est injective est appelée une *immersion*.

Nappes

Définition 6

Une application différentiable $f : \mathbf{R}^d \supset U \to \mathbf{R}^n$ dont la différentielle en tout point est injective est appelée une *immersion*.

La condition « f est une immersion » s'écrit aussi

$$\forall x \in U, \ \ker(D_x f) = \{0\}$$

ou

Nappes

Définition 6

Une application différentiable $f : \mathbf{R}^d \supset U \to \mathbf{R}^n$ dont la différentielle en tout point est injective est appelée une *immersion*.

La condition « f est une immersion » s'écrit aussi

$$\begin{aligned} & \forall x \in U,\ \ker(D_x f) = \{0\} \\ \text{ou} \quad & \forall x \in U, \operatorname{rang}(D_x f) = d. \end{aligned}$$

Nappes

Définition 6

Une application différentiable $f : \mathbf{R}^d \supset U \to \mathbf{R}^n$ dont la différentielle en tout point est injective est appelée une *immersion*.

La condition « f est une immersion » s'écrit aussi

$$\begin{aligned} & \forall x \in U,\ \ker(D_x f) = \{0\} \\ \text{ou} \quad & \forall x \in U, \operatorname{rang}(D_x f) = d. \end{aligned}$$

Le théorème du rang nous dit que $d \leq n$.

Nappes

Définition 6

Une application différentiable $f : \mathbf{R}^d \supset U \to \mathbf{R}^n$ dont la différentielle en tout point est injective est appelée une *immersion*.

La condition « f est une immersion » s'écrit aussi

$$\begin{aligned} & \forall x \in U, \ \ker(D_x f) = \{0\} \\ \text{ou} \quad & \forall x \in U, \mathrm{rang}(D_x f) = d. \end{aligned}$$

Le théorème du rang nous dit que $d \leq n$.

Si $d = 1$ cette condition s'écrit $\forall x \in U, f'(x) \neq 0$.

On peut maintenant définir notre futur objet d'étude :

On peut maintenant définir notre futur objet d'étude :

Définition 7

1. On appelle *nappe paramétrée de* $\mathbf{R}^n$ *de dimension* d, tout couple (U, f) où

On peut maintenant définir notre futur objet d'étude :

Définition 7

1. On appelle *nappe paramétrée de* $\mathbf{R}^n$ *de dimension* d, tout couple (U, f) où U est un ouvert connexe de $\mathbf{R}^d$ et f est une immersion lisse de U dans $\mathbf{R}^n$.

On peut maintenant définir notre futur objet d'étude :

Définition 7

1. On appelle *nappe paramétrée de* $\mathbf{R}^n$ *de dimension* d, tout couple (U, f) où U est un ouvert connexe de $\mathbf{R}^d$ et f est une immersion lisse de U dans $\mathbf{R}^n$.
   Le sous-ensemble $f(U)$ est appelé le *support* de la nappe.

On peut maintenant définir notre futur objet d'étude :

Définition 7

1. On appelle *nappe paramétrée de* $\mathbf{R}^n$ *de dimension* d, tout couple (U, f) où U est un ouvert connexe de $\mathbf{R}^d$ et f est une immersion lisse de U dans $\mathbf{R}^n$.
   Le sous-ensemble $f(U)$ est appelé le *support* de la nappe.
2. On dit que deux nappes paramétrées (U, f) et (V, g) définissent la même nappe (géométrique) Σ (ou sont équivalents) s'il existe un difféomorphisme lisse ψ de U dans V tel que $f = g \circ \psi$.

On peut maintenant définir notre futur objet d'étude :

Définition 7

1. On appelle *nappe paramétrée de* $\mathbf{R}^n$ *de dimension* d, tout couple (U, f) où U est un ouvert connexe de $\mathbf{R}^d$ et f est une immersion lisse de U dans $\mathbf{R}^n$.
   Le sous-ensemble $f(U)$ est appelé le *support* de la nappe.
2. On dit que deux nappes paramétrées (U, f) et (V, g) définissent la même nappe (géométrique) Σ (ou sont équivalents) s'il existe un difféomorphisme lisse ψ de U dans V tel que $f = g \circ \psi$.

   On dit alors que (U, f) et (V, g) sont des systèmes de coordonnées sur (ou des paramétrages de) Σ et que ψ est un changement de coordonnées (ou de paramétrage).

On peut maintenant définir notre futur objet d'étude :

Définition 7

1. On appelle *nappe paramétrée de* $\mathbf{R}^n$ *de dimension* d, tout couple (U, f) où U est un ouvert connexe de $\mathbf{R}^d$ et f est une immersion lisse de U dans $\mathbf{R}^n$.
   Le sous-ensemble $f(U)$ est appelé le *support* de la nappe.
2. On dit que deux nappes paramétrées (U, f) et (V, g) définissent la même nappe (géométrique) Σ (ou sont équivalents) s'il existe un difféomorphisme lisse ψ de U dans V tel que $f = g \circ \psi$.

   On dit alors que (U, f) et (V, g) sont des systèmes de coordonnées sur (ou des paramétrages de) Σ et que ψ est un changement de coordonnées (ou de paramétrage).

On voit que les nappes de dimension 1 et les arcs réguliers sont les mêmes choses.

Exemples

Si $f_0 : \mathbf{R}^d \supset U \to \mathbf{R}^q$ est une application lisse définie sur $U \subset \mathbf{R}^d$, alors son graphe est une nappe géométrique de dimension d de $\mathbf{R}^{d+q}$.

Exemples

Si $f_0 : \mathbf{R}^d \supset U \to \mathbf{R}^q$ est une application lisse définie sur $U \subset \mathbf{R}^d$, alors son graphe est une nappe géométrique de dimension d de $\mathbf{R}^{d+q}$.

Le graphe de f_0 est l'image de l'application $f : U \to \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^q \simeq \mathbf{R}^{d+q}$ définie par $x \mapsto (x, f_0(x))$.

Exemples

Si $f_0 : \mathbf{R}^d \supset U \to \mathbf{R}^q$ est une application lisse définie sur $U \subset \mathbf{R}^d$, alors son graphe est une nappe géométrique de dimension d de $\mathbf{R}^{d+q}$.

Le graphe de f_0 est l'image de l'application $f : U \to \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^q \simeq \mathbf{R}^{d+q}$ définie par $x \mapsto (x, f_0(x))$.
Cette application est clairement lisse et comme pour tout $x \in U$ et tout $h \in \mathbf{R}^d$,

$$D_x f(h) = (h, D_x f_0(h)),$$

on voit que $D_x f$ est toujours injective.

On prend $U = \mathbf{D}_2$ le disque unité ouvert de $\mathbf{R}^2$ et f définie sur U par $f(x) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x)$.

On prend $U = \mathbf{D}_2$ le disque unité ouvert de $\mathbf{R}^2$ et f définie sur U par $f(x) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x)$. D'après ce qui précède $(\mathbf{D}_2, f)$ définit une nappe.

On prend $U = \mathbf{D}_2$ le disque unité ouvert de $\mathbf{R}^2$ et f définie sur U par $f(x) = (\sqrt{1-\|x\|^2}, x)$. D'après ce qui précède $(\mathbf{D}_2, f)$ définit une nappe. Son support est l'intersection de la sphère unité et du demi-espace $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 \mid y_1 > 0\}$.
Soit

$$g : \begin{array}{rcl} V =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v), \end{array}$$

et

$$\psi : \begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \mathbf{D}_2 \\ (u, v) & \longmapsto & (\cos v \sin u, \sin v) \end{array}.$$

On prend $U = \mathbf{D}_2$ le disque unité ouvert de $\mathbf{R}^2$ et f définie sur U par $f(x) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x)$. D'après ce qui précède $(\mathbf{D}_2, f)$ définit une nappe. Son support est l'intersection de la sphère unité et du demi-espace $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 \mid y_1 > 0\}$.
Soit

$$g : \begin{array}{rcl} V =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v), \end{array}$$

et

$$\psi : \begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \mathbf{D}_2 \\ (u, v) & \longmapsto & (\cos v \sin u, \sin v) \end{array}.$$

Pour voir que ψ est un difféomorphisme on exhibe sa réciproque $\psi^{-1}(x_1, x_2) = (\arcsin(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_2^2}}), \arcsin x_2)$.

On prend $U = \mathbf{D}_2$ le disque unité ouvert de $\mathbf{R}^2$ et f définie sur U par $f(x) = (\sqrt{1-\|x\|^2}, x)$. D'après ce qui précède $(\mathbf{D}_2, f)$ définit une nappe. Son support est l'intersection de la sphère unité et du demi-espace $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 \mid y_1 > 0\}$.
Soit

$$g: \begin{array}{rcl} V =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v), \end{array}$$

et

$$\psi: \begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \mathbf{D}_2 \\ (u, v) & \longmapsto & (\cos v \sin u, \sin v) \end{array}.$$

Pour voir que ψ est un difféomorphisme on exhibe sa réciproque $\psi^{-1}(x_1, x_2) = (\arcsin(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_2^2}}), \arcsin x_2)$. On vérifie que $f \circ \psi = g$ (ou $g \circ \psi^{-1} = f$).

On prend $U = \mathbf{D}_2$ le disque unité ouvert de $\mathbf{R}^2$ et f définie sur U par $f(x) = (\sqrt{1-\|x\|^2}, x)$. D'après ce qui précède $(\mathbf{D}_2, f)$ définit une nappe. Son support est l'intersection de la sphère unité et du demi-espace $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 \mid y_1 > 0\}$.
Soit

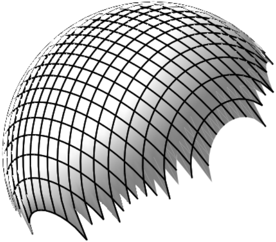
$$g : \begin{array}{ccc} V =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v), \end{array}$$

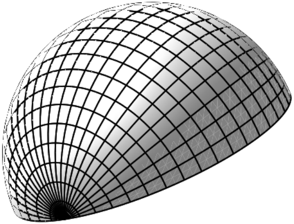
et

$$\psi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbf{D}_2 \\ (u, v) & \longmapsto & (\cos v \sin u, \sin v) \end{array}.$$

Pour voir que ψ est un difféomorphisme on exhibe sa réciproque $\psi^{-1}(x_1, x_2) = (\arcsin(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_2^2}}), \arcsin x_2)$. On vérifie que $f \circ \psi = g$ (ou $g \circ \psi^{-1} = f$).
Ce qui montre que (V, g) et (U, f) sont deux nappes paramétrées équivalentes.

Les paramétrages f et g définissent des « grilles de coordonnées » différentes sur un même hémisphère.





La raison pour laquelle on impose aux applications d'être des immersions est la suivante :

La raison pour laquelle on impose aux applications d'être des immersions est la suivante :

Proposition 8

Soient d et n deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^d$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application lisse, et $a \in U$.

La raison pour laquelle on impose aux applications d'être des immersions est la suivante :

Proposition 8

Soient d et n deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^d$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application lisse, et $a \in U$.
Si $D_a f$ est injective, alors

La raison pour laquelle on impose aux applications d'être des immersions est la suivante :

Proposition 8

Soient d et n deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^d$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application lisse, et $a \in U$.
Si D_af est injective, alors $d \leq n$ et il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a,

La raison pour laquelle on impose aux applications d'être des immersions est la suivante :

Proposition 8

Soient d et n deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^d$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application lisse, et $a \in U$.
Si $D_a f$ est injective, alors $d \leq n$ et il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a, un ouvert W de $\mathbf{R}^n$ contenant $f(V)$,

La raison pour laquelle on impose aux applications d'être des immersions est la suivante :

Proposition 8

Soient d et n deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^d$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application lisse, et $a \in U$.
Si $D_a f$ est injective, alors $d \leq n$ et il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a, un ouvert W de $\mathbf{R}^n$ contenant $f(V)$, un difféomorphisme lisse $\Phi : W \to \Phi(W)$

La raison pour laquelle on impose aux applications d'être des immersions est la suivante :

Proposition 8

Soient d et n deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^d$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application lisse, et $a \in U$.
Si $D_a f$ est injective, alors $d \leq n$ et il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a, un ouvert W de $\mathbf{R}^n$ contenant $f(V)$, un difféomorphisme lisse $\Phi : W \to \Phi(W)$ tels que

La raison pour laquelle on impose aux applications d'être des immersions est la suivante :

Proposition 8

Soient d et n deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^d$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application lisse, et $a \in U$.
Si $D_a f$ est injective, alors $d \leq n$ et il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a, un ouvert W de $\mathbf{R}^n$ contenant $f(V)$, un difféomorphisme lisse $\Phi : W \to \Phi(W)$ tels que pour tout $x \in V$

$$\Phi(f(x_1, \dots, x_d)) = (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0).$$

La raison pour laquelle on impose aux applications d'être des immersions est la suivante :

Proposition 8

Soient d et n deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^d$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application lisse, et $a \in U$.
Si $D_a f$ est injective, alors $d \leq n$ et il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a, un ouvert W de $\mathbf{R}^n$ contenant $f(V)$, un difféomorphisme lisse $\Phi : W \to \Phi(W)$ tels que pour tout $x \in V$

$$\Phi(f(x_1, \ldots, x_d)) = (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0).$$

Autrement dit si f est lisse et $D_a f$ est injective, il existe un changement local de coordonnées « à l'arrivée » qui rend f linéaire au voisinage de a.

