Chapitre 2

Nappes et sous-variétés.

2.1 Rappels de calcul différentiel (sans preuve)

On notera $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.On rappelle que la base canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est formée des applications $E_{i,j}$ définies par $E_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k} e'_j$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $(e'_1, \dots, e'_p)$ celle de $\mathbb{R}^p$ et $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker.

Définition 2.1.1 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$. On dit que f est différentiable en $x \in U$ s'il existe une application linéaire dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ (la différentielle de f en x) notée $Df(x)$ telle que*

$$\|f(x+h) - f(x) - Df(x).h\| = o(\|h\|).$$

L'application $h \mapsto f(x) + Df(x).h$ est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x.

La matrice de $Df(x)$ dans la base canonique est la *jacobienne* de f au point x, elle est notée $J_f(x)$ et

$$J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le n}}.$$

Lorsque f est différentiable en tous points de U, on définit la différentielle de f : $Df : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. On dit que f est de classe C^1 si Df est continue. L'application Df est continue si et seulement si ses composantes sont continues c.-à-d. si pour tout (i,j) l'application $x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ est continue.

On définit par récurrence les dérivées d'ordre supérieur :

Une application f est k fois différentiable en x si sa différentielle d'ordre $k-1$ est différentiable en x.On note $D^k f(x)$ cette différentielle. On voit que $D^k f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \dots, (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)) \dots)$ qui est isomorphe à l'espace des application k-linéaires de $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ (k fois) dans $\mathbb{R}^p$. La différentielle d'ordre k, notée $D^k f$ est donc l'application qui à x associe $D^k f(x)$. Les composantes de $D^k f(x)$ sont les dérivées partielles d'ordre k, c.-à-d. les $\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x)$.

Si $k = 2$, l'application f est deux fois différentiable en x si elle est différentiable en tout points d'un voisinage de x et si l'application Df à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est différentiable en x.

Proposition 2.1.2 *Soit $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^p$.*

Si f est k fois différentiable en x alors pour tout permutation σ, on a

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x) = \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_{\sigma(1)}} \dots \partial x_{j_{\sigma(k)}}}.$$

L'application f est de classe C^k si et seulement si pour tout $(j_1, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$ l'application $x \mapsto \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}}(x)$ est définie et continue sur U.

On dit que f est lisse (ou de classe C^∞) si elle est de classe C^k pour tout k. Exemple important : l'application $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ définie par $M \mapsto M^{-1}$ est lisse (indication : utiliser que $\det(M)M^{-1}$ est égal à la transposée de la matrice des cofacteurs).

Définition 2.1.3 *L'application $f : \mathbb{R}^n \supset U \to V \subset \mathbb{R}^p$ est un difféomorphisme si f est une bijection, f et f^{-1} sont partout différentiables.*

En géométrie différentielle on voit deux objets permutés par un difféomorphismes comme étant « les mêmes. » On verra donc souvent un difféomorphisme comme un changement de coordonnées (on pensera aux coordonnées polaires, sphériques, cylindriques et autres).

Exercice 1 Soit $f : U \to V$ un difféomorphisme. Montrer que si f est lisse alors f^{-1} l'est aussi. [on commencera par montrer que $Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$.]

Tout ce chapitre s'appuie sur le résultat suivant :

Théorème 2.1.4 *Soient $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, et $x \in U$. Si $Df(x)$ est inversible (c.-à-d. si $\det(J_j(x)) \neq 0$) alors il existe un ouvert V contenant x tel que la restriction de f à V est un difféomorphisme sur son image (c.-à-d. vu comme une application à valeurs dans $f(V)$).*

Exercice 2 *Le groupe linéaire n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit.*

Rappelons que la série $(\sum_m \frac{M^m}{m!})_{m\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de n'importe quelle norme. Elle définit ainsi une fonction lisse appelée *exponentielle* et notée exp.

1) Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent, alors

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

   On pourra s'intéresser au système différentiel linéaire $y' = (A + B)y$.

2) Montrer que la fonction exponentielle est à valeurs dans l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

3) Prouver l'existence d'un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de la matrice nulle 0_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de la matrice identité Id_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre eux.

4) A partir de maintenant, quitte à restreindre $\mathcal{U}$, nous supposons $\mathcal{U}$ borné et posons $\mathcal{U}' = 1/2 \cdot \mathcal{U}$.

   Montrer que pour toute matrice $P \in \mathcal{U}' \setminus \{0_N\}$ il existe un entier $k \geq 1$ tel que $kP \in \mathcal{U}'$ et $(k + 1)P \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'$

5) Soit $\mathcal{V}' = \exp(\mathcal{U}')$. Prouver que pour tout $M \in \mathcal{V}' \setminus \{\mathrm{Id}_N\}$ il existe un entier $k \geq 1$ tel que $M^k \notin \mathcal{V}'$ (utilisez l'injectivité de l'exponentielle sur $\mathcal{U}$).

