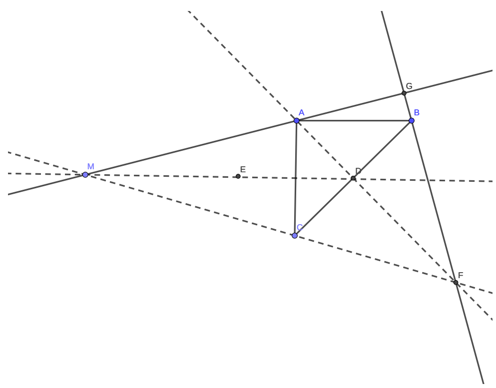
Université de Bordeaux 2020-2021
Master MEEF – Mathématiques

Géométrie
Angles bis

Exercice 1

Dans le plan, on considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A.

On note D le milieu du segment $[BC]$, E le symétrique de D par rapport à la droite (AC), et M un point de la droite Δ médiatrice de $[AC]$ différent de E. La droite (CM) coupe la droite (AD) en F ; on s'intéresse à la position respective des droites (AM) et (FB).



On choisit l'orientation du plan pour laquelle le triangle ABC est direct.

a. Montrer que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}) = -(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CF})$.

b. En déduire que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BF}) = \pi/2 - (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CF})$.

c. Conclure.

d. Que se passe-t-il si on essaie de faire l'exercice sans utiliser les angles orientés ?

Exercice 2 Théorème de l'angle au centre par les angles orientés

Soit Γ un cercle de centre O et A, B, C trois points distincts de Γ.

a. Montrer que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (on pourra faire intervenir A' le point de Γ diamétralement opposé à A) .

b. Montrer que si $T \neq A$ est un point de la tangente en A à Γ alors $2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

c. Montrer que si D est un quatrième point de Γ alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) \mod \pi$.

d. Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan. Montrer qu'ils sont cocycliques ou alignés si et seulement si $(\widehat{AB, AC}) = (\widehat{DB, DC})$ (égalité entre angles orientés de droites).

Exercice 3 Théorème de Miquel.

Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ quatre cercles. On suppose que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants en A et A', $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sécants en B et B', $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sécants en C et C', et enfin $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$ sécants en D et D'.

Montrer les égalités suivantes d'angles de droites : $(\widehat{AB, AA'}) = (\widehat{B'B, B'A'})$,

$$(\widehat{CC', CB}) = (\widehat{B'C', B'B}), \qquad (\widehat{CD, CC'}) = (\widehat{D'D, D'C'}), \qquad (\widehat{AA', AD}) = (\widehat{D'A', D'D}).$$

Montrer que A, B, C et D sont alignés ou cocycliques si et seulement si A', B', C' et D' le sont.

Exercice 4 Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites. On note $s_{\mathcal{D}}$ et $s_{\mathcal{D}'}$ les reflexions orthogonales d'axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Quelle est la nature de $s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$?