La raison pour laquelle on impose aux applications d'être des immersions est la suivante :

Proposition 8

Soient d et n deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^d$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application lisse, et $a \in U$.
Si $D_a f$ est injective, alors $d \leq n$ et il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a, un ouvert W de $\mathbf{R}^n$ contenant $f(V)$, un difféomorphisme lisse $\Phi : W \to \Phi(W)$ tels que pour tout $x \in V$

$$\Phi(f(x_1, \ldots, x_d)) = (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0).$$

Autrement dit si f est lisse et $D_a f$ est injective, il existe un changement local de coordonnées « à l'arrivée » qui rend f linéaire au voisinage de a. Ainsi l'image d'un petit voisinage de a ressemble à un bout de p-plan.

La raison pour laquelle on impose aux applications d'être des immersions est la suivante :

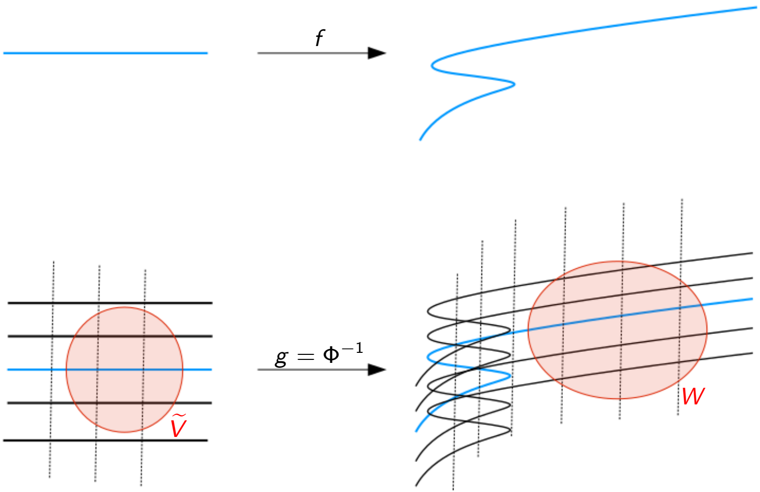
Proposition 8

Soient d et n deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^d$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application lisse, et $a \in U$.
Si $D_a f$ est injective, alors $d \leq n$ et il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a, un ouvert W de $\mathbf{R}^n$ contenant $f(V)$, un difféomorphisme lisse $\Phi : W \to \Phi(W)$ tels que pour tout $x \in V$

$$\Phi(f(x_1, \ldots, x_d)) = (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0).$$

Autrement dit si f est lisse et $D_a f$ est injective, il existe un changement local de coordonnées « à l'arrivée » qui rend f linéaire au voisinage de a. Ainsi l'image d'un petit voisinage de a ressemble à un bout de p-plan.
Plus précisément :
au voisinage de $f(a)$, il existe des coordonnées dans lesquelles l'image d'un petit voisinage de a se lit comme un bout de plan de dimension p.

La preuve en image



On a déjà vu que $d \leq n$.

La jacobienne de f en a possède d lignes linéairement indépendantes,

On a déjà vu que $d \leq n$.

La jacobienne de f en a possède d lignes linéairement indépendantes, quitte à permuter les coordonnées de l'espace d'arrivée $\mathbf{R}^n$ (ce qui revient à composer à gauche par un premier difféomorphisme), on peut supposer que ce sont les d premières.

On a déjà vu que $d \leq n$.

La jacobienne de f en a possède d lignes linéairement indépendantes, quitte à permuter les coordonnées de l'espace d'arrivée $\mathbf{R}^n$ (ce qui revient à composer à gauche par un premier difféomorphisme), on peut supposer que ce sont les d premières.
Autrement dit on peut supposer

$$J_a f = \begin{pmatrix} A \\ * \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq d}}$$

La matrice A est inversible (et carrée) !

On définit alors $g : U \times \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^n$ par $g(x, y) = f(x) + (0, y)$

On définit alors $g : U \times \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^n$ par $g(x, y) = f(x) + (0, y)$ ou

$g(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots y_{n-d}) = (f^1(x), \ldots f^d(x), y^1 + f^{d+1}(x), \ldots, y_{n-d} + f^n(x))$.

On définit alors $g : U \times \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^n$ par $g(x, y) = f(x) + (0, y)$ ou

$$g(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots y_{n-d}) = (f^1(x), \ldots f^d(x), y^1 + f^{d+1}(x), \ldots, y_{n-d} + f^n(x)).$$

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

On définit alors $g : U \times \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^n$ par $g(x,y) = f(x) + (0,y)$ ou

$g(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots y_{n-d}) = (f^1(x), \ldots f^d(x), y^1 + f^{d+1}(x), \ldots, y_{n-d} + f^n(x))$.

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.

On définit alors $g : U \times \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^n$ par $g(x,y) = f(x) + (0,y)$ ou

$g(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots y_{n-d}) = (f^1(x), \ldots f^d(x), y^1 + f^{d+1}(x), \ldots, y_{n-d} + f^n(x))$.

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.
On peut donc appliquer le *théorème d'inversion locale* :
Il existe donc un voisinage $\widetilde{V}$ de $\bar{a}$ tel que la restriction de g à $\widetilde{V}$ est un difféomorphisme lisse sur $W = g(\widetilde{V})$.

On définit alors $g : U \times \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^n$ par $g(x, y) = f(x) + (0, y)$ ou

$g(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots y_{n-d}) = (f^1(x), \ldots f^d(x), y^1 + f^{d+1}(x), \ldots, y_{n-d} + f^n(x))$.

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.
On peut donc appliquer le *théorème d'inversion locale* :
Il existe donc un voisinage $\widetilde{V}$ de $\bar{a}$ tel que la restriction de g à $\widetilde{V}$ est un difféomorphisme lisse sur $W = g(\widetilde{V})$.
On pose $\Phi = (g|_{\widetilde{V}})^{-1}$.

On définit alors $g : U \times \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^n$ par $g(x, y) = f(x) + (0, y)$ ou

$g(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots y_{n-d}) = (f^1(x), \dots f^d(x), y^1 + f^{d+1}(x), \dots, y_{n-d} + f^n(x))$.

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en $\bar{a} = (a_1, \dots, a_p, 0, \dots, 0)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.
On peut donc appliquer le *théorème d'inversion locale* :
Il existe donc un voisinage $\widetilde{V}$ de $\bar{a}$ tel que la restriction de g à $\widetilde{V}$ est un difféomorphisme lisse sur $W = g(\widetilde{V})$.
On pose $\Phi = (g|_{\widetilde{V}})^{-1}$. Soit V un ouvert de $\mathbf{R}^d$ tel que $V \times \{0\} \subset \widetilde{V}$.

On définit alors $g : U \times \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^n$ par $g(x,y) = f(x) + (0,y)$ ou

$g(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots y_{n-d}) = (f^1(x), \dots f^d(x), y^1 + f^{d+1}(x), \dots, y_{n-d} + f^n(x))$.

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en $\bar{a} = (a_1, \dots, a_p, 0, \dots, 0)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.
On peut donc appliquer le *théorème d'inversion locale* :
Il existe donc un voisinage $\widetilde{V}$ de $\bar{a}$ tel que la restriction de g à $\widetilde{V}$ est un difféomorphisme lisse sur $W = g(\widetilde{V})$.
On pose $\Phi = (g|_{\widetilde{V}})^{-1}$. Soit V un ouvert de $\mathbf{R}^d$ tel que $V \times \{0\} \subset \widetilde{V}$.
Pour tout $x \in V$, $f(x) = g(x, 0)$

On définit alors $g : U \times \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^n$ par $g(x, y) = f(x) + (0, y)$ ou

$g(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots y_{n-d}) = (f^1(x), \dots f^d(x), y^1 + f^{d+1}(x), \dots, y_{n-d} + f^n(x))$.

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en $\bar{a} = (a_1, \dots, a_p, 0, \dots, 0)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.
On peut donc appliquer le *théorème d'inversion locale* :
Il existe donc un voisinage $\widetilde{V}$ de $\bar{a}$ tel que la restriction de g à $\widetilde{V}$ est un difféomorphisme lisse sur $W = g(\widetilde{V})$.
On pose $\Phi = (g|_{\widetilde{V}})^{-1}$. Soit V un ouvert de $\mathbf{R}^d$ tel que $V \times \{0\} \subset \widetilde{V}$.
Pour tout $x \in V$, $f(x) = g(x, 0) \in W$

On définit alors $g : U \times \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^n$ par $g(x,y) = f(x) + (0,y)$ ou

$g(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots y_{n-d}) = (f^1(x), \ldots f^d(x), y^1 + f^{d+1}(x), \ldots, y_{n-d} + f^n(x))$.

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.
On peut donc appliquer le *théorème d'inversion locale* :
Il existe donc un voisinage $\widetilde{V}$ de $\bar{a}$ tel que la restriction de g à $\widetilde{V}$ est un difféomorphisme lisse sur $W = g(\widetilde{V})$.
On pose $\Phi = (g|_{\widetilde{V}})^{-1}$. Soit V un ouvert de $\mathbf{R}^d$ tel que $V \times \{0\} \subset \widetilde{V}$.
Pour tout $x \in V$, $f(x) = g(x,0) \in W$ et comme $(x,0) \in \widetilde{V}$ on a donc $\Phi(f(x)) =$

On définit alors $g : U \times \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^n$ par $g(x, y) = f(x) + (0, y)$ ou

$g(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots y_{n-d}) = (f^1(x), \ldots f^d(x), y^1+f^{d+1}(x), \ldots, y_{n-d}+f^n(x))$.

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.
On peut donc appliquer le *théorème d'inversion locale* :
Il existe donc un voisinage $\widetilde{V}$ de $\bar{a}$ tel que la restriction de g à $\widetilde{V}$ est un difféomorphisme lisse sur $W = g(\widetilde{V})$.
On pose $\Phi = (g|_{\widetilde{V}})^{-1}$. Soit V un ouvert de $\mathbf{R}^d$ tel que $V \times \{0\} \subset \widetilde{V}$.
Pour tout $x \in V$, $f(x) = g(x, 0) \in W$ et comme $(x, 0) \in \widetilde{V}$ on a donc $\Phi(f(x)) = (x, 0)$.

On définit alors $g : U \times \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^n$ par $g(x, y) = f(x) + (0, y)$ ou

$g(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots y_{n-d}) = (f^1(x), \ldots f^d(x), y^1 + f^{d+1}(x), \ldots, y_{n-d} + f^n(x))$.

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.
On peut donc appliquer le *théorème d'inversion locale* :
Il existe donc un voisinage $\widetilde{V}$ de $\bar{a}$ tel que la restriction de g à $\widetilde{V}$ est un difféomorphisme lisse sur $W = g(\widetilde{V})$.
On pose $\Phi = (g|_{\widetilde{V}})^{-1}$. Soit V un ouvert de $\mathbf{R}^d$ tel que $V \times \{0\} \subset \widetilde{V}$.
Pour tout $x \in V$, $f(x) = g(x, 0) \in W$ et comme $(x, 0) \in \widetilde{V}$ on a donc $\Phi(f(x)) = (x, 0)$.$\square$

Exemple

Si la nappe est un graphe i.e. si elle admet un paramétrage (U, f) avec $f(x) = (x, f_0(x))$, on peut la redresser globalement. En effet (en gardant les notations de la preuve), on a $g(x, y) = (x, y + f(x))$. On voit que g est un difféomorphisme de $U \times \mathbf{R}^{n-d}$ dans lui-même dont l'inverse est $\Phi(u, v) = (u, v - f(u))$.

Il existe une famille de nappes plus agréables que les autres :

Il existe une famille de nappes plus agréables que les autres :

Définition 9

Une nappe Σ est dite $\boxed{\text{plongée}}$ s'il existe sur Σ un paramétrage (U, f) tel que f est injective et $f^{-1} : f(U) \to U$ est continue [a]

Il existe une famille de nappes plus agréables que les autres :

Définition 9

Une nappe Σ est dite $\boxed{\text{plongée}}$ s'il existe sur Σ un paramétrage (U, f) tel que f est injective et $f^{-1} : f(U) \to U$ est continue[a] (autrement dit f est un homéomorphisme sur son image).

---

a. Il est sous-entendu ici que $f(U)$ est muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^n$.

