Etude de fonction d'une variable réelle

1. Généralités

Ensemble de définition

I={x Є R tel que f(x) existe}

Exemple:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \qquad Dg =]1, +\infty[$$

b) Ensemble d'étude

Définition : Parité/imparité

Parité $f(x)=f(-x)$

(symétrie par rapport à l'axe Oy)

Imparité $f(x)=-f(-x)$

(symétrie centrale par rapport à l'origine)

Définition : périodicité

f est de période T si pour tout x de Df

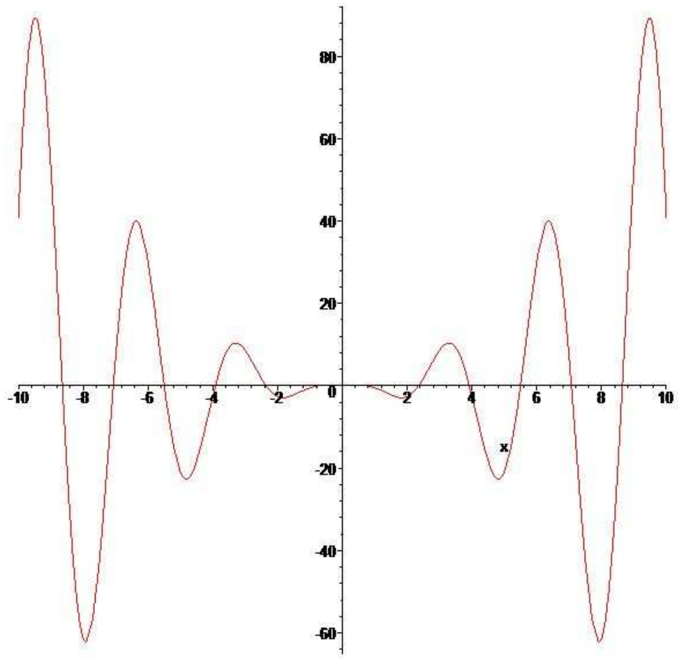
$f(x+T)=f(x)$

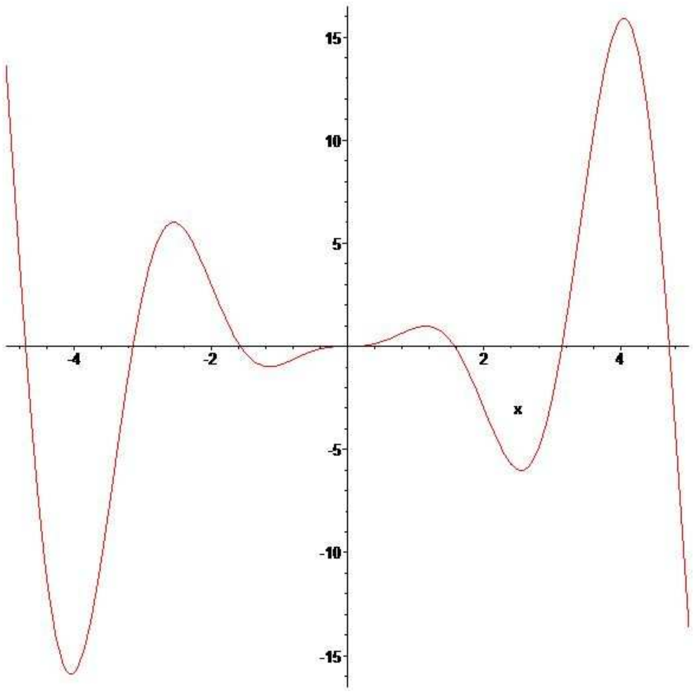
Exemples:

- parité: Soit $f(x)= -x^2 \cos(2x)$

$f(-)=-(-x)^2 \cos(-2x)=f(x)$

f est donc paire (sym / axe Oy)



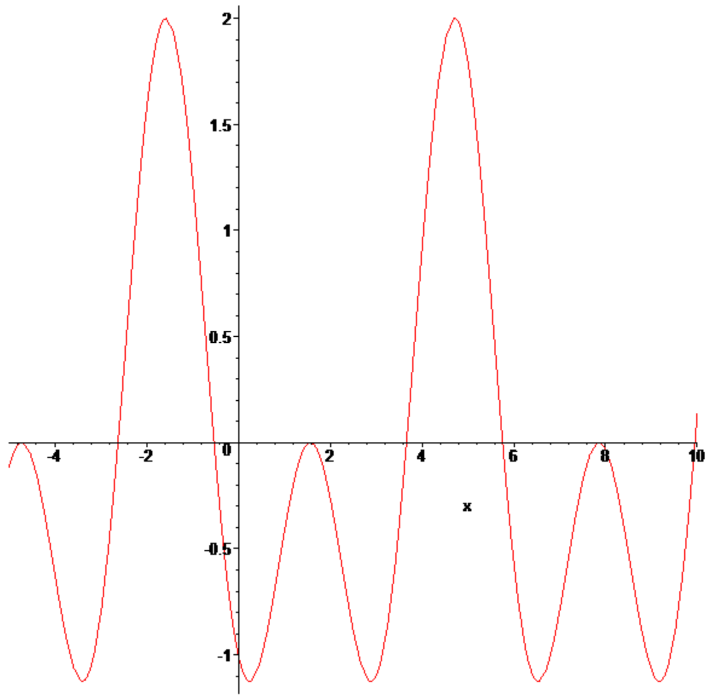


- imparité : Soit $g(x)= x^2 \sin(2x)$

g est impaire (sym centrale O)

▪périodicité :
Soit $h(x)= 2 \sin^2(x)-\sin(x)-1$
on cherche la valeur T la plus petite possible telle que $h(x+T)=h(x)$ pour tout x.

