Equations différentielles (E.D.)

1. Introduction
2. E.D. du 1^{er} ordre
3. E.D. du 2nd ordre

1) **Introduction**

En biologie, en physique, en chimie :

modélisation par des relations entre une ou plusieurs variables évoluant en fonctions du temps.

Aux variables, on associe des fonctions dépendant de t: y(t).

Quand les relations font intervenir des dérivées, on obtient une équation différentielle.

Exemple : loi exponentielle

$P(t)$: une densité de population

N : taux de natalité

M : taux de mortalité

$$P(t+\delta t)=P(t)+\delta t\,(N-M)\,P(t)$$

d'où $P(t+\delta t)-P(t)/(\delta t)=(N-M)P(t)$

en faisant tendre $\delta t \to 0$, on obtient une E.D.

$$P'(t)=(N-M)P(t)$$

Si on connaît la population au départ

$$P(0)=P_0$$

on peut alors déterminer le comportement pour tout t de la solution

$$P(t)=P_0 \exp((N-M)t)$$

2) E.D. du 1^{er} ordre

Dans ce qui suit, on note y une fonction de t, inconnue, dérivable, définie de I->R

Définition: Une E.D. d'ordre 1 est une relation entre t, la fonction y(t) et sa dérivée y'(t)

$$y'(t)=f(t,y(t))$$

avec f une fonction continue de IxJ->R

Exemples: On cherche toutes les fonctions $y(t)$ qui vérifient

- $y'(t)=(N-M)y(t)$

Ici la fonction f est $f(t,y)=(N-M)y$ (elle ne dépend pas de t)

- $y'(t)=t+y^2(t)$

Ici f est $f(t,y)=t+y^2$

- $y'(t)=1 + 2y(t)$

Ici f est $f(t,y)=1+2y$

- $y'(t)=t(1+2y(t))$

Ici $f(t,y)=t(1+2y)$

a) <u>**Equations à variables séparables**</u>

- **Définition**: les équations à variables séparables sont de la forme

$$y'(t)=h(t)g(y(t))$$

avec h et g continues sur I et sur J respectivement.

Retour sur les exemples:

•$y'(t)=(N-M)y(t)$ est à variables séparables

$h(t)=N-M$ et $g(y)=y$

•$y'(t)=t+y^2(t)$ n'est pas à variables séparables

•$y'(t)=1 + 2y(t)$ est à variables séparables

$h(t)=1$ et $g(y)=1+2y$

•$y'(t)=t(1+2y(t))$ est à variables séparables

$h(t)=t$ et $g(y)=1+2y$

Notons y_j les valeurs qui annulent la fonction g dans J

alors la fonction constante $y(t)=y_j$ est une solution de l'équation

$$y'(t)=h(t)g(y(t))$$

car $y'(t)=0$ (dérivée d'une constante)

et $g(y_j)=0$ (par définition des y_j)

Maintenant, on suppose que $y(t) \neq y_j$ pour tout t de I

alors $g(y(t)) \neq 0$, l'équation de départ peut s'écrire

$$y'(t)/g(y(t))=h(t) \qquad (*)$$

si G est une primitive de 1/g alors la dérivée de G(y(t)) est

$y'(t)/g(y(t))$ (dérivée d'une composée)

Par conséquent, en intégrant (*), on obtient

$$G(y(t))=H(t)+C$$

où H est une primitive de h et C une constante.

d'où $y(t)=G^{-1}(H(t)+C)$

où G^{-1} est la réciproque de G.

Retour sur les exemples:

•$y'(t)=(N-M)y(t)$ $h(t)=M-N$ et $g(y)=y$

g s'annule en $y=0$: $y(t)=0$ est solution

Si $y(t)\neq 0$, on écrit $y'(t)/y(t)=N-M$

on intègre ($1/g$ est $1/y$ donc G est ln)