Il existe une famille de nappes plus agréables que les autres :

Définition 9

Une nappe Σ est dite $\boxed{\text{plongée}}$ s'il existe sur Σ un paramétrage (U, f) tel que f est injective et $f^{-1} : f(U) \to U$ est continue [a] (autrement dit f est un homéomorphisme sur son image).

a. Il est sous-entendu ici que $f(U)$ est muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^n$.

Cette propriété ne dépend pas du paramétrage choisit.

Il existe une famille de nappes plus agréables que les autres :

Définition 9

Une nappe Σ est dite $\boxed{\text{plongée}}$ s'il existe sur Σ un paramétrage (U, f) tel que f est injective et $f^{-1} : f(U) \to U$ est continue [a] (autrement dit f est un homéomorphisme sur son image).

[a] Il est sous-entendu ici que $f(U)$ est muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^n$.

Cette propriété ne dépend pas du paramétrage choisit.

Exemple 10

- Les graphes sont tous plongés.

Il existe une famille de nappes plus agréables que les autres :

Définition 9

Une nappe Σ est dite $\boxed{\text{plongée}}$ s'il existe sur Σ un paramétrage (U, f) tel que f est injective et $f^{-1} : f(U) \to U$ est continue[a] (autrement dit f est un homéomorphisme sur son image).

---

a. Il est sous-entendu ici que $f(U)$ est muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^n$.

Cette propriété ne dépend pas du paramétrage choisit.

Exemple 10

- Les graphes sont tous plongés. En effet, si $f(x) = (x, f_0(x))$ alors f^{-1} peut être vu comme la restriction à $f(U)$ de l'application $(x, y) \mapsto x$. Elle est donc continue.

Il existe une famille de nappes plus agréables que les autres :

Définition 9

Une nappe Σ est dite $\boxed{\text{plongée}}$ s'il existe sur Σ un paramétrage (U, f) tel que f est injective et $f^{-1} : f(U) \to U$ est continue [a] (autrement dit f est un homéomorphisme sur son image).

---

a. Il est sous-entendu ici que $f(U)$ est muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^n$.

Cette propriété ne dépend pas du paramétrage choisit.

Exemple 10

- Les graphes sont tous plongés. En effet, si $f(x) = (x, f_0(x))$ alors f^{-1} peut être vu comme la restriction à $f(U)$ de l'application $(x, y) \mapsto x$. Elle est donc continue.
- La proposition 8 dit aussi que tout $x \in U$ possède un voisinage V tel que $(V, f|_V)$ est une nappe plongée.

Exemple 11

La condition f injective n'est pas suffisante.

Exemple 11

La condition f injective n'est pas suffisante.
Soit $(]-1,+\infty[, f)$ avec $f(t) = (\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3})$, le folium de Descartes.

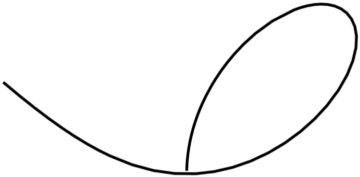


Figure – Le folium de Descartes

Exemple 11

La condition f injective n'est pas suffisante.
Soit $(]-1,+\infty[, f)$ avec $f(t) = (\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3})$, le folium de Descartes.
L'application f est une immersion injective mais $\lim_{t\to+\infty} f(t) = (0,0) = f(0)$.

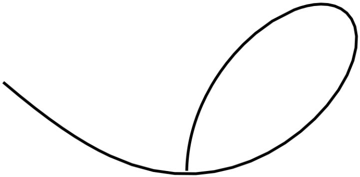


FIGURE – Le folium de Descartes

Exemple 11

La condition f injective n'est pas suffisante.
Soit $(]-1,+\infty[, f)$ avec $f(t) = (\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3})$, le folium de Descartes.
L'application f est une immersion injective mais
$\lim_{t\to+\infty} f(t) = (0,0) = f(0)$.
Ainsi $\|f(t_n) - f(0)\| \to 0$ n'implique pas $t_n \to 0$; f^{-1} n'est donc pas continue et cette nappe n'est pas plongée.

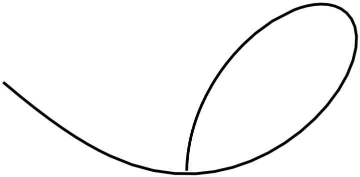


FIGURE – Le folium de Descartes

De l'intérêt des nappes plongées

Proposition 12

Soient (U, f) et (V, g) deux nappes paramétrées ayant même support. Si (U, f) et (V, g) sont plongées, alors elles sont équivalentes.

De l'intérêt des nappes plongées

Proposition 12

Soient (U, f) et (V, g) deux nappes paramétrées ayant même support. Si (U, f) et (V, g) sont plongées, alors elles sont équivalentes.

Preuve. Les nappes étant plongées, l'application $g^{-1} \circ f \ : \ U \to V$ est un homéomorphisme.

De l'intérêt des nappes plongées

Proposition 12

Soient (U, f) et (V, g) deux nappes paramétrées ayant même support. Si (U, f) et (V, g) sont plongées, alors elles sont équivalentes.

Preuve. Les nappes étant plongées, l'application $g^{-1} \circ f \ : \ U \to V$ est un homéomorphisme. Il s'agit de montrer que c'est un difféomorphisme lisse.

De l'intérêt des nappes plongées

Proposition 12

Soient (U, f) et (V, g) deux nappes paramétrées ayant même support. Si (U, f) et (V, g) sont plongées, alors elles sont équivalentes.

Preuve. Les nappes étant plongées, l'application $g^{-1} \circ f \; : \; U \to V$ est un homéomorphisme. Il s'agit de montrer que c'est un difféomorphisme lisse.

Soient $x_0 \in U$ et $y_0 = g^{-1}(f(x_0))$.

De l'intérêt des nappes plongées

Proposition 12

Soient (U, f) et (V, g) deux nappes paramétrées ayant même support. Si (U, f) et (V, g) sont plongées, alors elles sont équivalentes.

Preuve. Les nappes étant plongées, l'application $g^{-1} \circ f \,:\, U \to V$ est un homéomorphisme. Il s'agit de montrer que c'est un difféomorphisme lisse.

Soient $x_0 \in U$ et $y_0 = g^{-1}(f(x_0))$.
D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de $g(y_0)$ tel que $\Phi(g(y)) = (y, 0)$.

De l'intérêt des nappes plongées

Proposition 12

Soient (U, f) et (V, g) deux nappes paramétrées ayant même support. Si (U, f) et (V, g) sont plongées, alors elles sont équivalentes.

Preuve. Les nappes étant plongées, l'application $g^{-1} \circ f : U \to V$ est un homéomorphisme. Il s'agit de montrer que c'est un difféomorphisme lisse.

Soient $x_0 \in U$ et $y_0 = g^{-1}(f(x_0))$.
D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de $g(y_0)$ tel que $\Phi(g(y)) = (y, 0)$.
L'application $\Phi \circ f$ est définie sur un voisinage de x_0 et lisse. De plus,

$$\Phi \circ f(x) = (g^{-1} \circ f(x), 0)$$

De l'intérêt des nappes plongées

Proposition 12

Soient (U, f) et (V, g) deux nappes paramétrées ayant même support. Si (U, f) et (V, g) sont plongées, alors elles sont équivalentes.

Preuve. Les nappes étant plongées, l'application $g^{-1} \circ f : U \to V$ est un homéomorphisme. Il s'agit de montrer que c'est un difféomorphisme lisse.

Soient $x_0 \in U$ et $y_0 = g^{-1}(f(x_0))$.
D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de $g(y_0)$ tel que $\Phi(g(y)) = (y, 0)$.
L'application $\Phi \circ f$ est définie sur un voisinage de x_0 et lisse. De plus,

$$\Phi \circ f(x) = (g^{-1} \circ f(x), 0)$$

Ce qui montre que $g^{-1} \circ f$ est lisse en x_0 et donc partout.

De l'intérêt des nappes plongées

Proposition 12

Soient (U, f) et (V, g) deux nappes paramétrées ayant même support. Si (U, f) et (V, g) sont plongées, alors elles sont équivalentes.

Preuve. Les nappes étant plongées, l'application $g^{-1} \circ f \, : \, U \to V$ est un homéomorphisme. Il s'agit de montrer que c'est un difféomorphisme lisse.

Soient $x_0 \in U$ et $y_0 = g^{-1}(f(x_0))$.
D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de $g(y_0)$ tel que $\Phi(g(y)) = (y, 0)$.
L'application $\Phi \circ f$ est définie sur un voisinage de x_0 et <u>lisse</u>. De plus,

$$\Phi \circ f(x) = (g^{-1} \circ f(x), 0)$$

Ce qui montre que $g^{-1} \circ f$ est lisse en x_0 et donc partout. Par symétrie, il en est de même pour $f^{-1} \circ g$.

De l'intérêt des nappes plongées

Proposition 12

Soient (U, f) et (V, g) deux nappes paramétrées ayant même support. Si (U, f) et (V, g) sont plongées, alors elles sont équivalentes.

Preuve. Les nappes étant plongées, l'application $g^{-1} \circ f : U \to V$ est un homéomorphisme. Il s'agit de montrer que c'est un difféomorphisme lisse.

Soient $x_0 \in U$ et $y_0 = g^{-1}(f(x_0))$.
D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de $g(y_0)$ tel que $\Phi(g(y)) = (y, 0)$.
L'application $\Phi \circ f$ est définie sur un voisinage de x_0 et lisse. De plus,

$$\Phi \circ f(x) = (g^{-1} \circ f(x), 0)$$

Ce qui montre que $g^{-1} \circ f$ est lisse en x_0 et donc partout. Par symétrie, il en est de même pour $f^{-1} \circ g$.$\square$

De l'intérêt des nappes plongées

Proposition 12

Soient (U, f) et (V, g) deux nappes paramétrées ayant même support. Si (U, f) et (V, g) sont plongées, alors elles sont équivalentes.

Preuve. Les nappes étant plongées, l'application $g^{-1} \circ f \ : \ U \to V$ est un homéomorphisme. Il s'agit de montrer que c'est un difféomorphisme lisse.

Soient $x_0 \in U$ et $y_0 = g^{-1}(f(x_0))$.
D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de $g(y_0)$ tel que $\Phi(g(y)) = (y, 0)$.
L'application $\Phi \circ f$ est définie sur un voisinage de x_0 et lisse. De plus,

$$\Phi \circ f(x) = (g^{-1} \circ f(x), 0)$$

Ce qui montre que $g^{-1} \circ f$ est lisse en x_0 et donc partout. Par symétrie, il en est de même pour $f^{-1} \circ g$.$\square$
Cette proposition dit que « *être une nappe plongée* » *est une propriété du support de la nappe*, ce qui est bien plus pratique.

Sous-variétés

Définition 13

On dit qu'un sous-ensemble M de $\mathbf{R}^n$ est une *sous-variété* de dimension d (ou de codimension $n-d$) de $\mathbf{R}^n$ si pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω contenant p et une nappe $\boxed{\text{plongée}}$ (U, f) de dimension d telle que $f(U) = M \cap \Omega$.

Sous-variétés

Définition 13

On dit qu'un sous-ensemble M de $\mathbf{R}^n$ est une *sous-variété* de dimension d (ou de codimension $n-d$) de $\mathbf{R}^n$ si pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω contenant p et une nappe $\boxed{\text{plongée}}$ (U, f) de dimension d telle que $f(U) = M \cap \Omega$.
Les nappes (U, f) sont appelées des *systèmes de coordonnées locales* de M.

Sous-variétés

Définition 13

On dit qu'un sous-ensemble M de $\mathbf{R}^n$ est une *sous-variété* de dimension d (ou de codimension $n-d$) de $\mathbf{R}^n$ si pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω contenant p et une nappe $\boxed{\text{plongée}}$ (U, f) de dimension d telle que $f(U) = M \cap \Omega$.
Les nappes (U, f) sont appelées des *systèmes de coordonnées locales* de M.

Exemple 14

la sphère S^2 est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$.

Sous-variétés

Définition 13

On dit qu'un sous-ensemble M de $\mathbf{R}^n$ est une *sous-variété* de dimension d (ou de codimension $n-d$) de $\mathbf{R}^n$ si pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω contenant p et une nappe $\boxed{\text{plongée}}$ (U, f) de dimension d telle que $f(U) = M \cap \Omega$.
Les nappes (U, f) sont appelées des *systèmes de coordonnées locales* de M.

Exemple 14

la sphère S^2 est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$.
En effet, l'intersection entre S^2 et tout demi-espace $\{x_i > 0\}$ ou $\{x_i < 0\}$ est un graphe.

Sous-variétés

Définition 13

On dit qu'un sous-ensemble M de $\mathbf{R}^n$ est une *sous-variété* de dimension d (ou de codimension $n-d$) de $\mathbf{R}^n$ si pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω contenant p et une nappe $\boxed{\text{plongée}}$ (U, f) de dimension d telle que $f(U) = M \cap \Omega$.
Les nappes (U, f) sont appelées des *systèmes de coordonnées locales* de M.

