Dans ce problème on considère l'espace mesuré $(\mathbb{R},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ d\mu)$ où $d\mu(t)=dt$ est la mesure de Lebesgue. On note $L^1_{loc}(\mathbb{R},\,d\mu)$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes intégrables sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R},\,d\mu)$; on pose $\forall h>0,\ f_h(x):=\displaystyle\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\,dt$ les moyennes de f centrées en $x\in\mathbb{R}$. On appelle fonction maximale de f, et on la note Mf la fonction :

$\forall x\in\mathbb{R},\ Mf(x):=\sup_{h>0}\left|f_h(x)\right|.$

1- Montrer que si $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R},\,d\mu)$ et $h>0$ fixé, $f_h(x)$ est bien définie pour $x\in\mathbb{R}$. Montrer que Mf est bien définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,\ +\infty]$.

Solution.

Puisque $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R},\,d\mu),\ Mf,\ f$ est intégrable sur $[x-h,\ x+h]$ qui est compact, donc $\displaystyle\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\,dt$ est un réel bien défini.

$Mf(x)$ est le sup d'une famille de fonctions positives donc est soit un réel positif soit $+\infty$. Pour tout $x\in\mathbb{R},\ Mf(x)$ est donc bien défini à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

2- Montrer que si f,g sont dans $L^1_{loc}(\mathbb{R},\,d\mu)$ et si $\alpha\in\mathbb{R}$, alors $M(\alpha f)=|\alpha|\,Mf$ et $M(f+g)\leq Mf+Mg$.

Solution.

Linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire.

3- Calculer Mf lorsque f est l'indicatrice de l'intervalle $[0,1],\ f=\mathbb{1}_{[0,1]}$.

Solution.

On a toujours $Mf(x)\leq\left\|f\right\|_\infty=1$, puisque f_h est une moyenne.

Soit $x\in]0,\ 1[$; il existe alors $h>0$ tel que $]x-h,\ x+h[\subset[0,1]$, donc

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}dt=1.$$

Comme c'est la plus grande valeur possible et qu'elle est atteinte, on a

$$x\in]0,1[\Longrightarrow Mf(x)=1.$$

Soit $x\notin]0,1[$ par exemple $x\leq 0$. Soit $h>0$; si $h+x\leq 0\Longrightarrow]x-h,\ x+h[\cap]0,1[=\emptyset$ donc $f_h(x)=0$.

Si $x+h>0$ et $x+h\leq 1$, alors $]x-h,\ x+h[\cap]0,1[=]0,\ x+h[\Longrightarrow f_h(x)=\dfrac{h-|x|}{2h}$ et le sup est atteint pour $x+h=1\Longrightarrow h=1-x=1+|x|\Longrightarrow f_h(x)=\dfrac{1}{2(1+|x|)}$.

Si $x+h\geq 1\Longrightarrow h\geq 1+|x|$ alors $]x-h,\ x+h[\cap]0,1[=]0,\ 1[\Longrightarrow f_h(x)=\dfrac{1}{2h}\leq\dfrac{1}{2(1+|x|)}$. Donc

$$x\notin]0,1[\Longrightarrow Mf(x)=\frac{1}{2(1+|x|)}.$$

4- Montrer que $f_h(x)$ est continue en $x \in \mathbb{R}$. On pourra montrer que $f_h(x_n) \longrightarrow f_h(x)$ dès que $x_n \longrightarrow x$.

Solution.

Pour montrer la continuité en $x \in \mathbb{R}$, il suffit de montrer que si $x_n \longrightarrow x$ alors $f_h(x_n) \longrightarrow f_h(x)$.

Soit donc $x_n \in \mathbb{R},\ x_n \longrightarrow x$ et considérons

$$g(x_n) := \int_{x_n-h}^{x_n+h} f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\chi_n(t)\,dt$$

avec $\chi_n(t) := \mathbb{1}_{[x_n-h,\ x_n+h]}(t)$.

On va appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.Considérons un intervalle compact $I := [a,b] \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [x_n-h,\ x_n+h]$; cet intervalle existe car $x_n \longrightarrow x$.

On a $\forall t \in I,\ |f(t)\chi_n(t)| \le |f(t)| \in L^1(I)$.

D'autre part on a $\forall t \in]x-h,\ x+h[,\ f(t)\chi_n(t) \longrightarrow f(t)\mathbb{1}_{[x-h,\ x+h]}(t)$ puisque les indicatrices convergent ponctuellement, sauf au bord de $[x_n-h,\ x_n+h]$, donc presque partout.

Ainsi le TCDL donne

$$g(x_n) \longrightarrow \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt,$$

et donc, divisant par $2h > 0$ on a que f_h est continue en x.

5- Soit $\{g_h\}_{h>0}$ une famille de fonctions continues sur $\mathbb{R}$; on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ m(x) := \sup_{h>0} |g_h(x)|\,.$$

Montrer que :

$$\forall a > 0,\ \Omega_a := \{x \in \mathbb{R}\ t.q.\ m(x) > a\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$. (On pourra montrer que $\forall x \in \Omega_a,\ \exists \delta > 0\ t.q.\ ]x-\delta,\ x+\delta[\subset \Omega_a$.)

Solution.

Soit donc $x \in \Omega_a$, cela signifie que $\alpha := \sup_{h>0} |g_h(x)| > a$ donc il existe un $h > 0$ tel que $|g_h(x)| > a$. Comme g_h est continue, $|g_h|$ aussi comme composée de fonctions continues, cette inégalité vaut encore au voisinage de x, i.e. $\exists \delta > 0\ t.q.\ \forall y \in]x-\delta,\ x+\delta[,\ |g_h(y)| > a \Longrightarrow m(y) > a \Longrightarrow]x-\delta,\ x+\delta[\subset \Omega_a$.

