MHT734 - DM 3

Autour des théorèmes de Picard

Partie I

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe dans Ω, évitant les deux valeurs 0 et 1, et z_0 un point de Ω.

I.1. Montrer qu'il existe une unique fonction g holomorphe dans Ω et telle que $\mathrm{Re}\,(g(z_0) \in [-1/2, 1/2[$.

I.2. Montrer que la fonction $z \in \Omega \mapsto (g(z))^2 - 1$ ne s'annule pas dans Ω et en déduire l'existence d'une fonction G holomorphe dans Ω et telle que

$$\forall z \in \Omega,\ (g(z) - G(z))(g(z) + G(z)) = 1.$$

I.3. Montrer que l'une des deux fonctions $g \pm G$ satisfait $|(g \pm G)(z_0)| \geq 1$. On note H cette fonction. Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe h dans Ω, telle que $H = \exp(h)$ et que $\mathrm{Im}\,(h(z_0)) \in [-\pi, \pi[$.

I.4. Vérifier que, pour tout $z \in \Omega$, on a $f(z) = \exp(2i\pi\cosh\,(h(z))$, où la fonction cosinus hyperbolique cosh est définie par $\cosh w := (e^w + e^{-w})/2$.

I.5. Déduire de $H + \frac{1}{H} = 2g$ et de $|H(z_0)| \geq 1$ l'inégalité $|H(z_0)| \leq 1 + 2|g(z_0)|$. Montrer que $|\mathrm{Im}(g(z_0))| \leq (\log|f(z_0)|)/\pi$ et conclure que

$$\begin{aligned} |h(z_0)| &\leq |\mathrm{Im}\,h(z_0)| + \log|H(z_0)| \\ &\leq \pi + \log|2g(z_0)| \\ &\leq \pi + \log\Big(2 + \frac{\log|f(z_0)|}{\pi}\Big). \end{aligned} \tag{1}$$

Partie II (un théorème de Bloch-Landau)

Nota : *cette partie est une reformulation des exercices 9.1 et 9.2 traités en TD ; seules les notations ont changé, par souçi de cohérence avec celles du problème.*

Soit Φ une fonction holomorphe bornée dans un voisinage de $\overline{D(0,1)}$ et telle que $\Phi'(0) = 1$. On pose $M = \sup_{\overline{D(0,1)}} |\Phi(z)|$.

II.1. Montrer que

$$\varphi\ : t \in [0,1] \mapsto t\sup\{|\Phi'(z)|\,;\ |z| \leq 1 - t\}$$

est continue sur $[0,1]$ et en déduire qu'il existe $t_0 > 0$ et $a \in D(0,1)$ avec $|a| \leq 1 - t_0$, $|\Phi'(a)| = 1/t_0$ et $|\Phi'(z)| < 1/t$ pour $t < t_0$ et $|z| \leq 1 - t$.

II.2. Montrer que $|\Phi'(z)| \leq 2/t_0$ dans le disque $D(a, t_0/2)$ et en déduire que la fonction Φ_a définie dans $D(0,1)$ par

$$\Phi_a(z) = \Phi(z) - \Phi(a)$$

vérifie $|\Phi_a(z)| \leq 1$ dans $D(a, t_0/2)$.

II.3. Soit Ψ_a la fonction définie au voisinage de $D(0,1)$ par

$$\Psi_a(z) = \frac{2\Phi_a\Big(a + \frac{t_0 z}{2}\Big)}{t_0\Phi'(a)}.$$

Vérifier que $\Psi_a(0) = 0$, $\Psi_a'(0) = 1$ et $|\Psi_a(z)| \leq 2$ dans $D(0,1)$.

II.4. Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \Psi_a(D(0,1)$. Montrer qu'il existe une et une seule fonction ψ_a holomorphe dans $D(0,1)$ telle que $\psi_a^2(z) = 1 - \Psi_a(z)/w$ pour tout z dans $D(0,1)$ et $\psi_a(0) = 1$. Donner les premiers termes du développement de ψ_a en série entière.

II.5. Montrer que

$$\sup_{D(0,1)} |\psi_a|^2 \leq 1 + \frac{2}{|w|}$$

et déduire des inégalités de Cauchy (formulées à l'aide de la formule de Plancherel) que $|w| \geq 1/8$. Conclure que $\Psi_a(D(0,1))$ contient le disque ouvert $D(0,1/8)$ et déduire de la relation entre Φ et Ψ_a que $\Phi(D(0,1))$ contient un disque ouvert de rayon au moins égal à $1/16$.

Partie III : vers les théorèmes de Picard

Soit f une fonction entière évitant deux valeurs a et b distinctes. Le but de cette partie est de montrer que f est constante. On suppose donc ici f non constante et le but de cette partie est d'aboutir à une contradiction.

III.1. En utilisant les résultats établis dans la partie **I**, montrer qu'il existe une fonction entière h telle que

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \frac{F(z) - a}{b - a} = \exp(2i\pi \cosh{(h(z))}.$$

III.2. Montrer que la fonction entière h de **III.1** évite toutes les valeurs

$$\pm \mathrm{arcosh}\,(n+1) + ik\pi,\ \ n \in \mathbb{N},\ \ k \in \mathbb{Z},$$

ou arcosh $: [1, \infty[\to]0, \infty[$ est la fonction inverse de la fonction cosh.

III.3. Montrer que la suite

$$\Big(\mathrm{arcosh}\,(n+2) - \mathrm{arcosh}\,(n+1)\Big)_{n \geq 0}$$

est une suite décroissante majorée par $\mathrm{arcosh}\,(2) \simeq 1.317$. En déduire que tout point du plan et à une distance au plus égale à

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 + (\mathrm{arcosh}\, 2)^2} \simeq 3.22$$

de l'un des points $\pm \mathrm{arcosh}\,(n+1) + ik\pi$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

III.4. Pourquoi existe-t-il un point α de $\mathbb{C}$ tel que $h'(\alpha) \neq 0$? Montrer (en utilisant les résultats établis dans la partie **II**, en particulier en **II.5**) que l'image du disque unité $D(0,1)$ par l'application

$$\Phi\ : z \in D(0,1) \mapsto \frac{1}{64} h\Big(\alpha + \frac{64 z}{h'(\alpha)}\Big)$$

contient un disque ouvert de rayon $1/16$. En déduire que l'image par h du disque $D(\alpha, 64/|h'(\alpha)|)$ contient un disque de rayon 4 et conclure à une contradiction avec la conclusion de la question **III.3**. Dire pourquoi ceci conclut la preuve du petit théorème de Picard.

III.5. (une application du corollaire du grand théorème de Picard, théorème VI-4-1 du cours) [1]**.** Montrer que, si $p \in \mathbb{C}[X]$, l'équation $e^z = p(z)$ a une infinité de solutions.

[1] Je n'ai pu, comme je le pensais initialement, trouver de preuve utilisant simplement le petit théorème de Picard.