Exemple 14

la sphère S^2 est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$.
En effet, l'intersection entre S^2 et tout demi-espace $\{x_i > 0\}$ ou $\{x_i < 0\}$ est un graphe.

Question : Est-il possible de voir que S^2 est une sous-variété simplement en regardant son équation cartésienne :

Sous-variétés

Définition 13

On dit qu'un sous-ensemble M de $\mathbf{R}^n$ est une *sous-variété* de dimension d (ou de codimension $n-d$) de $\mathbf{R}^n$ si pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω contenant p et une nappe $\boxed{\text{plongée}}$ (U, f) de dimension d telle que $f(U) = M \cap \Omega$.
Les nappes (U, f) sont appelées des *systèmes de coordonnées locales* de M.

Exemple 14

la sphère S^2 est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$.
En effet, l'intersection entre S^2 et tout demi-espace $\{x_i > 0\}$ ou $\{x_i < 0\}$ est un graphe.

Question : Est-il possible de voir que S^2 est une sous-variété simplement en regardant son équation cartésienne : $S^2 = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x\|^2 = 1\}$?

Sous-variétés

Définition 13

On dit qu'un sous-ensemble M de $\mathbf{R}^n$ est une *sous-variété* de dimension d (ou de codimension $n-d$) de $\mathbf{R}^n$ si pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω contenant p et une nappe $\boxed{\text{plongée}}$ (U, f) de dimension d telle que $f(U) = M \cap \Omega$.
Les nappes (U, f) sont appelées des *systèmes de coordonnées locales* de M.

Exemple 14

la sphère S^2 est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$.
En effet, l'intersection entre S^2 et tout demi-espace $\{x_i > 0\}$ ou $\{x_i < 0\}$ est un graphe.

Question : Est-il possible de voir que S^2 est une sous-variété simplement en regardant son équation cartésienne : $S^2 = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x\|^2 = 1\}$?
Oui...

De la même façon que la proposition 8 nous dit ce qu'est un bon paramétrage, la proposition suivante dit ce qu'est une bonne équation.

Proposition 15

Soient n et q deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^q$ une application lisse, et $a \in U$.

De la même façon que la proposition 8 nous dit ce qu'est un bon paramétrage, la proposition suivante dit ce qu'est une bonne équation.

Proposition 15

Soient n et q deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^q$ une application lisse, et $a \in U$.
Si $D_a f$ est $\boxed{\text{surjective,}}$

De la même façon que la proposition 8 nous dit ce qu'est un bon paramétrage, la proposition suivante dit ce qu'est une bonne équation.

Proposition 15

Soient n et q deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^q$ une application lisse, et $a \in U$.
Si $D_a f$ est $\boxed{\text{surjective,}}$ alors $n \geq q$

De la même façon que la proposition 8 nous dit ce qu'est un bon paramétrage, la proposition suivante dit ce qu'est une bonne équation.

Proposition 15

Soient n et q deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^q$ une application lisse, et $a \in U$.
Si $D_a f$ est $\boxed{\text{surjective,}}$ alors $n \geq q$ et il existe un ouvert W contenant a et un difféomorphisme lisse Φ de W sur son image tels que $\Phi(W) \subset U$ et que pour tout $x \in W$

$$f(\Phi(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_q).$$

De la même façon que la proposition 8 nous dit ce qu'est un bon paramétrage, la proposition suivante dit ce qu'est une bonne équation.

Proposition 15

Soient n et q deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^q$ une application lisse, et $a \in U$.
Si D_af est $\boxed{\text{surjective,}}$ alors $n \geq q$ et il existe un ouvert W contenant a et un difféomorphisme lisse Φ de W sur son image tels que $\Phi(W) \subset U$ et que pour tout $x \in W$

$$f(\Phi(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_q).$$

Autrement dit si D_af est surjective, il existe un changement local de coordonnées « au départ » qui rend f linéaire.

De la même façon que la proposition 8 nous dit ce qu'est un bon paramétrage, la proposition suivante dit ce qu'est une bonne équation.

Proposition 15

Soient n et q deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^q$ une application lisse, et $a \in U$.
Si $D_a f$ est $\boxed{\text{surjective,}}$ alors $n \geq q$ et il existe un ouvert W contenant a et un difféomorphisme lisse Φ de W sur son image tels que $\Phi(W) \subset U$ et que pour tout $x \in W$

$$f(\Phi(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_q).$$

Autrement dit si $D_a f$ est surjective, il existe un changement local de coordonnées « au départ » qui rend f linéaire.
En particulier, si $D_a f$ est surjective et $f(a) = 0$, alors il existe un voisinage U de a tel que $f^{-1}(0) \cap U$ ressemble à un bout de $(n-q)$-plan...

Preuve :

Preuve :

Le théorème du rang dit que $q \leq n$.

Preuve :

Le théorème du rang dit que $q \leq n$.
Par hypothèse, la jacobienne de f en a est de rang q. Permuter les coordonnées de $\mathbf{R}^n$ (au départ !), revient à permuter les colonnes de $J_a f$.

Preuve :

Le théorème du rang dit que $q \leq n$.
Par hypothèse, la jacobienne de f en a est de rang q. Permuter les coordonnées de $\mathbf{R}^n$ (au départ !), revient à permuter les colonnes de $J_a f$.
On peut supposer que ses q premières colonnes engendrent $\mathbf{R}^q$.

Preuve :

Le théorème du rang dit que $q \leq n$.
Par hypothèse, la jacobienne de f en a est de rang q. Permuter les coordonnées de $\mathbf{R}^n$ (au départ !), revient à permuter les colonnes de $J_a f$. On peut supposer que ses q premières colonnes engendrent $\mathbf{R}^q$. La matrice

$$B = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq q}}$$

est alors inversible

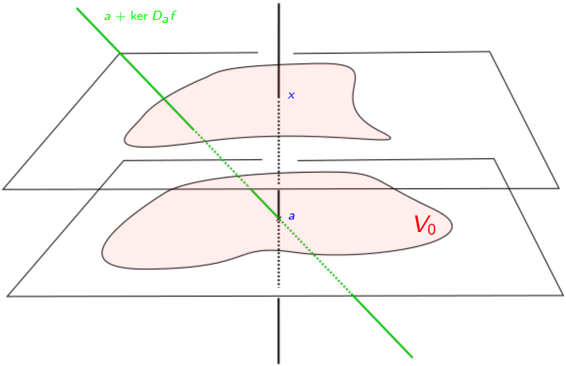
Preuve :

Le théorème du rang dit que $q \leq n$.
Par hypothèse, la jacobienne de f en a est de rang q. Permuter les coordonnées de $\mathbf{R}^n$ (au départ !), revient à permuter les colonnes de $J_a f$. On peut supposer que ses q premières colonnes engendrent $\mathbf{R}^q$. La matrice

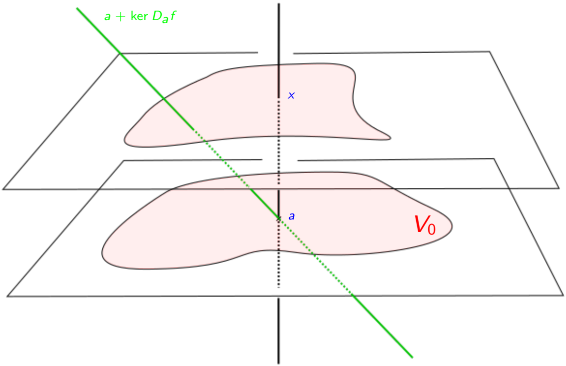
$$B = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq q}}$$

est alors inversible (et on a $J_a f = (B \quad *)$).

Cas $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$

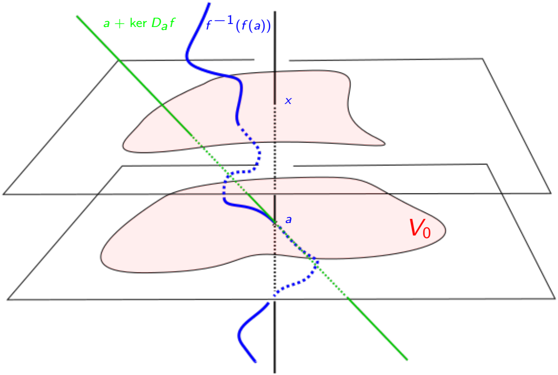


Cas $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$



La restriction de $D_a f$ à $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ est injective. De même, il existe un voisinage V_0 de a dans le plan horizontal passant par a tel que $f|_{V_0}$ est injective. Un point x suffisamment proche de a a les mêmes propriétés.

Cas $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$



La restriction de $D_a f$ à $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ est injective. De même, il existe un voisinage V_0 de a dans le plan horizontal passant par a tel que $f|_{V_0}$ est injective. Un point x suffisamment proche de a a les mêmes propriétés.

On définit alors $g : U \to \mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{n-q}$ par
$$g(x) = (f^1(x), \ldots f^q(x), x_{q+1}, \ldots, x_n) = (f(x), p(x)).$$

On définit alors $g : U \to \mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{n-q}$ par

$$g(x) = (f^1(x), \dots f^q(x), x_{q+1}, \dots, x_n) = (f(x), p(x)).$$

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en a est de la forme

$$\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

On définit alors $g : U \to \mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{n-q}$ par

$$g(x) = (f^1(x), \dots f^q(x), x_{q+1}, \dots, x_n) = (f(x), p(x)).$$

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en a est de la forme

$$\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.

On définit alors $g : U \to \mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{n-q}$ par

$$g(x) = (f^1(x), \dots f^q(x), x_{q+1}, \dots, x_n) = (f(x), p(x)).$$

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en a est de la forme

$$\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale !

On définit alors $g : U \to \mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{n-q}$ par

$$g(x) = (f^1(x), \dots f^q(x), x_{q+1}, \dots, x_n) = (f(x), p(x)).$$

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en a est de la forme

$$\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale !

Il existe ainsi un voisinage V de a tel que la restriction de g à V est un difféomorphisme lisse sur $W = g(V)$.

On définit alors $g : U \to \mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{n-q}$ par
$$g(x) = (f^1(x), \dots f^q(x), x_{q+1}, \dots, x_n) = (f(x), p(x)).$$
Cette fonction est lisse et sa jacobienne en a est de la forme

$$\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.
On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale !
Il existe ainsi un voisinage V de a tel que la restriction de g à V est un difféomorphisme lisse sur $W = g(V)$.
On pose $\Phi = (g|_V)^{-1}$. Pour tout $x \in W$, $f \circ \Phi(x) = (x_1, \dots, x_q)$.

On définit alors $g : U \to \mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{n-q}$ par
$$g(x) = (f^1(x), \dots f^q(x), x_{q+1}, \dots, x_n) = (f(x), p(x)).$$
Cette fonction est lisse et sa jacobienne en a est de la forme

$$\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.
On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale !
Il existe ainsi un voisinage V de a tel que la restriction de g à V est un difféomorphisme lisse sur $W = g(V)$.
On pose $\Phi = (g|_V)^{-1}$. Pour tout $x \in W$, $f \circ \Phi(x) = (x_1, \dots, x_q)$. $\square$

On définit alors $g : U \to \mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{n-q}$ par

$$g(x) = (f^1(x), \dots f^q(x), x_{q+1}, \dots, x_n) = (f(x), p(x)).$$

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en a est de la forme

$$\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible.

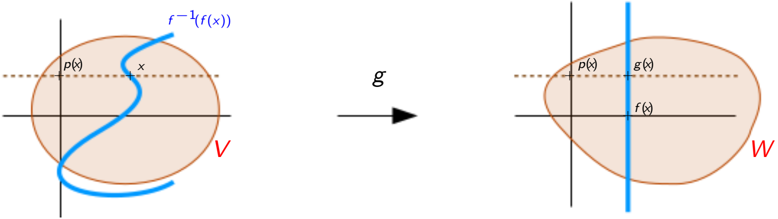
On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale !

Il existe ainsi un voisinage V de a tel que la restriction de g à V est un difféomorphisme lisse sur $W = g(V)$.

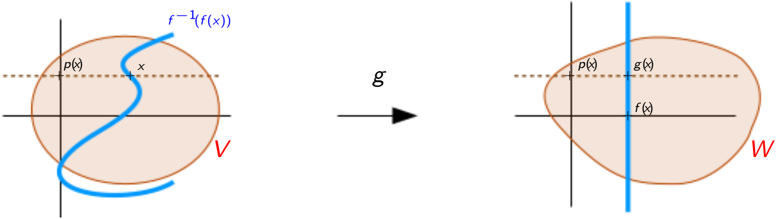
On pose $\Phi = (g|_V)^{-1}$. Pour tout $x \in W$, $f \circ \Phi(x) = (x_1, \dots, x_q)$. $\square$

Remarquons pour plus tard que, vu l'expression de g, il existe une application lisse $F : W \to \mathbf{R}^q$ telle que $\Phi(u, v) = (F(u, v), v)$, pour tout $(u, v) \in W$. $\square$

La preuve de la proposition 15 en dessin.

