MHT734 - DM 2 (semaine 42, à rendre semaine 44)

I. La formule de Jensen.

I.1. Soit u une fonction harmonique dans la couronne ouverte du plan complexe $\{r_1 < |z| < r_2\}$, où $0 < r_1 < r_2 \leq \infty$. En utilisant la première formule de Green (Proposition III.1.1 du cours), montrer que la fonction

$$M_u \ : r \in]r_1, r_2[\longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |u(re^{i\theta})| \, d\theta$$

est, sur $]r_1, r_2[$, de la forme $M_u(r) = a \log r + b$, où a et b sont deux constantes.

I.2. Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans la couronne $\{0 < |z| < R\}$, $R \in]0, \infty]$, et $\alpha_1, ..., \alpha_N, ...$ la liste de ses zéros dans cette couronne ouverte, rangés dans l'ordre des modules croissants :

$$0 < |\alpha_1| \leq \cdots \leq |\alpha_N| \leq \cdots < R\,.$$

On suppose aussi que f présente une singularité au pire non essentielle (elle peut être éliminable) à l'origine. En utilisant le résultat établi à la question **I.1** et le théorème de Rouché (Proposition II.3.5 du cours), montrer que si $0 < r_1 < r_2 \leq R$ sont tels que f ne s'annule pas dans la couronne ouverte $\{r_1 < |z| < r_2\}$, on a

$$\forall r \in]r_1, r_2[\,,\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta = (\nu_f(r_1) + \nu(f, 0)) \, \log r + \text{Constante},$$

où $\nu_f(r_1)$ désigne le nombre de zéros de f (comptés avec leurs multiplicités) dans la couronne semi-fermée $\{0 < |z| \leq r_1\}$ et $\nu(f, 0)$ désigne l'indice du plus petit $k \in \mathbb{Z}$ tel que le coefficient de Laurent $a_k(f, 0)$ soit non nul.

I.3. En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, montrer que, si α est un nombre complexe non nul, la fonction

$$I_\alpha \ : r \in]0, \infty[\longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |re^{i\theta} - \alpha| \, d\theta$$

est une fonction continue de r. En utilisant la formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques (Théorème III.2.1 du cours), montrer que $I_\alpha(r) = \log |\alpha|$ si $r < \alpha$ et en déduire la valeur de $I_\alpha(|\alpha|)$.

I.4. On reprend la fonction f introduite à la question **I.2**. Déduire de **I.2** et **I.3** que la fonction

$$r \in]0, R[\longmapsto M_{\log |f|}(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta$$

s'exprime sous la forme

$$\forall\, r \in]0, R[,\ M_{\log |f|}(r) = \nu(f, 0) \log r + \log |a_{\nu(f,0)}(f, 0)| + \int_\epsilon^r \frac{\nu_f(t)}{t} \, dt\,, \qquad (\dagger)$$

où ϵ désigne un réel quelconque de $]0, |\alpha_1|[$. Vérifier en utilisant le procédé sommatoire d'Abel (c'est-à-dire la formule d'intégration par parties discrète) que l'identité (†) se reformule aussi :

$$\forall\, r \in]0,R[,\ M_{\log|f|}(r) = \log\Big(|a_{\nu(f,0)}(f,0)|\, r^{\nu(f,0)} \prod_{j=1}^{\nu_f(r)} \frac{r}{|\alpha_j|}\Big). \qquad (\dagger\dagger)$$

I.5. Si $P = a_0X^N + \cdots + a_{N-1}X + a_N$ est un polynôme à coefficients complexes de degré exactement N non nul en 0, de racines complexes $\xi_1, ..., \xi_N$ (comptées avec leurs multiplicités), déduire de la formule (††) établie au **I.4** que

$$\exp\Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(e^{i\theta})|d\theta\Big] = |a_0| \prod_{j=1}^{N} \max(|\xi_j|, 1).$$

Montrer que, si P est de plus à coefficients entiers, la *mesure de Mahler* de P définie par

$$h(P) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(e^{i\theta})|d\theta$$

est un nombre positif ou nul ; en déduire que si $P \in \mathbb{Z}[X]$ se factorise sous la forme $P = P_1P_2$, où $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}[X]$, $h(P) \geq \max(h(P_1), h(P_2))$.

II. La formule de Poisson-Jensen.

II.1. Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans la couronne $\{0 < |z| < R\}$, présentant une singularité éliminable ou non essentielle en $z = 0$ ($\nu(f,0) \in \mathbb{Z}$ désignant l'indice du premier des coefficients de Laurent $a_k(f,0)$ non nuls). On note toujours $\alpha_1, ..., \alpha_N, ...$ la liste des zéros de f dans la couronne $\{0 < |z| < R\}$, ordonnés suivant les modules croissants et comptés avec leurs multiplicités. Pour chaque $r \in]0,R[$, on note $\nu_f(r^-)$ le nombre de zéros de f dans la couronne $\{0 < |z| < r\}$. Vérifier que la fonction f se factorise dans la couronne $\{0 < |z| < r\}$ sous la forme

$$f(z) = z^{\nu(f,0)} g_r(z) \prod_{j=1}^{\nu_f(r^-)} \frac{r(z-\alpha_j)}{r^2 - \overline{\alpha}_j z}\,,$$

où g_r est une fonction holomorphe dans $D(0,r)$ et ne s'annulant pas dans ce disque.

II.2. Montrer que, pour $r \in]0,R[$, il existe une fonction h_r holomorphe dans $D(0,r)$ et telle que $g_r = \exp(h_r)$ dans $D(0,r)$. En utilisant la formule de représentation de Poisson (Proposition III.4.1 du cours), montrer que

$$\forall\, r' \in]0,r[,\ \forall\, z \in D(0,r')\,,\ \log|g_r(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r')^2 - |z|^2}{|r'e^{i\theta} - z|^2} \log|g_r(r'e^{i\theta})|\, d\theta.$$

II.3. Déduire de **II.1** et de **II.2** la formule de représentation de Poisson-Jensen :

$$\forall\, r \in]0,R[,\ \forall\, z \in D(0,r), \quad \log|f(z)| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta + \nu(f,0)\log\frac{|z|}{r} + \sum_{j=1}^{\nu_f(r^-)} \log\frac{|r(z-\alpha_j)|}{|r^2 - \overline{\alpha}_j z|}$$

(on établira tout d'abord cette formule lorsque r est tel que la fonction f ne s'annule pas sur le cercle de rayon r, puis on approchera ensuite par valeurs inférieures le cas d'un r arbitraire dans $]0,R[$).