6) Conclure en exprimant en termes mathématiques le titre de l'exercice.

2.2 Nappes.

Après les courbes on voudrait étudier les surfaces ou des objets de dimension plus grande. On se propose, pour commencer, d'étudier les applications lisses de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $d < n$ sur le modèle de l'étude des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ effectuée au chapitre 1. Pour se limiter un champ d'étude raisonnable, on commence par se donner un analogue des arcs réguliers :

Définition 2.2.1 *1) Une application différentiable dont la différentielle en tout point est injective est appelée une* immersion.

2) On appelle nappe paramétrée de $\mathbb{R}^n$ de dimension d*, tout couple* (U, f) *où* U *est un ouvert connexe de* $\mathbb{R}^d$ *et* f *est une immersion lisse de* U *dans* $\mathbb{R}^n$*. Le sous-sensemble* $f(U)$ *est appelé le* support *de la nappe.*

3) On dit que deux nappes paramétrées (U, f) *et* (V, g) *définissent la même nappe (géométrique)* Σ *(ou parfois sont équivalents) s'il existe un difféomorphisme lisse* ψ *de* U *dans* V *tel que* $f = g \circ \psi$.

On dit alors que (U, f) *et* (V, g) *sont des systèmes de coordonnées sur (ou des paramétrages de)* Σ *et que* ψ *est un changement de coordonnées (ou de paramétrage).*

Les nappes de dimension 1 et les arcs réguliers sont les mêmes choses. Remarquons aussi que si $f : U \supset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ est une application différentiable alors la condition « f est une immersion » s'écrit aussi

$$\forall x \in U,\ \ker(Df(x)) = \{0\}$$
$$\text{ou}\quad \forall x \in U,\ \operatorname{rang}(J_f(x)) = d.$$

Remarquons enfin, qu'on a alors $d \le n$.

Exemples 2.2.2 — Si $f_0 : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$ est une application lisse définie sur $U \subset \mathbb{R}^d$, alors le graphe de f_0 est une nappe géométrique de dimension d de $\mathbb{R}^{d+q}$. On vérifie que l'application $f : U \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q \simeq \mathbb{R}^{d+q}$ définie par $x \mapsto (x, f_0(x))$ est une immersion lisse. Cette application est clairement lisse et pour tout $x \in U$ et tout $h \in \mathbb{R}^d$,

$$Df(x)(h) = (h, Df_0(x).h).$$

— En prenant $U = \mathbf{D}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f_0 définie par $f_0(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. On définit f par $f(x) = (f_0(x), x)$. D'après ce qui précède $(\mathbf{D}_2, f)$ définit une nappe. Son support est l'intersection de la sphère unité (notée S^2) et du demi-espace $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y_1 > 0\}$.

— Soit

$$g : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v), \end{array}$$

et

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbf{D}_2 & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (\arcsin(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_2^2}}), \arcsin x_2) \end{array}.$$

À nouveau pour voir que ψ est un difféomorphisme on exhibe la réciproque $\psi^{-1}(u, v) = (\cos v \sin u, \sin v)$.

On vérifie que $g \circ \psi(x_1, x_2) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2)$. Ce qui montre que $(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, g)$ est une nappe paramétrée équivalente à la nappe $(\mathbf{D}_2, f)$ donnée précédemment.

Chacune de ces applications définit des coordonnées sur la nappe qu'elles engendrent (on dira que p a pour coordonnées (x_1, x_2) dans les coordonnées définies par $(\mathbf{D}_2, f)$ si $p = f(x_1, x_2)$). Les coordonnées définies par $(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, g)$ sont bien connues : il s'agit de la lattitude et de la longitude.

On se demande maintenant à quoi ressemblent (au moins localement) les supports des nappes. Est ce que le support d'une nappe de dimension 2 ressemble bien à une surface c'est-à-dire à un bout de plan ? La réponse est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.2.3 *Soient d et n deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ une application lisse, et $a \in U$. Si $Df(a)$ est injective, alors $d \leq n$ et il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a, un ouvert W de $\mathbb{R}^n$, un difféomorphisme ϕ lisse de W sur son image tels que $f(V) \subset W$ et que pour tout $x \in V$ on a*

$$\phi(f(x_1, \ldots, x_d)) = (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0).$$

Autrement dit si f est lisse et $Df(a)$ est injective, il existe un changement local de coordonnées « à l'arrivée » qui rend f linéaire au voisinage de a. Ainsi l'image d'un petit voisinage de a ressemble à un bout de p-plan, plus précisément : au voisinage de $f(a)$, il existe des coordonnées dans lesquelles l'image d'un petit voisinage de a se lit comme un bout de plan de dimension p. Remarquons au passage que cela donne un sens précis à l'expression « ressembler à un bout de plan ».