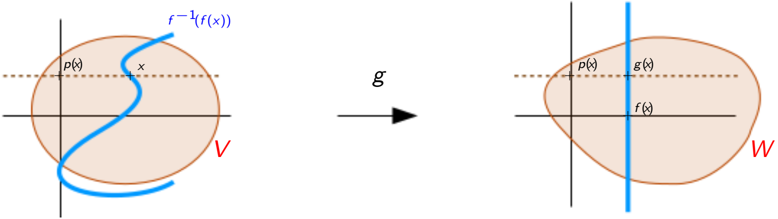


La preuve de la proposition 15 en dessin.



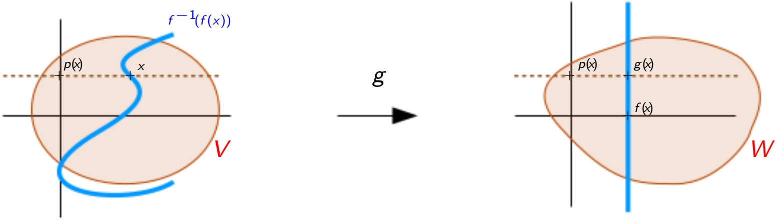
On a écrit $f(x)$ pour $(f(x), 0)$ et $p(x)$ pour $(0, \ldots, 0, x^{q+1}, \ldots, x^n)$ pour des raisons de place.

La preuve de la proposition 15 en dessin.



On a écrit $f(x)$ pour $(f(x), 0)$ et $p(x)$ pour $(0, \ldots, 0, x^{q+1}, \ldots, x^n)$ pour des raisons de place.
En suivant $y = g(x) \in W$, on voit que $f \circ g|_V^{-1}$ est la première projection.

La preuve de la proposition 15 en dessin.



On a écrit $f(x)$ pour $(f(x), 0)$ et $p(x)$ pour $(0, \ldots, 0, x^{q+1}, \ldots, x^n)$ pour des raisons de place.
En suivant $y = g(x) \in W$, on voit que $f \circ g|_V^{-1}$ est la première projection.
On voit aussi que $g|_V^{-1}$ exprime la courbe bleue comme un graphe au dessus du segment bleu, on a presque remontré le théorème des fonctions implicites.

Définition 16

Une application différentiable f d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^q$ dont la différentielle en tout point est surjective est appelé une *submersion*.

Définition 16

Une application différentiable f d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^q$ dont la différentielle en tout point est surjective est appelé une *submersion*. Autrement dit f est une submersion si

$$\forall x \in U, \ \operatorname{rang}(D_x f) = q.$$

Définition 16

Une application différentiable f d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^q$ dont la différentielle en tout point est surjective est appelé une *submersion*. Autrement dit f est une submersion si

$$\forall x \in U, \ \mathrm{rang}(D_x f) = q.$$

Exercice 2

1. Soit $M \subset \mathbf{R}^n$ le graphe d'une application lisse f_0 de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^{n-p}$. Montrer qu'il existe une submersion lisse h de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n-p}$ telle que $M = h^{-1}(0)$.

Définition 16

Une application différentiable f d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^q$ dont la différentielle en tout point est surjective est appelé une *submersion*. Autrement dit f est une submersion si

$$\forall x \in U, \ \operatorname{rang}(D_x f) = q.$$

Exercice 2

1. Soit $M \subset \mathbf{R}^n$ le graphe d'une application lisse f_0 de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^{n-p}$. Montrer qu'il existe une submersion lisse h de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n-p}$ telle que $M = h^{-1}(0)$.
2. Montrer sans utiliser les propositions 8 et 15 que si f est de classe C^1 alors la propriété « $D_x f$ est surjective (resp. injective) en x » est ouverte.

Théorème 17

Soit M un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

Théorème 17

Soit M un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *M est une sous-variété de dimension d de $\mathbf{R}^n$ (voir définition 13)*

Théorème 17

Soit M un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *M est une sous-variété de dimension d de $\mathbf{R}^n$ (voir définition 13)*
2. *pour tout $p \in M$ il existe Ω et Ω' voisinages ouverts de p et de 0 dans $\mathbf{R}^n$ et un difféomorphisme lisse Φ tel que $\Phi(\Omega \cap M) = \Omega' \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$.*

Théorème 17

Soit M un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *M est une sous-variété de dimension d de $\mathbf{R}^n$ (voir définition 13)*
2. *pour tout $p \in M$ il existe Ω et Ω' voisinages ouverts de p et de 0 dans $\mathbf{R}^n$ et un difféomorphisme lisse Φ tel que $\Phi(\Omega \cap M) = \Omega' \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$.*
3. *pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ contenant p et une submersion lisse $h : \Omega \to \mathbf{R}^{n-d}$ telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$.*

Théorème 17

Soit M un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *M est une sous-variété de dimension d de $\mathbf{R}^n$ (voir définition 13)*
2. *pour tout $p \in M$ il existe Ω et Ω' voisinages ouverts de p et de 0 dans $\mathbf{R}^n$ et un difféomorphisme lisse Φ tel que $\Phi(\Omega \cap M) = \Omega' \cap (\mathbf{R}^d \times \{0\})$.*
3. *pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ contenant p et une submersion lisse $h : \Omega \to \mathbf{R}^{n-d}$ telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$.*
4. *Quitte à permuter les coordonnées de $\mathbf{R}^n$, pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω contenant p, une application lisse f_0 d'un ouvert U de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^{n-d}$ tels que $\Omega \cap M$ est le graphe de f_0 c.-à-d.*
$$\Omega \cap M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d} \,|\, x \in U \text{ et } y = f_0(x)\}.$$

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 8 et la définition de plongé .

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 8 et la définition de plongé .

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et Φ tel que défini en 2).

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 8 et la définition de plongé .

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et Φ tel que défini en 2). Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ dans $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-d}$.

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 8 et la définition de plongé .

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et Φ tel que défini en 2). Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ dans $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-d}$. L'application $h = \pi \circ \Phi$ est une submersion définie sur Ω telle que $h^{-1}(0) = \Omega \cap M$.

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 8 et la définition de plongé .

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et Φ tel que défini en 2). Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ dans $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-d}$. L'application $h = \pi \circ \Phi$ est une submersion définie sur Ω telle que $h^{-1}(0) = \Omega \cap M$.

3) $\Rightarrow$ 4), c'est exactement le théorème des fonctions implicites !

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 8 et la définition de plongé .

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et Φ tel que défini en 2). Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ dans $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-d}$. L'application $h = \pi \circ \Phi$ est une submersion définie sur Ω telle que $h^{-1}(0) = \Omega \cap M$.

3) $\Rightarrow$ 4), c'est exactement le théorème des fonctions implicites !
Soit h la submersion définie au voisinage de p telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$.

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 8 et la définition de plongé .

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et Φ tel que défini en 2). Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ dans $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-d}$. L'application $h = \pi \circ \Phi$ est une submersion définie sur Ω telle que $h^{-1}(0) = \Omega \cap M$.

3) $\Rightarrow$ 4), c'est exactement le théorème des fonctions implicites !
Soit h la submersion définie au voisinage de p telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$.
Soit $\Phi : W \to V \ni p$ un difféomorphisme qui redresse h au voisinage de p cf. proposition 15.

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 8 et la définition de plongé .

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et Φ tel que défini en 2). Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ dans $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-d}$. L'application $h = \pi \circ \Phi$ est une submersion définie sur Ω telle que $h^{-1}(0) = \Omega \cap M$.

3) $\Rightarrow$ 4), c'est exactement le théorème des fonctions implicites !
Soit h la submersion définie au voisinage de p telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$.
Soit $\Phi : W \to V \ni p$ un difféomorphisme qui redresse h au voisinage de p cf. proposition 15.
Soit U la projection sur $\mathbf{R}^d$ de $(\{0\} \times \mathbf{R}^d) \cap V$.

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 8 et la définition de plongé .

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et Φ tel que défini en 2). Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ dans $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-d}$. L'application $h = \pi \circ \Phi$ est une submersion définie sur Ω telle que $h^{-1}(0) = \Omega \cap M$.

3) $\Rightarrow$ 4), c'est exactement le théorème des fonctions implicites !
Soit h la submersion définie au voisinage de p telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$.
Soit $\Phi : W \to V \ni p$ un difféomorphisme qui redresse h au voisinage de p cf. proposition 15.
Soit U la projection sur $\mathbf{R}^d$ de $(\{0\} \times \mathbf{R}^d) \cap V$. Clairement $h(x) = 0$ si et seulement s'il existe $v \in U$ tel que $x = \Phi(0, v)$.

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 8 et la définition de plongé .

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et Φ tel que défini en 2). Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ dans $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-d}$. L'application $h = \pi \circ \Phi$ est une submersion définie sur Ω telle que $h^{-1}(0) = \Omega \cap M$.

3) $\Rightarrow$ 4), c'est exactement le théorème des fonctions implicites ! Soit h la submersion définie au voisinage de p telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$. Soit $\Phi : W \to V \ni p$ un difféomorphisme qui redresse h au voisinage de p cf. proposition 15.
Soit U la projection sur $\mathbf{R}^d$ de $(\{0\} \times \mathbf{R}^d) \cap V$. Clairement $h(x) = 0$ si et seulement s'il existe $v \in U$ tel que $x = \Phi(0, v)$. On a vu que, quitte à permutter les coordonnées, il existe $F : W \to \mathbf{R}^{n-d}$ lisse telle que $\Phi(u, v) = (F(u, v), v)$.

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 8 et la définition de plongé .

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et Φ tel que défini en 2). Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ dans $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-d}$. L'application $h = \pi \circ \Phi$ est une submersion définie sur Ω telle que $h^{-1}(0) = \Omega \cap M$.

3) $\Rightarrow$ 4), c'est exactement le théorème des fonctions implicites !
Soit h la submersion définie au voisinage de p telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$.
Soit $\Phi : W \to V \ni p$ un difféomorphisme qui redresse h au voisinage de p cf. proposition 15.
Soit U la projection sur $\mathbf{R}^d$ de $(\{0\} \times \mathbf{R}^d) \cap V$. Clairement $h(x) = 0$ si et seulement s'il existe $v \in U$ tel que $x = \Phi(0, v)$. On a vu que, quitte à permutter les coordonnées, il existe $F : W \to \mathbf{R}^{n-d}$ lisse telle que $\Phi(u, v) = (F(u, v), v)$. Par conséquent $h^{-1}(0) \cap V = M \cap V$ est le graphe de l'application lisse $f_0 : U \to \mathbf{R}^{n-d}$ définie par $f_0(v) = F(0, v)$.

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 8 et la définition de plongé .

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et Φ tel que défini en 2). Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ dans $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-d}$. L'application $h = \pi \circ \Phi$ est une submersion définie sur Ω telle que $h^{-1}(0) = \Omega \cap M$.

3) $\Rightarrow$ 4), c'est exactement le théorème des fonctions implicites !
Soit h la submersion définie au voisinage de p telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$.
Soit $\Phi : W \to V \ni p$ un difféomorphisme qui redresse h au voisinage de p cf. proposition 15.
Soit U la projection sur $\mathbf{R}^d$ de $(\{0\} \times \mathbf{R}^d) \cap V$. Clairement $h(x) = 0$ si et seulement s'il existe $v \in U$ tel que $x = \Phi(0, v)$. On a vu que, quitte à permutter les coordonnées, il existe $F : W \to \mathbf{R}^{n-d}$ lisse telle que $\Phi(u, v) = (F(u, v), v)$. Par conséquent $h^{-1}(0) \cap V = M \cap V$ est le graphe de l'application lisse $f_0 : U \to \mathbf{R}^{n-d}$ définie par $f_0(v) = F(0, v)$.

4) $\Rightarrow$ 1) déjà vu cf. exemple 10.

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 8 et la définition de plongé .

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et Φ tel que défini en 2). Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ dans $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-d}$. L'application $h = \pi \circ \Phi$ est une submersion définie sur Ω telle que $h^{-1}(0) = \Omega \cap M$.

3) $\Rightarrow$ 4), c'est exactement le théorème des fonctions implicites !
Soit h la submersion définie au voisinage de p telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$.
Soit $\Phi : W \to V \ni p$ un difféomorphisme qui redresse h au voisinage de p cf. proposition 15.
Soit U la projection sur $\mathbf{R}^d$ de $(\{0\} \times \mathbf{R}^d) \cap V$. Clairement $h(x) = 0$ si et seulement s'il existe $v \in U$ tel que $x = \Phi(0, v)$. On a vu que, quitte à permutter les coordonnées, il existe $F : W \to \mathbf{R}^{n-d}$ lisse telle que $\Phi(u, v) = (F(u, v), v)$. Par conséquent $h^{-1}(0) \cap V = M \cap V$ est le graphe de l'application lisse $f_0 : U \to \mathbf{R}^{n-d}$ définie par $f_0(v) = F(0, v)$.

