Espaces de Hilbert et Analyse de Fourier

Devoir maison n^o 1.
à rendre semaine 7

Exercice 1. Soit H un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. On note par B la boule unité fermée de H.
1) Montrer que B est convexe.
2) Déterminer la projection orthogonale sur B.
3) Soit $y \in H$, $y \neq 0$. On pose

$$E_y = \{x \in H \ : \ \langle x, y\rangle = 0\}$$

et

$$F_y = \{x \in H \ : \ \langle x, y\rangle \leq 0\} \, .$$

a) Montrer que E_y et F_y sont deux convexes de H.
b) A-t-on $H = E_y \oplus E_y^{\perp}$? $H = F_y \oplus F_y^{\perp}$?
c) Déterminer les projections orthogonales sur E_y et F_y.

Exercice 2. On considère l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$ muni du produit scalaire

$$\langle \dot{f}, \dot{g}\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Pour $A \subset [0,1]$ mesurable on pose $E_A = \{\dot{f} \in L^2([0,1]) \ : \ f = 0 \ p.p \ \text{ sur } \ A\}$.
1) Montrer que E_A est un sous espace fermé de $L^2([0,1])$.
2) Déterminer $E_A^{\perp}$ et la projection orthogonale sur E_A.
3) Soit $\dot{f} \in L^\infty([0,1])$ non nulle. On note $x^n f$ la fonction $x \to x^n f(x)$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n \dot{f}$ est dans $L^2([0,1])$. On pose $F = \overline{vect\{\dot{f}, x\dot{f}, x^2\dot{f}, ...\}}$ et on suppose que $F \neq L^2([0,1])$.

3a) Soit $\dot{g} \in L^2([0,1])$ orthogonal à F. Montrer que pour tout polynome p

$$\int_0^1 p(x)f(x)\overline{g(x)}dx = 0.$$

3b) En déduire que $f(x)g(x) = 0$ $p.p$ sur $[0,1]$.
3c) Trouver $A \subset [0,1]$ mesurable tel que $0 < m(A) < 1$ et $F = E_A$ (m étant la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$).

Exercice 3. Soit H un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert et T une application linéaire continue de H dans lui-même. Montrez l'équivalence entre les trois assertions suivantes :

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall\, x \in H\,,\ \ \|T(x)\| = \|x\| \\ (ii) & \forall\, x, y \in H\,,\ \ \langle T(x)\,,\, T(y)\rangle = \langle x\,,\, y\rangle \\ (iii) & T^* \circ T = \mathrm{Id}_H\,. \end{array}$$