Licence de Mathématiques, parcours mathématiques fondamentales
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Géométrie Différentielle (4TMF602U) **9/03/2017** **durée : 1h30**

Épreuve de M. Mounoud Documents interdits, calculette homologuée autorisée

Exercice 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue, de classe C^1 sur $]0,1]$. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(1/n) = (-1)^n/n$ alors le graphe de f n'est pas rectifiable (i.e. de longueur finie). Une telle application peut-elle être de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[0,1]$?

Exercice 2

Soit A un arc *birégulier* lisse orienté de $\mathbb{R}^3$ et (I, f) un paramétrage de A par longueur d'arc. Pour tout $t \in I$, on note $(\tau(t), \nu(t), \beta(t))$ le repère de Frenet au point $f(t)$ et $K(t)$ et $T(t)$ la courbure et la torsion de A en ce point.

1) **(Question de cours)** Montrer que si la torsion de A est nulle alors A est contenu dans un plan affine de $\mathbb{R}^3$.
2) On suppose maintenant que le support de A est contenu dans une sphère de centre 0 et de rayon $R > 0$ et que sa courbure est constante égale à K.
   (a) Montrer que $K \neq 0$ et que pour tout $t \in I$, on a $\langle \nu(t), f(t) \rangle = -\dfrac{1}{K}$.
   (b) En déduire que
   $$T(t) \langle \beta(t), f(t) \rangle = 0.$$
   (c) En déduire (par l'absurde) que la torsion de A est nulle. Que peut-on dire de A ?

Exercice 3

Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ et $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x) = 0\}$.

1) Soient $A_1 = (1, 1, -1)$, $A_2 = (1, -1, 1)$, $A_3 = (-1, -1, -1)$, $A_4 = (-1, 1, 1)$. Montrer que $\Sigma \setminus \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ est une sous-variété de dimension 2.
2) Soient $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \{-1, 1\}^3$ et σ une permutation de $\{1, 2, 3\}$. À quelle condition l'application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $F(x_1, x_2, x_3) = (\eta_1 x_{\sigma(1)}, \eta_2 x_{\sigma(2)}, \eta_3 x_{\sigma(3)})$ vérifie $F(\Sigma) = \Sigma$. Décrire alors $F(\{A_1, A_2, A_3, A_4\})$.
3) Montrer que les six droites (A_iA_j), avec $1 \leq i < j \leq 4$ sont contenues dans Σ (on pourra mettre à profit la question 2 pour limiter les calculs).
   En déduire que Σ n'est pas une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.
4) Soit S la sphère de centre 0 et de rayon 1. Faire un dessin représentant $\Sigma \cap S$. Expliquer sans donner de details à quoi on voit que cette intersection $\Sigma \cap S$ n'est pas une sous-variété.