4) $\Rightarrow$ 1) déjà vu cf. exemple 10. $\square$

On a utilisé le propriété suivante qui mérite d'être remarquée dont la preuve (facile) est laissée en exercice :

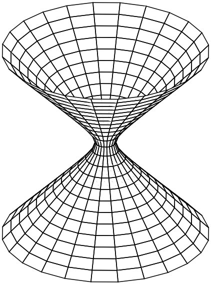
Propriété

La composée de deux immersions (resp. de deux submersions) est une immersion (resp. une submersion).

Le critère 3) est pratique pour montrer que quelque chose est une sous-variété :

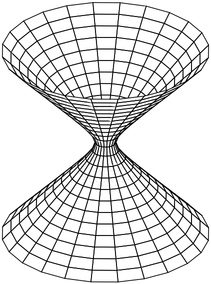
Le critère 3) est pratique pour montrer que quelque chose est une sous-variété :

– Considérons $\mathcal{H}$ l'hyperboloïde à une nappe, c'est à dire $\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\}$.



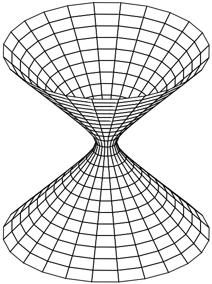
Le critère 3) est pratique pour montrer que quelque chose est une sous-variété :

– Considérons $\mathcal{H}$ l'hyperboloïde à une nappe, c'est à dire
$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\}$.
Soit $f : \mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$.



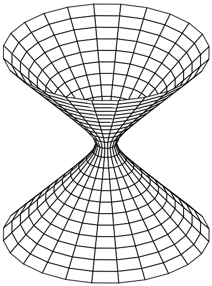
Le critère 3) est pratique pour montrer que quelque chose est une sous-variété :

– Considérons $\mathcal{H}$ l'hyperboloïde à une nappe, c'est à dire
$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\}$.
Soit $f : \mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, on a $J_x f = 2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$.



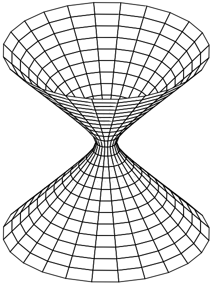
Le critère 3) est pratique pour montrer que quelque chose est une sous-variété :

– Considérons $\mathcal{H}$ l'hyperboloïde à une nappe, c'est à dire $\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\}$.
Soit $f : \mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, on a $J_x f = 2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$.
Cette matrice est de rang $1 = \dim \mathbf{R}$, l'espace d'arrivée de f, car $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$.



Le critère 3) est pratique pour montrer que quelque chose est une sous-variété :

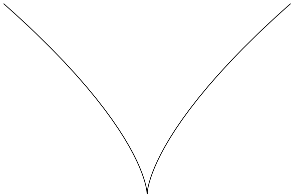
– Considérons $\mathcal{H}$ l'hyperboloïde à une nappe, c'est à dire $\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\}$.
Soit $f : \mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, on a $J_x f = 2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$.
Cette matrice est de rang $1 = \dim \mathbf{R}$, l'espace d'arrivée de f, car $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$.
L'application f est donc une submersion lisse et $\mathcal{H}$ est donc une sous-variété de dimension 2 de $\mathbf{R}^3$.



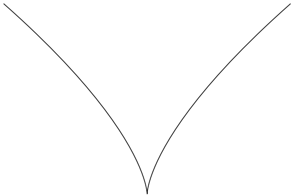
Le critère 4) pour montrer que quelque chose n'est pas une sous-variété :

Le critère 4) pour montrer que quelque chose n'est pas une sous-variété :

– Soit $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^3 = 0\}$, la cubique cuspidale.

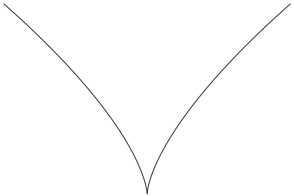


Le critère 4) pour montrer que quelque chose n'est pas une sous-variété :
– Soit $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^3 = 0\}$, la cubique cuspidale.
Si C était une sous variété, alors, au voisinage de 0, on pourrait voir C comme le graphe d'une fonction lisse.



Le critère 4) pour montrer que quelque chose n'est pas une sous-variété :
– Soit $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^3 = 0\}$, la cubique cuspidale.
Si C était une sous variété, alors, au voisinage de 0, on pourrait voir C comme le graphe d'une fonction lisse.
Il existerait donc deux réels positifs ε et η et $f_0 :]-\eta, \eta[\to \mathbf{R}$ lisse tels que

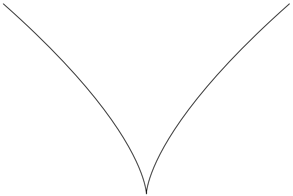
$$\|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_1 = f_0(x_2) \quad \boxed{\text{ou}} \quad \|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_2 = f_0(x_1).$$



Le critère 4) pour montrer que quelque chose n'est pas une sous-variété :
– Soit $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^3 = 0\}$, la cubique cuspidale.
Si C était une sous variété, alors, au voisinage de 0, on pourrait voir C comme le graphe d'une fonction lisse.
Il existerait donc deux réels positifs ε et η et $f_0 :]-\eta, \eta[\to \mathbf{R}$ lisse tels que

$$\|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_1 = f_0(x_2) \quad \boxed{\text{ou}} \quad \|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_2 = f_0(x_1).$$

Dans un cas, on doit avoir $f_0(x_1) = (x_1^2)^{1/3}$ qui n'est pas dérivable en 0.



Le critère 4) pour montrer que quelque chose n'est pas une sous-variété :

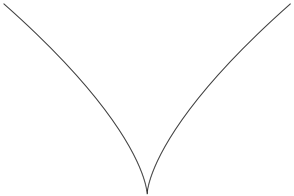
– Soit $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^3 = 0\}$, la cubique cuspidale.

Si C était une sous variété, alors, au voisinage de 0, on pourrait voir C comme le graphe d'une fonction lisse.

Il existerait donc deux réels positifs ε et η et $f_0 :]-\eta, \eta[\to \mathbf{R}$ lisse tels que

$$\|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_1 = f_0(x_2) \quad \boxed{\text{ou}} \quad \|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_2 = f_0(x_1).$$

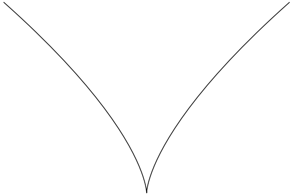
Dans un cas, on doit avoir $f_0(x_1) = (x_1^2)^{1/3}$ qui n'est pas dérivable en 0. Dans l'autre cas, C doit contenir des points d'ordonnée strictement négative, ce qui n'est pas le cas.



Le critère 4) pour montrer que quelque chose n'est pas une sous-variété :
– Soit $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^3 = 0\}$, la cubique cuspidale.
Si C était une sous variété, alors, au voisinage de 0, on pourrait voir C comme le graphe d'une fonction lisse.
Il existerait donc deux réels positifs ε et η et $f_0 :]-\eta, \eta[\to \mathbf{R}$ lisse tels que

$$\|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_1 = f_0(x_2) \quad \boxed{\text{ou}} \quad \|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_2 = f_0(x_1).$$

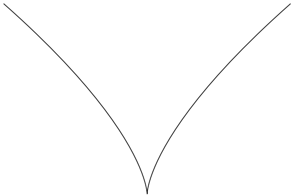
Dans un cas, on doit avoir $f_0(x_1) = (x_1^2)^{1/3}$ qui n'est pas dérivable en 0.
Dans l'autre cas, C doit contenir des points d'ordonnée strictement négative, ce qui n'est pas le cas.
C n'est donc pas une sous-variété de $\mathbf{R}^2$,



Le critère 4) pour montrer que quelque chose n'est pas une sous-variété :
– Soit $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^3 = 0\}$, la cubique cuspidale.
Si C était une sous variété, alors, au voisinage de 0, on pourrait voir C comme le graphe d'une fonction lisse.
Il existerait donc deux réels positifs ε et η et $f_0 :]-\eta, \eta[\to \mathbf{R}$ lisse tels que

$$\|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_1 = f_0(x_2) \quad \boxed{\text{ou}} \quad \|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_2 = f_0(x_1).$$

Dans un cas, on doit avoir $f_0(x_1) = (x_1^2)^{1/3}$ qui n'est pas dérivable en 0.
Dans l'autre cas, C doit contenir des points d'ordonnée strictement négative, ce qui n'est pas le cas.
C n'est donc pas une sous-variété de $\mathbf{R}^2$, par contre $C \setminus \{0\}$ en est une.



NB : Le fait que l'application $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2^3$ n'est pas une surjection *ne montre pas* que C n'est pas une sous-variété (mais c'est tout de même un indice).

NB : Le fait que l'application $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2^3$ n'est pas une surjection *ne montre pas* que C n'est pas une sous-variété (mais c'est tout de même un indice).

Ainsi, on peut écrire $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, (x^2 + y^2 - 1)^2 = 0\}$, l'application $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2 - 1)^2$ a une différentielle nulle le long de S^1, mais le cercle S^1 est bien une sous-variété de $\mathbf{R}^2$.

Espace tangent

Dans la suite M désignera une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d et p un point de M.

Définition 18

Un vecteur $v \in \mathbf{R}^n$ appartient l'espace tangent en p à M, noté T_pM,

Espace tangent

Dans la suite M désignera une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d et p un point de M.

Définition 18

Un vecteur $v \in \mathbf{R}^n$ appartient l'espace tangent en p à M, noté T_pM, s'il existe un arc (I, γ) tel que $\gamma(I) \subset M$ (on dit que γ est tracé sur M),

Espace tangent

Dans la suite M désignera une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d et p un point de M.

Définition 18

Un vecteur $v \in \mathbf{R}^n$ appartient l'espace tangent en p à M, noté T_pM, s'il existe un arc (I, γ) tel que $\gamma(I) \subset M$ (on dit que γ est tracé sur M), que $\gamma(0) = p$ et que $\gamma'(0) = v$.

Espace tangent

Dans la suite M désignera une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d et p un point de M.

Définition 18

Un vecteur $v \in \mathbf{R}^n$ appartient l'espace tangent en p à M, noté T_pM, s'il existe un arc (I, γ) tel que $\gamma(I) \subset M$ (on dit que γ est tracé sur M), que $\gamma(0) = p$ et que $\gamma'(0) = v$.

Vu comme ça, il n'est pas clair du tout que cet espace soit plan...

La proposition suivante, en plus de donner un moyen de calculer cet espace, éclairci ce point.

La proposition suivante, en plus de donner un moyen de calculer cet espace, éclairci ce point.

Proposition 19

1. Si (U, f) est un système de coordonnées locales sur M tel que $f(x_0) = p$, alors
$$T_pM = D_{x_0}f(\mathbf{R}^d).$$

La proposition suivante, en plus de donner un moyen de calculer cet espace, éclairci ce point.

Proposition 19

1. Si (U, f) est un système de coordonnées locales sur M tel que $f(x_0) = p$, alors
$$T_pM = D_{x_0}f(\mathbf{R}^d).$$
En particulier, si M est le graphe de f_0 alors $T_{(x_0,f_0({}_0x))}M$ est le graphe de $D_{x_0}f_0$.

La proposition suivante, en plus de donner un moyen de calculer cet espace, éclairci ce point.

Proposition 19

1. Si (U, f) est un système de coordonnées locales sur M tel que $f(x_0) = p$, alors
$$T_pM = D_{x_0}f(\mathbf{R}^d).$$
En particulier, si M est le graphe de f_0 alors $T_{(x_0, f_0(_0x))}M$ est le graphe de $D_{x_0}f_0$.
2. Si h est une submersion telle que $M \cap \Omega = h^{-1}(c)$, alors
$$T_pM = \ker D_ph$$

La proposition suivante, en plus de donner un moyen de calculer cet espace, éclairci ce point.

Proposition 19

1. Si (U, f) est un système de coordonnées locales sur M tel que $f(x_0) = p$, alors
$$T_pM = D_{x_0}f(\mathbf{R}^d).$$
En particulier, si M est le graphe de f_0 alors $T_{(x_0,f_0(_0x))}M$ est le graphe de $D_{x_0}f_0$.
2. Si h est une submersion telle que $M \cap \Omega = h^{-1}(c)$, alors
$$T_pM = \ker D_ph$$

Preuve : 1) Pour tout $v \in \mathbf{R}^p$, on sait que $D_{x_0}f(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0}f(x_0 + tv)$.

La proposition suivante, en plus de donner un moyen de calculer cet espace, éclairci ce point.