Ainsi Ω_a est voisinage de tous ses points, c'est un ouvert.

6- Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, d\mu)$; montrer que $\forall a > 0,\ \Omega_a := \{x \in \mathbb{R}\ t.q.\ Mf(x) > a\}$ est ouvert. En déduire que Mf est mesurable.

Solution.

On applique **5-** à la famille $g_h = f_h$ qui est bien continue par **4-**. On a donc que $\forall a > 0,\ \Omega_a := \{x \in \mathbb{R}\ t.q.\ Mf(x) > a\}$ est ouvert. La fonction Mf est bien mesurable car les ensembles $]a,\ +\infty[$ engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et leur image réciproque par Mf est un borélien, puisqu'un ouvert.

7- Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)$ **et** $f(x) \ge 0$ (oublié dans l'énoncé !) ; montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $Mf(x) \ge c\dfrac{\|f\|_1}{|x|}$ pour $|x|$ assez grand.

Solution.

Soit $x \in \mathbb{R}\ t.q.\ |x| \ge 1$; comme f est intégrable, on a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt \geq \int_{-k\,|x|}^{k\,|x|} f(t)\,dt \geq \int_{-k}^{+k} f(t)\,dt \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \|f\|_1\,,\ k \longrightarrow \infty.$$

Donc $\exists K \in \mathbb{N}\ t.q.\ \forall k \geq K,\ \displaystyle\int_{-k\,|x|}^{k\,|x|} f(t)\,dt \geq \frac{1}{2}\|f\|_1\,.$

Mais $Mf(x) \geq \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$ donc avec $k \geq K$ et $h = (k+1)\,|x|$ on a $Mf(x) \geq \dfrac{1}{2(k+1)\,|x|}\dfrac{1}{2}\|f\|_1$ et le résultat avec $c = \dfrac{1}{4(K+1)} > 0$.

Remarque Sans $f \geq 0$ c'est faux : on prend une fonction intégrable impaire alors $\forall h > 0,\ f_h(0 = 0$!

8- En déduire que Mf n'est jamais intégrable sur $\mathbb{R}$ pour $f \geq 0$.

Solution.

On a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} Mf(x)\,dx \geq c\,\|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|}\,dx = \infty$, et donc Mf n'est pas intégrable.

9- Soit $f \in L^1(\mathbb{R},\,d\mu)$ montrer que $\lambda\mu(\{Mf > \lambda\}) \longrightarrow 0$ quand $\lambda \longrightarrow \infty$.

Solution.

Trop difficile, donné par erreur !

10- Soient $0 < \alpha < 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ f(x) = \dfrac{1}{|x|^\alpha}$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $f(x) \leq Mf(x) \leq Cf(x)$.

Solution.

Calculons, pour $f_h(x) = \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} \frac{1}{|t|^\alpha}\,dt$.

On étudie 2 cas pour la majoration :

1er cas $0 < h < x/2$.

La formule de la moyenne donne

$$\exists c \in [x-h,\ x+h]\ t.q.\ \int_{x-h}^{x+h} \frac{1}{|t|^\alpha}\,dt = 2h\frac{1}{c^\alpha} = \frac{h}{(x-h+2\theta h)^\alpha},\ \text{avec } \theta(x,h) \in [0,1].$$

On a donc $f_h(x) = \dfrac{1}{(x-h+2\theta h)^\alpha}$ et $Mf(x) = \sup\limits_{h>0} \dfrac{1}{(x-h+2\theta h)^\alpha} \leq \dfrac{1}{(x-x/2)^\alpha} = \dfrac{2^\alpha}{x^\alpha}$.

2ième cas $0 < x/2 \leq h$.

Dans ce cas on majore

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \frac{1}{|t|^\alpha}\,dt \leq \frac{1}{2h}\int_{-(x+h)}^{x+h} \frac{dt}{|t|^\alpha} = \frac{1}{h}\int_0^{x+h} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{(x+h)^\beta}{\beta h},$$

avec $\beta = 1-\alpha > 0$. Cette fonction est décroissante de h pour $h \in [x/2,\ +\infty[$, comme le montre une rapide étude de sa dérivée en h, donc son sup est pour $h = x/2$ et donc encore $Mf(x) \leq 2(\dfrac{3}{2})^\beta \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Bien sûr tout est symétrique en $x = 0$ donc on a la même chose pour $x < 0$.

Ainsi avec $C = \max(2(\dfrac{3}{2})^\beta,\ 2^\alpha),\ Mf(x) \leq \dfrac{C}{x^\alpha}$.

Pour la minoration :

on a $\forall h > 0,\ Mf(x) \geq \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} \frac{dt}{|t|^\alpha}$. Donc

$$Mf(x) \geq \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \frac{dt}{|t|^\alpha} = \frac{1}{|x|^\alpha},$$

et le résultat.

Il y a une erreur dans le corrigé :
question 3- si $x \geq 1,\ Mf(x) = \frac{1}{2x}$ par symétrie par rapport à $x = 1/2$ bien sûr.
Dans l'énoncé de la **question 9** il y avait aussi une erreur : il fallait lire $\lambda\mu(\{Mf > \lambda\})$ reste borné quant $\lambda \longrightarrow \infty$. En effet avec la fonction de la question **3-**, $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$, on a que $\lambda\mu(\{Mf > \lambda\}) \geq 1/4$ pour λ assez grand !