Preuve : L'application $Df(a)$ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$. Le théorème du rang nous dit que $d \leq n$.

La jacobienne de f au point a possède d lignes linéairement indépendantes, quitte à permuter les coordonnées de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^n$ (ce qui revient à composer à gauche par un premier difféomorphisme), on peut supposer que ce sont les d premières. Autrement dit on peut supposer

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} A \\ * \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq \mathbf{d} \\ 1 \leq j \leq d}}$$

avec A inversible (et carrée).

On définit alors g sur $U \times \mathbb{R}^{n-d}$ par

$$g(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots y_{n-d}) = (f^1(x), \ldots f^d(x), y^1 + f^{d+1}(x), \ldots, y_{n-d} + f^n(x)).$$

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible. On peut donc appliquer le <u>théorème d'inversion locale</u>. Il existe donc un voisinage $\widetilde{V}$ de $\bar{a}$ tel que la restriction de g à $\widetilde{V}$ est un difféomorphisme lisse sur $W = g(\widetilde{V})$. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $V \times \{0\} \subset \widetilde{V}$. On pose $\phi = (g|_{\widetilde{V}})^{-1}$. Pour tout $x \in V$, $f(x) = g(x, 0) \in W$ et $(x, 0) \in \widetilde{V}$ donc $\phi(f(x)) = (x, 0)$.$\square$

Exemples 2.2.4 Si la nappe est un graphe i.e. si elle admet un paramétrage (U, f) avec $f(x) = (x, f_0(x))$, on peut la redresser globalement. En effet (en gardant les notations de la preuve), on a $g(x, y) = (x, y + f(x))$. On voit que g est un difféomorphisme de $U \times \mathbb{R}^{n-d}$ dans lui-même dont l'inverse est $\phi(u, v) = (u, v - f(u))$.

Un tel redressement n'est pas unique. En composant par des difféomorphismes laissant fixe $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ on en construit d'autres. Ainsi l'application définie sur D_2 par $x \mapsto (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x)$ vue plus haut est aussi redressée par

$$\begin{array}{rcl} \psi : \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 |\, y_1 > 0\} & \to & \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, e^{2z_1} - z_2^2 - z_3^2 > 0\} \\ (y_1, y_2, y_3) & \mapsto & (\log \|y\|, y_2, y_3). \end{array}$$

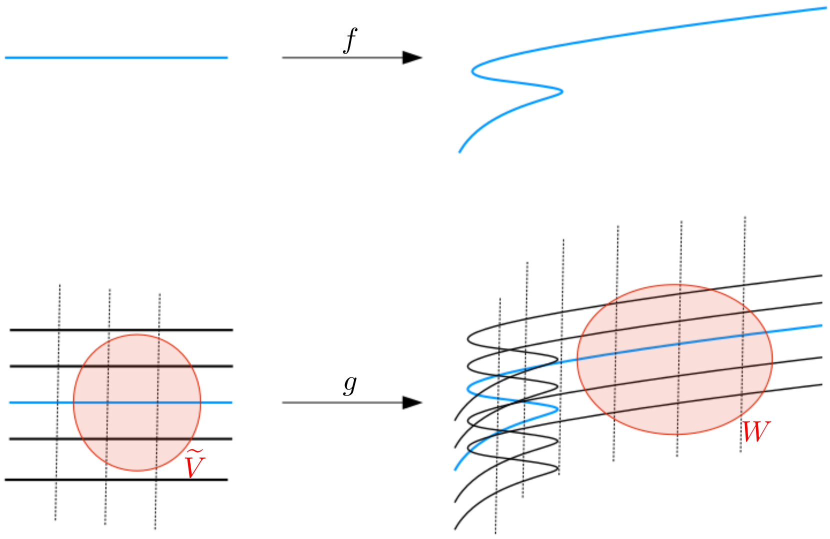

FIGURE 2.1 – La preuve de la proposition 2.2.3 en dessin. Il est clair que $g|_{\widetilde{V}}^{-1} \circ f$ envoie le segment bleu du haut sur celui du bas.

Pour voir que ψ est un difféomorphisme, on montre que $\psi^{-1}(z_1, z_2, z_3)) = (\sqrt{e^{2z_1} - z_2^2 - z_3^2}, z_2, z_3)$. On vérifie que $\psi \circ f(x) = (0, x_1, x_2)$.

Il existe une famille de nappes plus agréables que les autres :

Définition 2.2.5 *Une nappe Σ est dite plongée s'il existe sur Σ un système de coordonnées (U, f) tel que f est injective et $f^{-1} : f(U) \to U$ est continue*[1] *(autrement dit f est un homéomorphisme sur son image).*

Remarquons que cette propriété ne dépend pas du paramétrage choisit.