Proposition 19

1. Si (U, f) est un système de coordonnées locales sur M tel que $f(x_0) = p$, alors
$$T_pM = D_{x_0}f(\mathbf{R}^d).$$
En particulier, si M est le graphe de f_0 alors $T_{(x_0, f_0({}_0x))}M$ est le graphe de $D_{x_0}f_0$.
2. Si h est une submersion telle que $M \cap \Omega = h^{-1}(c)$, alors
$$T_pM = \ker D_ph$$

Preuve : 1) Pour tout $v \in \mathbf{R}^p$, on sait que $D_{x_0}f(v) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(x_0 + tv)$. Mais $t \mapsto f(x_0 + tv)$ est un arc tracé sur M et donc $D_{x_0}f(v) \in T_pM$.

Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$.

Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$. D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de p tel que, pour tout x proche de x_0, $\Phi \circ f(x) = (x, 0)$.

Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$. D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de p tel que, pour tout x proche de x_0, $\Phi \circ f(x) = (x, 0)$.
Comme f^{-1} est continue, pour t proche de 0, $f^{-1}(\gamma(t))$ est proche de x_0 et donc

$$((f^{-1} \circ \gamma)(t), 0) = (\Phi \circ f)(f^{-1} \circ \gamma(t)) =$$

Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$. D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de p tel que, pour tout x proche de x_0, $\Phi \circ f(x) = (x, 0)$.
Comme f^{-1} est continue, pour t proche de 0, $f^{-1}(\gamma(t))$ est proche de x_0 et donc

$$((f^{-1} \circ \gamma)(t), 0) = (\Phi \circ f)(f^{-1} \circ \gamma(t)) = (\Phi \circ \gamma)(t).$$

Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$. D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de p tel que, pour tout x proche de x_0, $\Phi \circ f(x) = (x, 0)$.
Comme f^{-1} est continue, pour t proche de 0, $f^{-1}(\gamma(t))$ est proche de x_0 et donc

$$((f^{-1} \circ \gamma)(t), 0) = (\Phi \circ f)(f^{-1} \circ \gamma(t)) = (\Phi \circ \gamma)(t).$$

Ce qui montre que $f^{-1} \circ \gamma$ est lisse.

Réciproquement, soit (I,γ) un arc paramétré de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0)=p$. D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de p tel que, pour tout x proche de x_0, $\Phi\circ f(x)=(x,0)$.
Comme f^{-1} est continue, pour t proche de 0, $f^{-1}(\gamma(t))$ est proche de x_0 et donc

$$((f^{-1}\circ\gamma)(t),0)=(\Phi\circ f)(f^{-1}\circ\gamma(t))=(\Phi\circ\gamma)(t).$$

Ce qui montre que $f^{-1}\circ\gamma$ est lisse. On a donc

$$\gamma'(0)=(f\circ(f^{-1}\circ\gamma))'(0)=D_xf(f^{-1}\circ\gamma)'(0).$$

Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$. D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de p tel que, pour tout x proche de x_0, $\Phi \circ f(x) = (x, 0)$.
Comme f^{-1} est continue, pour t proche de 0, $f^{-1}(\gamma(t))$ est proche de x_0 et donc

$$((f^{-1} \circ \gamma)(t), 0) = (\Phi \circ f)(f^{-1} \circ \gamma(t)) = (\Phi \circ \gamma)(t).$$

Ce qui montre que $f^{-1} \circ \gamma$ est lisse. On a donc

$$\gamma'(0) = (f \circ (f^{-1} \circ \gamma))'(0) = D_x f (f^{-1} \circ \gamma)'(0).$$

Ce qui donne l'inclusion réciproque.

Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$. D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de p tel que, pour tout x proche de x_0, $\Phi \circ f(x) = (x, 0)$.
Comme f^{-1} est continue, pour t proche de 0, $f^{-1}(\gamma(t))$ est proche de x_0 et donc

$$((f^{-1} \circ \gamma)(t), 0) = (\Phi \circ f)(f^{-1} \circ \gamma(t)) = (\Phi \circ \gamma)(t).$$

Ce qui montre que $f^{-1} \circ \gamma$ est lisse. On a donc

$$\gamma'(0) = (f \circ (f^{-1} \circ \gamma))'(0) = D_x f(f^{-1} \circ \gamma)'(0).$$

Ce qui donne l'inclusion réciproque.

2) Les espaces $D_{x_0} f(\mathbf{R}^d)$ et $\ker D_p h$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ de même dimension d.

Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$. D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de p tel que, pour tout x proche de x_0, $\Phi \circ f(x) = (x, 0)$.
Comme f^{-1} est continue, pour t proche de 0, $f^{-1}(\gamma(t))$ est proche de x_0 et donc

$$((f^{-1} \circ \gamma)(t), 0) = (\Phi \circ f)(f^{-1} \circ \gamma(t)) = (\Phi \circ \gamma)(t).$$

Ce qui montre que $f^{-1} \circ \gamma$ est lisse. On a donc

$$\gamma'(0) = (f \circ (f^{-1} \circ \gamma))'(0) = D_x f(f^{-1} \circ \gamma)'(0).$$

Ce qui donne l'inclusion réciproque.

2) Les espaces $D_{x_0} f(\mathbf{R}^d)$ et $\ker D_p h$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ de même dimension d. Il suffit donc de montrer une inclusion pour avoir égalité.

Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$. D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de p tel que, pour tout x proche de x_0, $\Phi \circ f(x) = (x, 0)$.
Comme f^{-1} est continue, pour t proche de 0, $f^{-1}(\gamma(t))$ est proche de x_0 et donc

$$((f^{-1} \circ \gamma)(t), 0) = (\Phi \circ f)(f^{-1} \circ \gamma(t)) = (\Phi \circ \gamma)(t).$$

Ce qui montre que $f^{-1} \circ \gamma$ est lisse. On a donc

$$\gamma'(0) = (f \circ (f^{-1} \circ \gamma))'(0) = D_x f(f^{-1} \circ \gamma)'(0).$$

Ce qui donne l'inclusion réciproque.

2) Les espaces $D_{x_0} f(\mathbf{R}^d)$ et $\ker D_p h$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ de même dimension d. Il suffit donc de montrer une inclusion pour avoir égalité.
Soit (I, γ) un arc tracé sur M tel que $\gamma(0) = p$.

Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$. D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de p tel que, pour tout x proche de x_0, $\Phi \circ f(x) = (x, 0)$.
Comme f^{-1} est continue, pour t proche de 0, $f^{-1}(\gamma(t))$ est proche de x_0 et donc

$$((f^{-1} \circ \gamma)(t), 0) = (\Phi \circ f)(f^{-1} \circ \gamma(t)) = (\Phi \circ \gamma)(t).$$

Ce qui montre que $f^{-1} \circ \gamma$ est lisse. On a donc

$$\gamma'(0) = (f \circ (f^{-1} \circ \gamma))'(0) = D_x f(f^{-1} \circ \gamma)'(0).$$

Ce qui donne l'inclusion réciproque.

2) Les espaces $D_{x_0} f(\mathbf{R}^d)$ et $\ker D_p h$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ de même dimension d. Il suffit donc de montrer une inclusion pour avoir égalité.
Soit (I, γ) un arc tracé sur M tel que $\gamma(0) = p$. Pour tout $t \in I$ petit, on a $h(\gamma(t)) = c$ et donc

Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$. D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de p tel que, pour tout x proche de x_0, $\Phi \circ f(x) = (x, 0)$.
Comme f^{-1} est continue, pour t proche de 0, $f^{-1}(\gamma(t))$ est proche de x_0 et donc

$$((f^{-1} \circ \gamma)(t), 0) = (\Phi \circ f)(f^{-1} \circ \gamma(t)) = (\Phi \circ \gamma)(t).$$

Ce qui montre que $f^{-1} \circ \gamma$ est lisse. On a donc

$$\gamma'(0) = (f \circ (f^{-1} \circ \gamma))'(0) = D_x f(f^{-1} \circ \gamma)'(0).$$

Ce qui donne l'inclusion réciproque.

2) Les espaces $D_{x_0} f(\mathbf{R}^d)$ et $\ker D_p h$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ de même dimension d. Il suffit donc de montrer une inclusion pour avoir égalité.
Soit (I, γ) un arc tracé sur M tel que $\gamma(0) = p$. Pour tout $t \in I$ petit, on a $h(\gamma(t)) = c$ et donc $D_p h(\gamma'(0)) = 0$ ie $\gamma'(0) \in \ker D_p h$.

Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbf{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$. D'après la proposition 8, il existe un difféomorphisme Φ défini sur un voisinage de p tel que, pour tout x proche de x_0, $\Phi \circ f(x) = (x, 0)$.
Comme f^{-1} est continue, pour t proche de 0, $f^{-1}(\gamma(t))$ est proche de x_0 et donc

$$((f^{-1} \circ \gamma)(t), 0) = (\Phi \circ f)(f^{-1} \circ \gamma(t)) = (\Phi \circ \gamma)(t).$$

Ce qui montre que $f^{-1} \circ \gamma$ est lisse. On a donc

$$\gamma'(0) = (f \circ (f^{-1} \circ \gamma))'(0) = D_x f(f^{-1} \circ \gamma)'(0).$$

Ce qui donne l'inclusion réciproque.

2) Les espaces $D_{x_0} f(\mathbf{R}^d)$ et $\ker D_p h$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ de même dimension d. Il suffit donc de montrer une inclusion pour avoir égalité.
Soit (I, γ) un arc tracé sur M tel que $\gamma(0) = p$. Pour tout $t \in I$ petit, on a $h(\gamma(t)) = c$ et donc $D_p h(\gamma'(0)) = 0$ ie $\gamma'(0) \in \ker D_p h$.$\square$

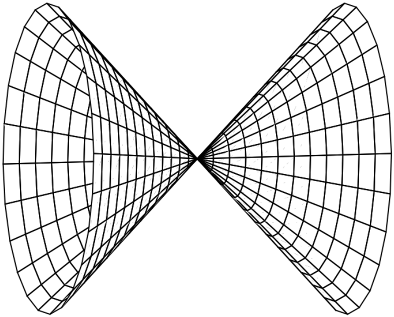
Exemple 20

– On montre facilement que pour tout $p \in S^n$, $T_pS^n = p^\perp$.

Exemple 20

– On montre facilement que pour tout $p \in S^n$, $T_pS^n = p^\perp$.

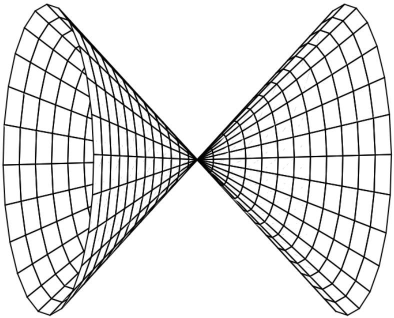
– Soit C le cône défini par $C = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.



Exemple 20

– On montre facilement que pour tout $p \in S^n$, $T_pS^n = p^\perp$.

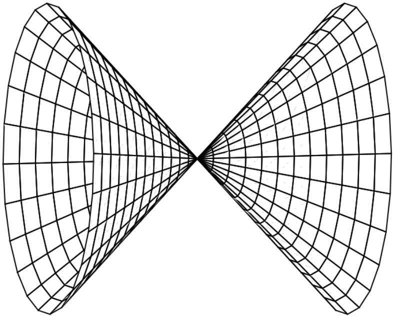
– Soit C le cône défini par $C = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.
Il y a surement un problème en O mais comment le prouver ?



Exemple 20

– On montre facilement que pour tout $p \in S^n$, $T_p S^n = p^\perp$.

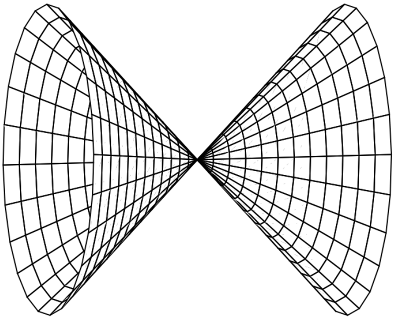
– Soit C le cône défini par $C = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.
Il y a surement un problème en O mais comment le prouver ?
Si C était une sous-variété alors les vecteurs $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,\sqrt{2})$ seraient des éléments de $T_0 C$.



Exemple 20

– On montre facilement que pour tout $p \in S^n$, $T_pS^n = p^\perp$.

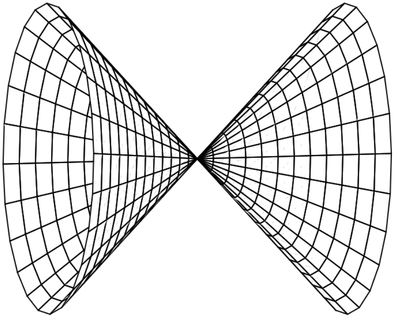
– Soit C le cône défini par $C = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.
Il y a surement un problème en O mais comment le prouver ?
Si C était une sous-variété alors les vecteurs $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,\sqrt{2})$ seraient des éléments de T_0C.
Mais alors T_0C et donc C seraient de dimension 3 et donc C serait un ouvert de $\mathbf{R}^3$.