$h(x+2\pi)= 2 \sin^2(x+2\pi)-\sin(x+2\pi)-1=h(x)$
car $\sin(x+2 \pi)=\sin(x)$



2. Continuité, dérivabilité

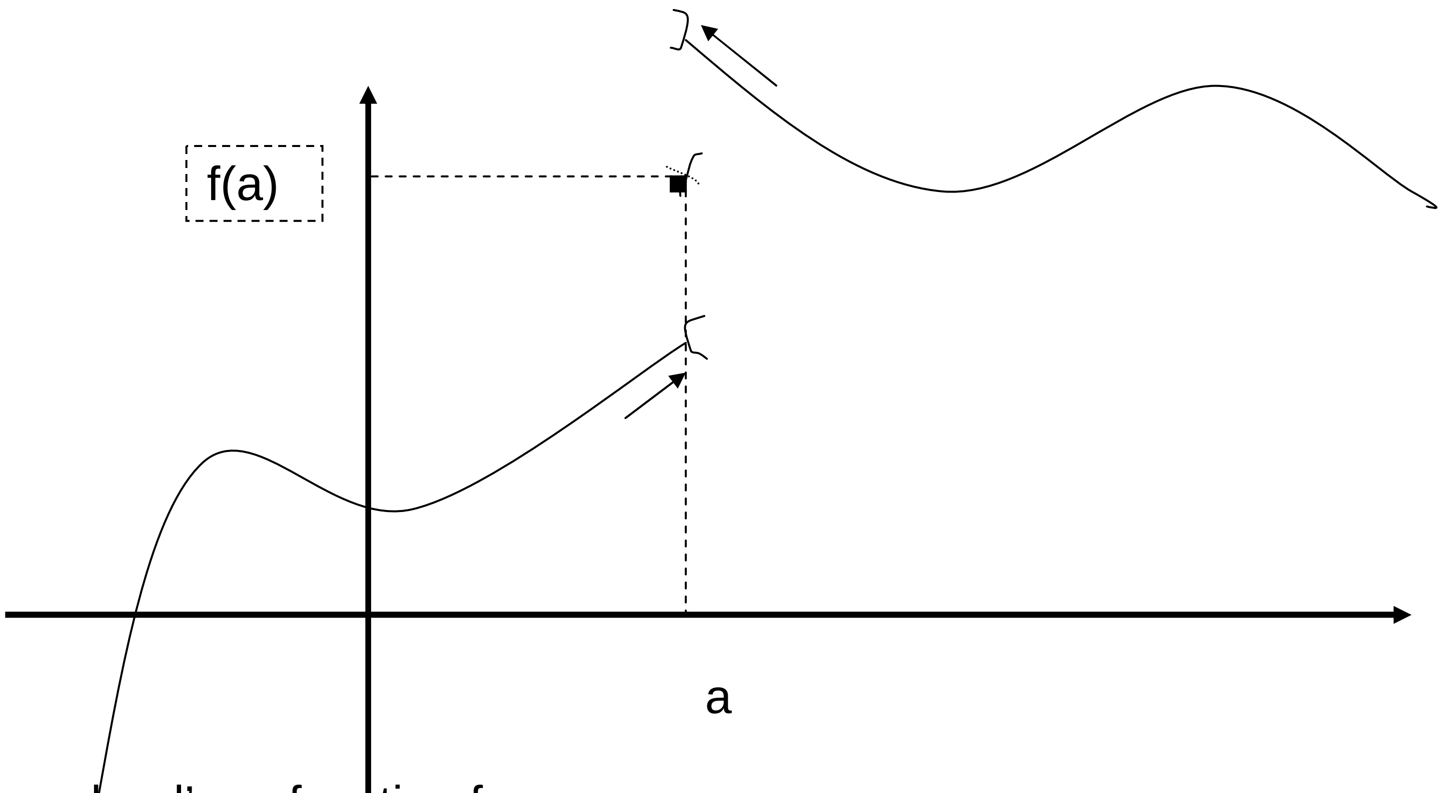
a) Définitions

Définition

On dit que f est continue en a si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

f est dite continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point a de I.



Sur ce graphe d’une fonction f:

la limite de f(x) quand x tend vers a par valeur supérieure

n’est pas égale à la limite de f(x) quand x tend vers a par valeur inférieure

et ces limites ne sont pas égales à f(a).

La fonction n’est pas continue en a sur ce graphe.