Exemples 2.2.6
- Les graphes sont toujours des nappes plongées. En effet, si $f(x) = (x, f_0(x))$ alors f^{-1} peut être vu comme la restriction à $f(U)$ de l'application $(x, y) \mapsto x$. Elle est donc continue.
- Si on définit les coordonnées géographiques $(u, v) \mapsto (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$ sur tout $]-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[$, la nappe obtenue est aussi plongée.
- La proposition 2.2.3 dit aussi que tout $x \in U$ possède un voisinage V tel que $(V, f|_V)$ est une nappe plongée.
- La condition f injective n'est pas suffisante. Soit $(]-1, +\infty[, f)$ avec $f(t) = (\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3})$, le (demi)folium de Descartes (voir figure 2.2). L'application f est immersion injective (on a donc bien affaire à une nappe sans points doubles) mais $\lim_{t \to +\infty} f(t) = (0, 0) = f(0)$. Ainsi $\|f(t_n) - f(0)\| \to 0$ n'implique pas $t_n \to 0$; f^{-1} n'est donc pas continue et cette nappe n'est pas plongée.

La proposition suivante explique en quoi une nappe plongée est plus sympathique.

Proposition 2.2.7 *Soient (U, f) et (V, g) deux nappes paramétrées ayant même support. Si (U, f) et (V, g) sont plongées*[2]*, alors elles sont équivalentes.*

1. Il est sous-entendu ici que $f(U)$ est muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$.
2. On pourrait se contenter de supposer (V, g) plongée et f seulement injective et affiner la preuve

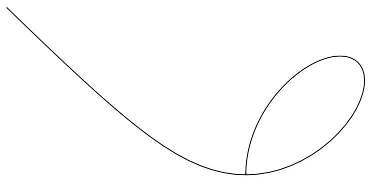

FIGURE 2.2 – Le folium de Descartes

Preuve. Comme (V, g) est plongée l'application $g^{-1} \circ f$ qui va de U dans V est bien définie et continue. L'application f étant injective cette application est de plus une bijection. Il s'agit de montrer qu'il s'agit d'un difféomorphisme lisse.

Soient $x_0 \in U$ et $y_0 = g^{-1} \circ f(x_0)$. D'après la proposition 2.2.3, il existe V_0 un ouvert de V contenant y_0, W un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme ϕ de W sur son image tels que $g(V_0) \subset W$ et pour tout $y \in V_0$, on a $\phi(g(y)) = (y, 0)$.

Soit $U_0 = (g^{-1} \circ f)^{-1}(V_0)$. Comme $g^{-1} \circ f$ est continue, cet ensemble est un voisinage ouvert de x_0. Comme $f(U_0) \subset W$, l'application $\phi \circ f|_{U_0}$ est bien définie et lisse. De plus, pour tout $x \in U_0$, $\phi \circ f(x) = (g^{-1} \circ f(x), 0)$. En composant par la projection sur le premier terme (qui est lisse), on en déduit que $g^{-1} \circ f$ est lisse en x_0.

On a montré que $g^{-1} \circ f$ est lisse. Par symétrie, il en est de même pour $f^{-1} \circ g$, ce qui termine la preuve.□

Cette proposition dit qu'*être une nappe plongée est une propriété du support de la nappe*, ce qui est bien plus pratique.

2.3 Des nappes aux sous-variétés.

Il se trouve que la notion de nappe est trop limitée. Par exemple, on n'arrive pas à voir *toute* la sphère comme (le support de) une nappe. Et on ne voudrait pas exclure la sphère de notre domaine d'étude...Mais la sphère a une propriété agréable : tout point sur la sphère à un voisinage qui est le support d'une nappe. On va s'interesser aux objets qui partagent cette propriété.

Définition 2.3.1 *On dit qu'un sous-ensemble M de $\mathbb{R}^n$ est une* sous-variété *de dimension d (ou de codimension $n - d$) de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω contenant p et une nappe plongée (U, f) de dimension d telle que $f(U) = M \cap \Omega$.*
Les nappes (U, f) sont alors appelées des systèmes de coordonnées locales *de M.*

Notre remarque ci-dessus peut donc se réécrire en : la sphère S^2 est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

On voudrait tester cette nouvelle définition sur différents sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ (disons pour $n = 2$ ou 3) pour se faire une meilleure idée de ce qui est et de ce qui n'est pas une sous-variété. Bien souvent un tel sous-ensemble est donné par une équation (toute comme $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$) et il n'est pas toujours possible de trouver explicitement un paramétrage local d'un ensemble donné par une équation. Pour contourner cette difficulté, on cherche ce qu'est une « bonne équation ».