$$\ln(y(t))=(N-M)t+C$$

d'où

$$y(t)=K\exp((N-M)t)$$

- $y'(t)=1 + 2y(t)$ $h(t)=1$ et $g(y)=1+2y$

g s'annule en -1/2 donc $y(t)=-1/2$ est solution

si $y(t)\neq-1/2$, on écrit

$$y'(t)/(1+2y(t))=1$$

en intégrant, on obtient

$$\tfrac{1}{2} \ln|1+2y(t)|=t+C$$

d'où

$$y(t)=(\exp(2t+C)-1)/2=K\exp(2t)-1/2$$

- $y'(t)=t(1+2y(t))$ $h(t)=t$ et $g(y)=1+2y$

g s'annule en $-1/2$ donc $y(t)=-1/2$ est solution

si $y(t)\neq-1/2$, on écrit

$$y'(t)/(1+2y(t))=t$$

en intégrant, on obtient

$$\tfrac{1}{2}\ln|1+2y(t)|=t^2/2+C$$

d'où

$$y(t)=K\exp(t^2)-1/2$$

b) **E.D. linéaires du 1^er^ ordre**

- **Définition**: On appelle E.D. linéaire du 1er ordre les équations du type

$$y'(t)+a(t)y(t)=b(t)$$

où a et b I->R continues

Théorème:

les solutions de $y'(t)+a(t)\,y(t)=b(t)$ (E1)

sont $\mathbf{y(t)=y_0(t)+y_1(t)}$

où

$y_0(t)$ est **solution de** $\mathbf{y'(t)+a(t)\,y(t)=0}$ **(E0)**

et $y_1(t)$ est **une solution particulière de (E1)**

•**Solutions de (E0) $y'(t)+a(t)\, y(t)=0$**

(E0) est une équation à variables séparables dont les solutions sont

$y_0(t)=K\exp(-A(t))$ où A est une primitive a.

- **Recherche d'une solution particulière de**

$$y'(t)+a(t)y(t)=b(t) \qquad \textbf{(E1)}$$

On suppose que $y_1(t)=K(t)\exp(-A(t))$

En dérivant y_1, on obtient

$y_1'(t)=K'(t)\exp(-A(t))-K(t)a(t)\exp(-A(t))$

On remplace y1 et y1' par ces fonctions dans (E1)

$K'(t)\exp(-A(t))-K(t)a(t)\exp(-A(t))+a(t)\ K(t)\exp(A(t))=b(t)$

d'où on tire que $K'(t)\exp(-A(t))=b(t)$

soit $K'(t)=b(t)\ \exp(A(t))$

en intégrant, on obtient $K(t)=\int b(t)\ \exp(A(t))dt$

3) E.D. du 2nd ordre à coefficients constants

- **Définition**: On appelle E.D. linéaire du 2nd ordre à coefficients constants les équations du type

$$a\, y''(t)+b\, y'(t)+c\, y(t)=f(t)$$

où a, b et c sont des constantes et f: I->R

continue

a) E.D. 2^{nd} ordre à coef. constants sans second membre $a\,y''(t)+b\,y'(t)+c\,y(t)=0$ (E0)

Méthode : déterminer le discriminant Δ de $a\,r^2+b\,r+c=0$

- si $\Delta>0$

deux racines réelles distinctes r_1 et r_2

- $\Delta=0$, une racine double r
- $\Delta<0$, deux racines complexes conjuguées

$u=a+ib$ et $\bar{u}=a-ib$

Toutes les solutions de (E0) s’écrivent

Si $\Delta>0$

$y(t)=A \exp(r1\ t) + B \exp(r2\ t)$

si $\Delta=0$

$y(t)=(A+B\ t) \exp(r\ t)$

si $\Delta<0$

$y(t)=\exp(a\ t)\ (A \cos(b\ t) + B \sin(b\ t)\ )$

où A et B sont des constantes

b) E.D. 2nd ordre à coef. constants avec second membre $a\, y''(t)+b\, y'(t)+c\, y(t)=f(t)$ (E1)

Théorème: les solutions de

$$a\, y''(t)+b\, y'(t)+c\, y(t)=f(t) \qquad \text{(E1)}$$

sont $\mathbf{y(t)=y_0(t)+ y_1(t)}$

où $y_0(t)$ est **solution de** $a\, y''(t)+b\, y'(t)+c\, y(t)=0$ **(E0)**

et $y_1(t)$ est **une solution particulière de (E1)**