Exemple 20

– On montre facilement que pour tout $p \in S^n$, $T_pS^n = p^\perp$.

– Soit C le cône défini par $C = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.
Il y a surement un problème en O mais comment le prouver ?
Si C était une sous-variété alors les vecteurs $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,\sqrt{2})$ seraient des éléments de T_0C.
Mais alors T_0C et donc C seraient de dimension 3 et donc C serait un ouvert de $\mathbf{R}^3$. Ce qui est faux donc C n'est pas une sous-variété.



L'espace tangent tel qu'on l'a défini est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension d : il ne passe pas par p.

L'espace tangent tel qu'on l'a défini est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension d : il ne passe pas par p. Le tangent « appuyé » sur M est le suivant.

L'espace tangent tel qu'on l'a défini est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension d : il ne passe pas par p. Le tangent « appuyé » sur M est le suivant.

Définition 21

On définit $T_p^A M$ le plan affine tangent en p à M comme étant le plan affine de direction $T_p\Sigma$ passant par p.

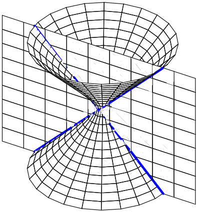
L'espace tangent tel qu'on l'a défini est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension d : il ne passe pas par p. Le tangent « appuyé » sur M est le suivant.

Définition 21

On définit $T_p^A M$ le plan affine tangent en p à M comme étant le plan affine de direction $T_p\Sigma$ passant par p.

Exercice 3

Soit l'hyperboloïde $\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\}$. Pour tout $p \in \mathcal{H}$, déterminer $T_p\mathcal{H}$ puis $T_p^A\mathcal{H}$. Déterminer $T_p^A\mathcal{H} \cap \mathcal{H}$.



Il est possible de faire du calcul différentiel sur les sous-variétés. Nous nous contenterons de la partie emergée de l'iceberg :

Théorème 22 (extrema liés)

Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur un voisinage de M.

Il est possible de faire du calcul différentiel sur les sous-variétés. Nous nous contenterons de la partie emergée de l'iceberg :

Théorème 22 (extrema liés)

Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur un voisinage de M. Si $p \in M$ est tel que $F(p)$ est un extremum local de $F|_M$, alors $D_pF|_{T_pM} = 0$.

Il est possible de faire du calcul différentiel sur les sous-variétés. Nous nous contenterons de la partie emergée de l'iceberg :

Théorème 22 (extrema liés)

Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur un voisinage de M. Si $p \in M$ est tel que $F(p)$ est un extremum local de $F|_M$, alors $D_pF|_{T_pM} = 0$. En particulier si $h = (h^1, \ldots, h^{n-d})$ est une submersion telle que $h^{-1}(0) = M$ alors

$$\exists(\lambda_1, \ldots \lambda_{n-p}) \in \mathbf{R}^{n-d},\ \lambda_1 D_p h^1 + \cdots + \lambda_{n-d} D_p h^{n-d} = D_p F.$$

Il est possible de faire du calcul différentiel sur les sous-variétés. Nous nous contenterons de la partie emergée de l'iceberg :

Théorème 22 (extrema liés)

Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur un voisinage de M. Si $p \in M$ est tel que $F(p)$ est un extremum local de $F|_M$, alors $D_pF|_{T_pM} = 0$. En particulier si $h = (h^1, \dots, h^{n-d})$ est une submersion telle que $h^{-1}(0) = M$ alors

$$\exists(\lambda_1, \dots \lambda_{n-p}) \in \mathbf{R}^{n-d},\ \lambda_1 D_p h^1 + \cdots + \lambda_{n-d} D_p h^{n-d} = D_p F.$$

Les réels λ_i sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

Il est possible de faire du calcul différentiel sur les sous-variétés. Nous nous contenterons de la partie emergée de l'iceberg :

Théorème 22 (extrema liés)

Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur un voisinage de M. Si $p \in M$ est tel que $F(p)$ est un extremum local de $F|_M$, alors $D_pF|_{T_pM} = 0$. En particulier si $h = (h^1, \dots, h^{n-d})$ est une submersion telle que $h^{-1}(0) = M$ alors

$$\exists(\lambda_1, \dots \lambda_{n-p}) \in \mathbf{R}^{n-d},\ \lambda_1 D_p h^1 + \cdots + \lambda_{n-d} D_p h^{n-d} = D_p F.$$

Les réels λ_i sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

Preuve : Soit $p \in M$ tel que $F(p)$ soit un extremum local de $F|_M$ et $v \in T_pM$.

Il est possible de faire du calcul différentiel sur les sous-variétés. Nous nous contenterons de la partie emergée de l'iceberg :

Théorème 22 (extrema liés)

Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur un voisinage de M. Si $p \in M$ est tel que $F(p)$ est un extremum local de $F|_M$, alors $D_pF|_{T_pM} = 0$. En particulier si $h = (h^1, \dots, h^{n-d})$ est une submersion telle que $h^{-1}(0) = M$ alors

$$\exists(\lambda_1, \dots \lambda_{n-p}) \in \mathbf{R}^{n-d},\ \lambda_1 D_p h^1 + \dots + \lambda_{n-d} D_p h^{n-d} = D_p F.$$

Les réels λ_i sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

Preuve : Soit $p \in M$ tel que $F(p)$ soit un extremum local de $F|_M$ et $v \in T_pM$. Soit (I, γ) un arc tracé sur M tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$.

Il est possible de faire du calcul différentiel sur les sous-variétés. Nous nous contenterons de la partie emergée de l'iceberg :

Théorème 22 (extrema liés)

Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur un voisinage de M. Si $p \in M$ est tel que $F(p)$ est un extremum local de $F|_M$, alors $D_pF|_{T_pM} = 0$. En particulier si $h = (h^1, \dots, h^{n-d})$ est une submersion telle que $h^{-1}(0) = M$ alors

$$\exists(\lambda_1, \dots \lambda_{n-p}) \in \mathbf{R}^{n-d},\ \lambda_1 D_p h^1 + \cdots + \lambda_{n-d} D_p h^{n-d} = D_p F.$$

Les réels λ_i sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

Preuve : Soit $p \in M$ tel que $F(p)$ soit un extremum local de $F|_M$ et $v \in T_pM$. Soit (I, γ) un arc tracé sur M tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$. La fonction $F \circ \gamma$ a un extremum local en 0 donc $(F \circ \gamma)'(0) = 0$.

Il est possible de faire du calcul différentiel sur les sous-variétés. Nous nous contenterons de la partie emergée de l'iceberg :

Théorème 22 (extrema liés)

Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur un voisinage de M. Si $p \in M$ est tel que $F(p)$ est un extremum local de $F|_M$, alors $D_pF|_{T_pM} = 0$. En particulier si $h = (h^1, \dots, h^{n-d})$ est une submersion telle que $h^{-1}(0) = M$ alors

$$\exists(\lambda_1, \dots \lambda_{n-p}) \in \mathbf{R}^{n-d},\ \lambda_1 D_p h^1 + \cdots + \lambda_{n-d} D_p h^{n-d} = D_p F.$$

Les réels λ_i sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

Preuve : Soit $p \in M$ tel que $F(p)$ soit un extremum local de $F|_M$ et $v \in T_pM$. Soit (I, γ) un arc tracé sur M tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$. La fonction $F \circ \gamma$ a un extremum local en 0 donc $(F \circ \gamma)'(0) = 0$. Or $(F \circ \gamma)'(0) = D_pF(v)$,

Il est possible de faire du calcul différentiel sur les sous-variétés. Nous nous contenterons de la partie emergée de l'iceberg :

Théorème 22 (extrema liés)

Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur un voisinage de M. Si $p \in M$ est tel que $F(p)$ est un extremum local de $F|_M$, alors $D_pF|_{T_pM} = 0$. En particulier si $h = (h^1, \dots, h^{n-d})$ est une submersion telle que $h^{-1}(0) = M$ alors

$$\exists(\lambda_1, \dots \lambda_{n-p}) \in \mathbf{R}^{n-d}, \ \lambda_1 D_p h^1 + \cdots + \lambda_{n-d} D_p h^{n-d} = D_p F.$$

Les réels λ_i sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

Preuve : Soit $p \in M$ tel que $F(p)$ soit un extremum local de $F|_M$ et $v \in T_pM$. Soit (I, γ) un arc tracé sur M tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$. La fonction $F \circ \gamma$ a un extremum local en 0 donc $(F \circ \gamma)'(0) = 0$. Or $(F \circ \gamma)'(0) = D_pF(v)$, par conséquent la restriction de D_pF à T_pM est nulle, ie $T_pM \subset \ker DF(p)$.

Soit L l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n-d+1}$ définie par

$$L(v) = (D_pF(v), D_ph(v)).$$

Soit L l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n-d+1}$ définie par

$$L(v) = (D_p F(v), D_p h(v)).$$

Clairement $T_p M \subset \ker(L)$ et donc $\mathrm{rg}(L) \leq n - d$.

Soit L l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n-d+1}$ définie par

$$L(v) = (D_pF(v), D_ph(v)).$$

Clairement $T_pM \subset \ker(L)$ et donc $\mathrm{rg}(L) \leq n - d$.

La famille de formes linéaires $\{D_ph^1, \dots, D_ph^{n-d}, D_pF\}$ (les vecteurs lignes de la matrice de L) est donc liée.

Soit L l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n-d+1}$ définie par

$$L(v) = (D_pF(v), D_ph(v)).$$

Clairement $T_pM \subset \ker(L)$ et donc $\mathrm{rg}(L) \leq n-d$.

La famille de formes linéaires $\{D_ph^1, \dots, D_ph^{n-d}, D_pF\}$ (les vecteurs lignes de la matrice de L) est donc liée.
Il existe donc des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-d}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 D_pF + \sum_i \lambda_i D_ph^i = 0.$$

Soit L l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n-d+1}$ définie par

$$L(v) = (D_pF(v), D_ph(v)).$$

Clairement $T_pM \subset \ker(L)$ et donc $\mathrm{rg}(L) \leq n-d$.

La famille de formes linéaires $\{D_ph^1, \ldots, D_ph^{n-d}, D_pF\}$ (les vecteurs lignes de la matrice de L) est donc liée.
Il existe donc des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-d}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 D_pF + \sum_i \lambda_i D_ph^i = 0.$$

Comme la famille $\{D_ph^i, 1 \leq i \leq n-d\}$ est libre (ie D_ph est surjective), forcément $\lambda_0 \neq 0$, on peut donc supposer que $\lambda_0 = -1.\square$

Définition 23

Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur un voisinage de M. Un point $p \in M$ tel que $DF(p)|_{T_pM} = 0$ est appelé un point critique de $F|_M$.

Ainsi, le théorème 22 dit que, comme toujours, les extrema locaux de $F|_M$ se trouvent en les points critiques de $F|_M$.

Lorsque F est une submersion, les niveaux de F sont des sous-variétés et les points critiques de $F|_M$ sont les points p où $T_pM \subset T_p(F^{-1}(F(p)))$.

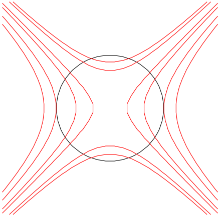


FIGURE – la sous-variété S^1 et quelques niveaux de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$

Pour finir deux applications du théorème des extrema liés :

Pour finir deux applications du théorème des extrema liés :

Exercice 4

Soit M une sous-variété compacte de $\mathbf{R}^n$ de codimension 1. Montrer que pour tout hyperplan P de $\mathbf{R}^n$, il existe $p \in M$ tel que $T_pM = P$.

Pour finir deux applications du théorème des extrema liés :

Exercice 4

Soit M une sous-variété compacte de $\mathbf{R}^n$ de codimension 1. Montrer que pour tout hyperplan P de $\mathbf{R}^n$, il existe $p \in M$ tel que $T_pM = P$.

Exercice 5

Soit L une matrice symétrique d'ordre n et F la forme quadratique qui lui est associée, i.e. $F(x) = {}^t xLx$. Déduire de l'étude de $F|_{S^{n-1}}$ que L admet un vecteur propre v. Montrer que $L(v^\perp) = v^\perp$ et en déduire que L est diagonalisable.

Pour finir deux applications du théorème des extrema liés :

Exercice 4

Soit M une sous-variété compacte de $\mathbf{R}^n$ de codimension 1. Montrer que pour tout hyperplan P de $\mathbf{R}^n$, il existe $p \in M$ tel que $T_pM = P$.

Exercice 5

Soit L une matrice symétrique d'ordre n et F la forme quadratique qui lui est associée, i.e. $F(x) = {}^t x L x$. Déduire de l'étude de $F|_{S^{n-1}}$ que L admet un vecteur propre v. Montrer que $L(v^\perp) = v^\perp$ et en déduire que L est diagonalisable.

On peut aussi regarder l'exercice sur le jeu de billard dans une ellipse du *Petit guide du calcul différentiel* de Rouvière.