Définition 2.3.2 *Une application différentiable f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$ dont la différentielle en tout point est surjective est appelé une* submersion. *Autrement dit f est une submersion si*

$$\forall x \in U,\ \operatorname{rg}(Df(x)) = q,$$

où $\operatorname{rg}(Df(x)$ *désigne le rang de* $Df(x)$.

La proposition 2.2.3 a effectivement un analogue :

Proposition 2.3.3 *Soient n et q deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^q$ une application lisse, et $a \in U$. Si $Df(a)$ est surjective, alors $n \geq q$ et il existe un ouvert W contenant a et un difféomorphisme lisse ϕ de W sur son image tels que $\phi(W) \subset U$ et que pour tout $x \in W$ on a*

$$f(\phi(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_q).$$

Preuve : L'application $Df(a)$ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$. Le théorème du rang nous dit que $q \leq n$.

Par hypothèse, la jacobienne de f au point a est de rang q. Permuter les coordonnées de $\mathbb{R}^n$ (au départ donc), revient à permuter les colonnes de $J_f(a)$. On peut supposer que les q premières colonnes engendrent $\mathbb{R}^q$. La matrice B définie par

$$B = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{1\leq i\leq q \\ 1\leq j\leq q}}$$

est alors inversible (et on a $J_f(a) = (B\ \ *)$).

On définit alors $g : U \to \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$ par $g(x) = (f^1(x), \ldots f^q(x), x_{q+1}, \ldots, x_n)$.
Cette fonction est lisse et sa jacobienne en a est de la forme

$$\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale. Il existe ainsi un voisinage V de a tel que la restriction de g à V est un difféomorphisme lisse sur $W = g(V)$. On pose $\phi = (g|_V)^{-1}$. Pour tout $x \in W$, $f \circ \phi(x) = (x_1, \ldots, x_q)$.

Remarquons pour plus tard que, vu l'expression de g, il existe une application lisse $F : W \to \mathbb{R}^q$ telle que $\phi(u, v) = (F(u, v), v)$, pour tout $(u, v) \in W$. □

Autrement dit si $Df(a)$ est surjective, il existe un changement local de coordonnées « au départ » qui rend f linéaire. En particulier, si $Df(a)$ est surjective et $f(a) = 0$, alors il existe un voisinage U de a tel que $f^{-1}(0) \cap U$ ressemble à un bout de $(n-q)$-plan... On devine ainsi qu'il existe différentes définitions équivalentes de ce qu'est une sous-variété.

Théorème 2.3.4 *Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) *M est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ (voir définition 2.3.1)*
2) *pour tout $p \in M$ il existe Ω et Ω' voisinages ouverts de p et de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme lisse ϕ tel que $\phi(\Omega \cap M) = \Omega' \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$.*
3) *pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ contenant p et une submersion lisse $h : \Omega \to \mathbb{R}^{n-d}$ telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$.*
4) *Quitte à permuter les coordonnées de $\mathbb{R}^n$, pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω contenant p, une application lisse f_0 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{n-d}$ tels que $\Omega \cap M$ est le graphe de f_0 c'est-à-dire que $\Omega \cap M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \,|\, x \in U \text{ et } y = f_0(x)\}$.*

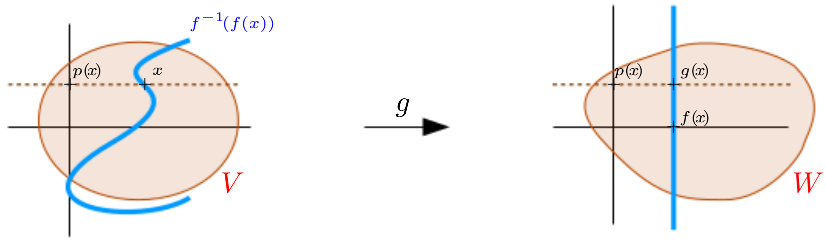

FIGURE 2.3 – La preuve de la proposition 2.3.3 en dessin. On a écrit $f(x)$ pour $(f(x), 0)$ pour des raisons de place. En suivant $y = g(x) \in W$, on voit que $f \circ g|_V^{-1}$ est la première projection. On voit aussi que $g|_V^{-1}$ exprime la courbe bleue comme un graphe au dessus du segment bleu, cf théorème 2.3.4.

Preuve :

1)$\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 2.2.3.

3) $\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 2.3.3.

4) $\Rightarrow$ 1) déjà vu cf. exemple 2.2.6.

3) $\Rightarrow$ 4), c'est exactement le théorème des fonctions implicites !

