Licence de Mathématiques, parcours mathématiques fondamentales
Université de Bordeaux

Géométrie Différentielle (4TMF602U) **30/04/2019** **durée : 3h00**

Épreuve de M. Mounoud Documents interdits, calculette homologuée autorisée

Questions indépendantes

1) *Montrer que 3 droites concourantes contenues dans une surface lisse de $\mathbb{R}^3$ sont forcément coplanaires.*

   Soit p le point de concours des droites. Les vecteurs directeurs de ces droites appartiennent au tangent en p à la surface (pourquoi ?). Les droites sont donc coplanaires.

2) *Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application lisse et $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin lisse. Démontrer que*

$$\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

   voir cours

Exercice 1

Les questions **I** *et* **II** *sont indépendantes.*

I. *Soit X le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2 = 1 \text{ et } y-xz = 0\}$.*

1) *Montrer que X est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?*

   Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x,y,z) = ((x-1)^2 + y^2 - 1, y - xz)$. Cette fonction est lisse, $h^{-1}(0,0) = X$ et

$$Jh_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 2x-2 & 2y & 0 \\ -z & 1 & -x \end{pmatrix}.$$

   Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ sur lequel h est une submersion ie sur lequel le rang de $Jh_{(x,y,z)}$ est égal à 2. Le rang de $Jh_{(x,y,z)}$ est différent de 2 si et seulement si

$$\begin{cases} x + yz = 1 \\ xy = 0 \\ x(x-1) = 0 \end{cases}$$

   c'est-à-dire si ($x = 0$ et $yz = 1$) ou si ($x = 1$, $y = 0$). Aucun ne vérifie $h(x,y,z) = (0,0)$. Donc $X \subset U$ et $X = h|_U^{-1}(0,0)$, comme $h|_U$ est une submersion, le cours nous dit que X est une sous-variété de dimension $3 - 2 = 1$.

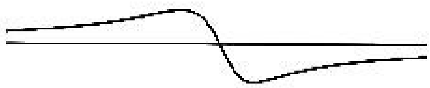
2) Donner une base de l'espace tangent à X en $(2,0,0)$.

$T_{(2,0,0)}X = \ker D_{(2,0,0)} = \mathrm{vect}\{(0,2,1)\}$.

3) Donner un paramétrage de $\{(x,y,z) \in X |\, x = 0\}$ et de $\{(x,y,z) \in X |\, x \neq 0\}$. Dessiner approximativement X.

$\{(x,y,z) \in X |\, x = 0\}$ se paramètre par $t \mapsto (0,0,z)$ avec $t \in \mathbb{R}$

$\{(x,y,z) \in X |\, x \neq 0\}$ se paramètre (par exemple) par $t \mapsto (1+\cos t, \sin t, \frac{\sin t}{1+\cos t}) = (x(t), y(t), z(t))$ avec $t \in]-\pi, \pi[$. La courbe $t \mapsto (x(t), y(t))$ est un cercle et la fonction $t \mapsto z(t)$ est strictement croissante de $-\infty$ vers $+\infty$. D'où le dessin (tourné) :



II.*Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y,z) = xyz$ et $\mathbf{S}$ la sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre 0 et de rayon 1. Déterminer les points critiques de la restriction de g à $\mathbf{S}$. En déduire le minimum et le maximum de $g_{|\mathbf{S}}$.*

Par définition les points critiques de $g|S$ sont les points $p \in S$ tels que $D_p g|_{T_pS} = 0$. Dans notre cas vu que $S = f^{-1}(0)$ (avec $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$) cela revient à dire que p vérifie $f(p) = 1$ et $D_p g \wedge D_p f = 0$. En notant (x,y,z) les coordonnées p, on a

$$D_p f \wedge D_p g = \begin{pmatrix} x(y^2-z^2) \\ y(z^2-x^2) \\ z(x^2-y^2) \end{pmatrix}$$

qui s'annule si $x^2 = y^2 = z^2$ ou si 2 coordonnées s'annulent. Les 14 points critiques sont donc les $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ et $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$.

La sphère est compacte donc $g|_S$ est bornée et atteint ses bornes.