Remarque:
On sait déjà que les fonctions usuelles (ln, exp, sin, cos, tan, puissances,…) sont continues là où elles sont définies.

Opérations :
Soient f et g continues sur I. Soit a un réel alors af, f+g, f-g, fg et f/g (là où g ne s'annule pas) sont continues.
Soit f continue sur I et g continue sur f(I) alors $g \circ f$ (composée de f par g) est continue sur I.

Exemple: Soient f(x)=ln(x+1) et g(x)=x
f est continue sur]-1;+∞[(comme composée de $x \to \ln(x)$ et $x \to x+1$) et g est continue sur $\mathbb{R}$.
donc $x \to \ln(x+1)/x$ est continue sur]-1;0[et sur]0;+ ∞[

Définition :

On dit que f est dérivable en a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

vaut une valeur finie l et alors f'(a) est égale à cette limite l.

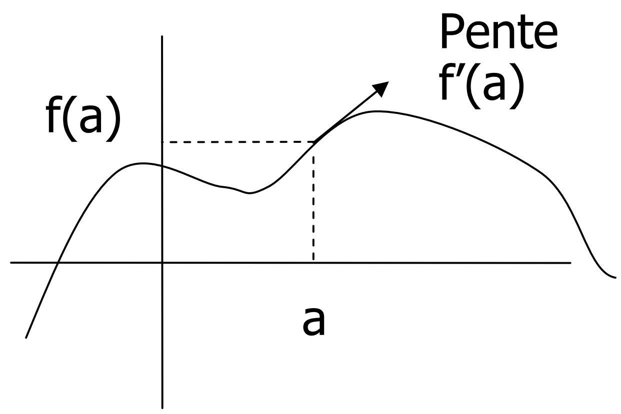
Exemple: f(x)=x^2+1 en a=0

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 1 - 0^2 - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0 \overset{déf}{=} f'(0)$$

Sur la représentation graphique de f,

f'(a) est la pente de la tangente

à la courbe en a.



<u>Définition</u>:

f est dite dérivable sur un intervalle I

si elle est dérivable en tout point a de I.

Remarque:
On connait déjà les dérivées de fonctions usuelles (ln, exp, sin, cos, tan, puissances,…) et leurs ensembles de définition.

Exemple: f: $x \to \ln(x)$ est définie sur $I=]0;+\infty[$ et admet une dérivée définie aussi sur I, $f'(x)=1/x$.

Opérations :
Soient f et g dérivables sur I. Soit a un réel alors af, f+g, f-g, fg et f/g (là où g ne s'annule pas) sont dérivables.
Soit f dérivable sur I et g dérivable sur f(I) alors $g \circ f$ (composée de f par g) est dérivable sur I.

b) Régles de dérivation

Soient f et g deux fonctions dérivables, et f' et g' leurs dérivées respectives

$f+g$	$a\,f$	fg	f/g	fog	f^{-1}
$f'+g'$	$a\,f'$	$f'g+fg'$	$(f'g-fg')/g^2$	$f'og\ x g'$	$1/(f'of^{-1})$

Rappel notation : f^{-1} est la réciproque de f

c) Tableau de dérivées classiques (où u est une fonction dérivable)

a (constante)	0
$u^a(x)$	$au'(x)u^{a-1}(x)$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\tan(u(x))$	$u'(x)(1+\tan^2(u(x)))$
$\exp(u(x))$	$u'(x)\exp(u(x))$
$\ln\lvert u(x)\rvert$	$u'(x)/u(x)$
$\cosh(u(x))$	$u'(x)\sinh(u(x))$
$\sinh(u(x))$	$u'(x)\cosh(u(x))$

4. Plan d’étude d’une fonction

a) Ensemble de définition et d’étude
b) Continuité, dérivabilité
c) Limites aux bornes de l’ensemble de définition
d) Sens et tableau de variation
e) Points et tangentes remarquables
f) Représentation graphique

Sens et tableau de variation

Définition : Soit f une fonction définie sur I.

f est dite croissante si pour tout (x1,x2) de I

$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

f est dite décroissante si pour tout (x1,x2) de I

$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

(strictement :remplacer par < ou >)

Rappel: le signe de la dérivée sur un intervalle donne le sens de variation.

Tableau de variation

Exemple : f(x)= x^2+2x-1

f'(x)=2x+2

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

Points et tangentes remarquables:
tangente horizontale, asymptote, point d’inflexion
éventuellement étude des branches infinies…

Représentation graphique…

4. Formule de Taylor (développement limité)

Soit f dérivable n fois sur I un intervalle contenant a.

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f^{(2)}(a)(x-a)/2!+\ldots.$$
$$+f^{(n)}(a)(x-a)^n/n!+R(x)$$

pour tout x réel dans I

R(x) est appelé le reste:

$R(x)=(x-a)^n\varepsilon(x)$ avec $\epsilon(x)$ ->0 quand x->a

Développement limité

Si a=0 (et reste de Taylor-Young) , on parle de développement limité

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f^{(2)}(0)x^2/2!+\ldots.$$
$$+f^{(n)}(0)x^n/n!+x^n\varepsilon(x)$$