Soit h la submersion définie au voisinage de p telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$, donnée par 3) et soit $\phi : W \to V \ni p$ un difféomorphisme qui redresse h au voisinage de p donné par la proposition 2.3.3. Soit U la projection sur $\mathbb{R}^d$ de $\{0\} \times \mathbb{R}^d \cap V$. Clairement $h(x) = 0$ si et seulement s'il existe $v \in U$ tel que $x = \phi(0, v)$. On a vu que, quitte à permutter les coordonnées, il existe $F : W \to \mathbb{R}^{n-d}$ lisse telle que $\phi(u, v) = (F(u, v), v)$. Par conséquent $h^{-1}(0) \cap V = M \cap V$ est le graphe de l'application lisse $f_0 : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ définie par $f_0(v) = F(0, v)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Soit $p \in M$ et ϕ tel que défini en 2). Soit i l'application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $x \mapsto (x, 0)$. Il existe un ouvert U tel que $(U, \phi^{-1} \circ i)$ est bien définie et $p \in \phi^{-1} \circ i(U)$. L'application $\phi^{-1} \circ i$ est une immersion et $\phi^{-1} \circ i(U) \subset M$.

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et ϕ tel que défini en 2). Soit π la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ dans $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}$. L'application $h = \pi \circ \phi$ est une submersion définie sur Ω telle que $h^{-1}(0) = \Omega \cap M$.$\square$

On a utilisé le propriété suivante qui mérite d'être remarquée mais dont la preuve est laissée en exercice :

Propriété 2.3.5 *La composée de deux immersions (resp. de deux submersions) est une immersion (resp. une submersion).*

Exercice 3 Montrer directement (sans utiliser le théorème 2.3.4) que si M est le graphe d'une application lisse de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$ alors il existe une submersion lisse h de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$ telle que $M = h^{-1}(0)$.

Exercice 4 Montrer sans utiliser les propositions 2.2.3 et 2.3.3 que si f est lisse (de classe C^1 suffit) alors la propriété « $Df(x)$ est surjective (resp. injective) en x » est ouverte, c'est-à-dire si elle est vraie en x elle est vraie sur un voisinage de x.

Parmi ces critères certains sont plus pratiques pour montrer qu'un sous-ensemble M *est* une sous-variété (comme le troisième) et d'autres pour montrer que M *n'est pas* une sous-variété (comme le quatrième). Illustrons cela avec des exemples.

Exemples 2.3.6 – Considérons H l'hyperboloïde à une nappe, c'est à dire $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\}$. On considère la fonction lisse $h : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$. Pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, on a $Dh(x).\xi = 2x_1.\xi_1 + 2x_2\xi_2 - 2x_3\xi_3$. Cette application linéaire qui va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est surjective car $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$. L'application h est donc une submersion lisse. Ce qui entraine que H est donc une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

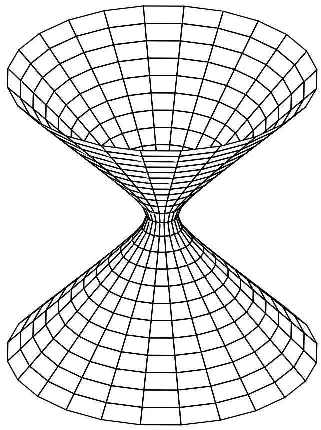

FIGURE 2.4 – Hyperboloïde à une nappe

– Soit $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^3 = 0\}$, la cubique cuspidale. . Si C était une sous variété, alors, au voisinage de 0, on pourrait voir C comme le graphe d'une fonction lisse. Il existerait donc deux réels positifs ε et η et une fonction $f_0 :]-\eta, \eta[\to \mathbb{R}$ tels que

$$\|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_1 = f_0(x_2) \quad \text{ou} \quad \|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_2 = f_0(x_1).$$

Dans le deuxième cas, on aurait $f_0(x_1) = (x_1^2)^{1/3}$ mais cette application n'est pas dérivable en 0. Dans le premier C contiendrait un point d'ordonnée strictement négative, ce qui n'est pas le cas. C n'est donc pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, par contre $C \setminus \{0\}$ en est une.

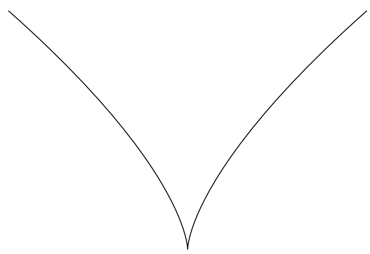

FIGURE 2.5 – Cubique cuspidale

– Le fait que l'application $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2^3$ n'est pas une surjection ne montre pas que C n'est pas une sous-variété (mais c'est tout de même un indice). Ainsi, on peut écrire $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^2 = 0\}$, l'application $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2 - 1)^2$ a une différentielle nulle le long de S^1, mais le cercle S^1 est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

Dans la suite M désignera une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et p un point de M.