De plus les extrema (locaux) sont atteints en des points critiques nous dit le cours. Le maximum de $g|_S$ est réalisé en l'un des 14 points ci-dessus. Les 14 points ne donnent que 3 valeurs : 0 et $\pm 3^{3/2}$.

Exercice 2

Soit α la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par $\alpha_{(u,v)} = \dfrac{1}{u^2+v^2}(udv - vdu)$. Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application lisse définie par $\Phi(x,y,z) = (x^2+y^2-1, xz)$.

1) Montrer que α est fermée.

On vérifie par le calcul que $d\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}(d\alpha)_{x,y,z} &= \frac{\partial}{\partial u}(\frac{u}{u^2+v^2})du \wedge dv + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{v}{u^2+v^2})dv \wedge du \\ &= (\frac{\partial}{\partial u}(\frac{u}{u^2+v^2}) - \frac{\partial}{\partial v}(\frac{v}{u^2+v^2}))du \wedge dv = \cdots = 0\end{aligned}$$

2) Déterminer $\Phi^{-1}(0,0)$. On note U son complémentaire.

$\Phi^{-1}(0,0) = \{(x,y,z) | y^2 = 1 \text{ et } x = 0\} \cup \{(x,y,z) | x^2+y^2 = 1 \text{ et } z = 0\}$ c'est-à-dire la reunion de 2 droites et d'un cercle.

3) *Montrer que*

$$(\Phi^*\alpha)_{(x,y,z)} = \frac{z(y^2-x^2-1)\,dx - 2xyz\,dy + x(x^2+y^2-1)\,dz}{(x^2+y^2-1)^2+(xz)^2},$$

où $\Phi^*\alpha$ désigne l'image réciproque de α par Φ. Quel est son domaine de définition ?
Le domaine de de définition est clairement U. En remplaçant u par x^2+y^2-1, v par xz, du par $2x\,dx+2y\,dy$ et dv par $z\,dx+x\,dz$, on trouve facilement le résultat.

4) *Montrer sans calculs que $\Phi^*\alpha$ est fermée.*
D'après le cours $d(\Phi^*\alpha) = \Phi^*(d\alpha)$.

5) *Soit $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ défini par $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 0, \sqrt{2}\sin t)$. Décrire l'image de γ. Calculer*

$$\int_\gamma \Phi^*\alpha.$$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \Phi^*\alpha &= \int_0^{2\pi} \gamma^*\Phi^*\alpha = \int_0^{2\pi} (\Phi^*\alpha)_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}\sin t(-2\cos^2 t-1)(-\sqrt{2}\sin t)+0+\sqrt{2}\cos t(2\cos^2 t-1)(\sqrt{2}\cos t)}{(2\cos^2 t-1)^2+4\cos^2 t\sin^2 t}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2\sin^2 t+4\cos^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)-2\cos^2 t}{\cos^2(2t)+\sin^2(2t)}dt = \dots \\
&= \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi
\end{aligned}$$

ou alors en utilisant le cours :

$$\int_\gamma \Phi^*\alpha = \int_0^{2\pi} \gamma^*\Phi^*\alpha = \int_0^{2\pi} (\Phi\circ\gamma)^*\alpha$$

on remarque que $\Phi\circ\gamma(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ et le calcul est plus simple.

6) *La forme $\Phi^*\alpha$ est-elle exacte ?*
L'intégrale d'une forme exacte sur un lacet est nulle, donc $\Phi^*\alpha$ n'est pas exacte d'après ce qui précède.

Exercice 3

Soit $\gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$ une courbe lisse, plane, paramétrée par longueur d'arc et soit

$$\begin{aligned}
f :]a,b[\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(u,v) &\longmapsto (x(u) - v\,y'(u), y(u) + v\,x'(u), \ell v),
\end{aligned}$$

où $\ell \in [0,+\infty[$.
On note k la courbure algébrique de γ (vue comme courbe plane), on rappelle que $k(s) = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s)$.

1) *Montrer que l'image de f peut s'écrire comme une union de droites.*
Pour tout $u \in]a,b[$, l'image de $v \mapsto f(u,v)$ est une droite.