2.4 Espace tangent, extrema liés.

Définition 2.4.1 *Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ appartient à T_pM, l'espace tangent en p à M, si et seulement s'il existe un arc (I, γ) tel que $\gamma(I) \subset M$ (on dit que γ est tracé sur M), que $\gamma(0) = p$ et que $\gamma'(0) = v$.*

Vu comme ça, il n'est pas clair du tout que cet espace soit plan. La proposition suivante, en plus de donner un moyen de calculer cet espace, éclairci ce point.

Proposition 2.4.2 *1) Si (U, f) est un système de coordonnées locales sur M tel que $f(0) = p$, alors*

$$T_pM = Df(0).\mathbb{R}^d.$$

En particulier, si M est le graphe de f_0 alors $T_{(x,f_0(x))}M$ est le graphe de $Df_0(x)$.

2) Si h est une submersion telle que $M \cap \Omega = h^{-1}(0)$, alors

$$T_pM = \ker Dh(p)$$

Preuve : 1) Pour tout $v \in R^p$, on sait que $Df(0).v = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(tv)$. Mais $t \mapsto f(tv)$ est un arc tracé sur M et donc $Df(0).v \in T_pM$.
Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbb{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$. D'après la proposition 2.2.3, il existe un difféomorphisme ϕ défini sur un voisinage de p tel que pour tout x proche de 0 $\phi \circ f(x) = (x, 0)$. Comme f^{-1} est continu, pour t proche de 0, $f^{-1}(\gamma(t))$ est proche de 0 et donc

$$((f^{-1} \circ \gamma)(t), 0) = (\phi \circ f)(f^{-1} \circ \gamma(t)) = (\phi \circ \gamma)(t).$$

Ce qui montre que $f^{-1} \circ \gamma$ est lisse. On a donc

$$\gamma'(0) = (f \circ (f^{-1} \circ \gamma))'(0) = Df(0).(f^{-1} \circ \gamma)'(0).$$

Ce qui donne l'inclusion réciproque.

2) Les espaces $Df(0).\mathbb{R}^d$ et $\ker Dh(p)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de même dimension. Il suffit donc de montrer une inclusion pour avoir égalité. Soit (I, γ) un arc tracé sur M dont l'image est incluse dans le domaine de définition de h et tel que $\gamma(0) = p$. Pour tout $t \in I$, on a $h(\gamma(t)) = 0$ et donc $Dh(p).\gamma'(0) = 0$ càd $\gamma'(0) \in \ker Dh(p)$. □

Exemples 2.4.3 – On montre facilement à partir de la proposition 2.4.2 que pour tout $p \in S^n$, $T_pS^n = p^\perp$.
– Soit C le cône défini par $C = \{((x_2, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$. Quand on voit C (par exemple sur la figure 2.6) on se dit qu'il y a surement un problème en O qui l'empêche d'être une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Comment le prouver ? La proposition 2.4.2 nous permet le raisonnement par l'absurde suivant :

Supposons que C soit une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Les chemins $t \mapsto t\,(1, 0, 1)$, $t \mapsto t\,(0, 1, 1)$ et $t \mapsto t\,(1, 1, \sqrt{2})$ étant tracés sur C, les vecteurs $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, \sqrt{2})$ seraient des éléments de T_0C. Mais ces vecteurs étant linéairement indépendants, T_0C et donc C seraient de dimension 3 et donc C serait un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Ce qui est faux donc C n'est pas une sous-variété.

L'espace tangent tel qu'on l'a défini est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d : il ne passe pas par p. Le tangent « appuyé » sur M est le suivant.

Définition 2.4.4 *On définit T_p^AM le plan affine tangent en p à M comme étant le plan affine de direction $T_p\Sigma$ passant par p.*

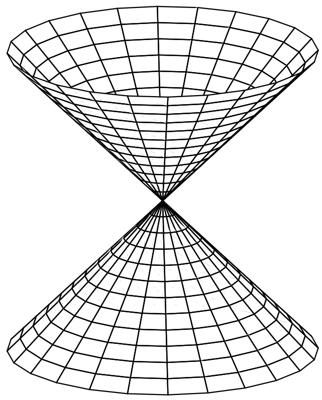

FIGURE 2.6 – Le cône

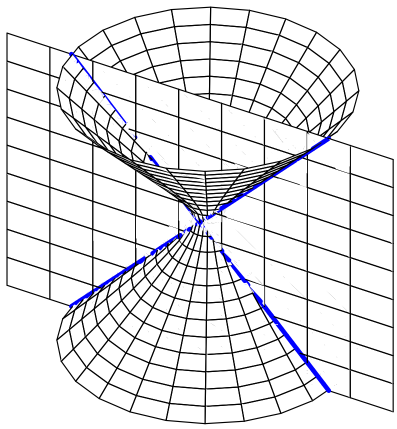

FIGURE 2.7 – L'hyperboloïde à une nappe et son tangent affine en $(1, 0, 0)$

Exercice 5 Soit l'hyperboloïde $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\}$. Pour tout $p \in H$, déterminer T_pH puis T_p^AH. Déterminer $T_p^AH \cap H$.

Il est possible de faire du calcul différentiel sur les sous-variétés. Cela dépasse hélas le cadre de ce cours. Nous nous contenterons de la partie emergée de l'iceberg : le théorème des extrema liés. Il dit simplement qu'une fonction dérivable à valeur dans $\mathbb{R}$ à sa différentielle qui s'annule en un extremum. Son originalité réside dans le fait que l'ensemble de départ est une sous-variété.

Théorème 2.4.5 (extrema liés) *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage de M. Si $p \in M$ est tel que $F(p)$ est un extremum local de $F|_M$, alors $DF(p)|_{T_pM} = 0$. En particulier si $h = (h^1, \dots, h^{n-d})$ est une submersion telle que $h^{-1}(0) = M$ alors*

$$\exists(\lambda_1, \dots \lambda_{n-p}) \in \mathbb{R}^{n-d},\ \lambda_1 Dh^1(p) + \cdots + \lambda_{n-d} Dh^{n-d}(p) = DF(p).$$

Les réels λ_i sont appelés les multiplicateurs de Lagrange*.*

Preuve : Soit $p \in M$ tel que $F(p)$ soit un extremum local de la restriction de F à M. Soit $v \in T_pM$ et (I, γ) un arc tracé sur M tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$. La fonction $F \circ \gamma$ a un extremum local en 0 donc $(F \circ \gamma)'(0) = 0$. Or $(F \circ \gamma)'(0) = DF(p).v$, on en déduit que la restriction de $DF(p)$ à T_pM est nulle, autrement dit que $T_pM \subset \ker DF(p)$.

Soit L l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-d+1}$ définie par $L(v) = (DF(p).v, Dh(p).v)$. Le noyau de L contient T_pM sa dimension est donc au moins d et son rang au plus $n-d$. Son rang est au moins égal à celui de $Dh(p)$ c'est-à-dire $n-d$. La famille de formes linéaires $\{Dh^1(p), \dots, Dh^{n-d}(p), DF(p)\}$ (les vecteurs lignes de la matrice de L) est donc liée. Il existe donc $(\lambda_0, \dots \lambda_{n-d}) \in \mathbb{R}^{n-d+1}$ tels que $\lambda_0 DF(p) + \sum_i \lambda_i Dh^i(p) = 0$. Comme la famille $\{Dh^i(p), 1 \leq i \leq n-d\}$ est libre, on a forcément $\lambda_0 \neq 0$, on peut donc supposer que $\lambda_0 = -1$.$\square$

Pour rendre cet énoncé plus familier, on pose la définition suivante :

Définition 2.4.6 *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage de M. Un point $p \in M$ tel que $DF(p)|_{T_pM} = 0$ est appelé un point critique de $F|_M$.*

Ainsi, le théorème 2.4.5 dit que, comme toujours, les extrema locaux de $F|_M$ se trouvent en les points critiques de $F|_M$.

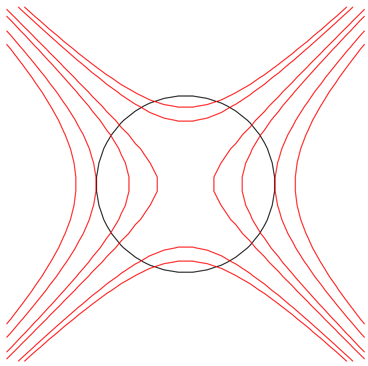

FIGURE 2.8 – la sous-variété S^1 et quelques niveaux de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$

Lorsque F est une submersion, on peut donner une interprétation géométrique. Dans ce cas, les niveaux de F sont des sous-variétés et les points critiques de $F|_M$ sont les points p où $T_pM \subset T_p(F^{-1}(F(p))$ (voir figure 2.8).

Le théorème des extrema liés a quelques classiques et jolies applications, comme celles qui suivent où celle sur le jeu de billard dans une ellipse que l'on trouvera dans le *Petit guide du calcul différentiel* de Rouvière.

Exercice 6 Soit M une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$ de codimension 1 (on dit une hypersurface). Montrer à l'aide du théorème 2.4.5 que l'application allant de M dans l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{R}^n$ et qui a un point de M associe l'espace tangent à M en ce point est surjective.

Exercice 7 Soit L une matrice symétrique d'ordre n et F la forme quadratique qui lui est associée, i.e. $F(x) = {}^t x L x$. Déduire de l'étude de $F|_{S^{n-1}}$ que L admet un vecteur propre v. Montrer que $L(v^\perp) = v^\perp$ et en déduire que L est diagonalisable.