2) *Dessiner l'image de f lorsque $]a,b[=\mathbb{R}$ et $\gamma(s)=(\cos s,\sin s,0)$.*

Il s'agit du cône de sommet $(0,0,1)$ et contenant le cercle γ

On revient au cas général.

3) *Calculer $\frac{\partial f}{\partial u}\wedge\frac{\partial f}{\partial v}$. En déduire que la restriction de f à $U=\{(u,v)\in]a,b[\times\mathbb{R}|\,vk(u)<1\}$ est une immersion.*

$$\frac{\partial f}{\partial u}\wedge\frac{\partial f}{\partial v}=\begin{pmatrix}\ell(y'(u)-vx''(u))\\ -\ell(x'(u)-vy''(u)\\ x'(u)^2+y'(u)^2-v(x'(u)y''(u)-y'(u)x''(u))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ell(y'(u)-vx''(u))\\ -\ell(x'(u)-vy''(u)\\ 1-vk(u)\end{pmatrix}$$

Il est donc clair que $\frac{\partial f}{\partial u}\wedge\frac{\partial f}{\partial v}$ est partout non nul sur U. Le rang de la différentielle de $f|_U$ est donc 2 ie $f|_U$ est une immersion.

4) *Donner l'expression de la première fondamentale de la nappe (U,f) dans les coordonnées (u,v) en fonction de ℓ,k et v (seulement).*

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial u}\right\rangle&=(x'(u)-vy''(u))^2+(y'(u)+vx''(u))^2\\&=x'(u)^2+y'(u)^2+v^2(x''(u)^2+y''(u)^2)-2v(x'(u)y''(u)-y'(u)x''(u))\\&=(1-vk(u))^2\end{aligned}$$

En effet comme γ est paramétré par longueur d'arc $\|\gamma''(s)\|=|k(s)|$.

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial v}\right\rangle&=(x'(u)-vy''(u))(-y'(u)+(y'(u)+vx''(u))(x'(u))\\&=v\left\langle\gamma'(u),\gamma''(u)\right\rangle=0\end{aligned}$$

À nouveau car γ est paramétré par longueur d'arc. Enfin

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial v},\frac{\partial f}{\partial v}\right\rangle=1+\ell^2$$

5) *Donner l'expression $N(u,v)$ de l'application de Gauss de (U,f) au point $f(u,v)$ (on pourra utiliser le fait que $\|a\wedge b\|^2=\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2$).*

$\|\frac{\partial f}{\partial u}\wedge\frac{\partial f}{\partial v}\|=\sqrt{1+\ell^2}(1-vk(u))$ et

$$N(u,v)=\frac{1}{\|\frac{\partial f}{\partial u}\wedge\frac{\partial f}{\partial v}\|}\frac{\partial f}{\partial u}\wedge\frac{\partial f}{\partial v}$$

6) *Pour tout $(u,v)\in U$, calculer $\langle N(u,v),(0,0,1)\rangle$. En déduire que l'application de Gauss est à valeurs dans un cercle que l'on note C.*

$\langle N(u,v),(0,0,1)\rangle=\frac{1}{\sqrt{1+\ell^2}}$ L'application de Gauss est donc à valeur dans l'intersection de la sphère unité et du plan $\{z=\frac{1}{\sqrt{1+\ell^2}}\}$.

7) *Pour tout* $(u, v) \in U$*, montrer que l'endomorphisme de Weingarten au point* $f(u, v)$ *est à valeurs dans l'espace tangent à* C *au point* $N(u, v)$*. En déduire que la courbure de la nappe* (U, f) *est partout nulle.*

On revient aux définitions. Pour tout X tangent à la nappe en un point p, il existe un chemin γ tel que $(f \circ \gamma)'(0) = X$ et alors $W_p(X) = -(N \circ \gamma)'(0)$. Mais $N \circ \gamma$ est à valeurs dans C donc $(N \circ \gamma)'(0)$ est tangent à C. Par conséquent, pour tout (u, v), $W_{f(u,v)}$ est à valeurs dans une droite. Son déterminant est donc nul.