Université de Bordeaux I **2009-2010**
Analyse complexe

Devoir libre n° **3**, corrigé

I. Théorème de Mittag-Leffler

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $S \subseteq U$ un ensemble sans point d'accumulation dans U. On se donne pour tout a de S une fraction rationnelle F_a ayant a comme unique pôle.

1) *Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in C^\infty(U \setminus S)$ tel que pour tout a de S, $\varphi - F_a$ est nulle sur un voisinage de a.*

Supposons S infini (le raisonnement s'adapte immédiatement au cas fini). Alors S est dénombrable : $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ (remarquer par exemple qu'on peut écrire $U = \cup_{\mathbb{N}} K_n$, pour K_n une suite croissante de compacts, avec $K_n \cap S$ nécessairement fini puisque S est discret dans U). Choisissons pour tout n un disque ouvert $D(a_n, \varepsilon_{a_n}) \subseteq U$, avec ε_n tendant vers 0, tel que $\cup_{1 \leq k \leq n-1} D(a_k, \varepsilon_{a_k}) \cap D(a_n, \varepsilon_{a_n}) = \emptyset$, et des fonctions $\varphi_{a_n} \in C^\infty(U)$ valant 1 sur $D(a_n, \varepsilon_{a_n}/3)$ et 0 sur $U \setminus D(a_n, 2\varepsilon_{a_n}/3))$. Définissons $\Phi_{a_n} := F_{a_n} \times \varphi_{a_n}$ sur $U \setminus \{a_n\}$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi_{a_n}$ est bien définie et C^∞ sur $\Omega := \cup_{n\in\mathbb{N}} D(a_n, \varepsilon_{a_n}) \setminus \{a_n\}$ (la réunion étant disjointe). L'ensemble $V := \cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{D}(a_n, 2\varepsilon_{a_n}/3)$ est un fermé de U (car, ε_n tendant vers 0, un point qui serait dans l'adhérence dans U de V mais pas dans V serait un point d'accumulation de S). Sur l'ouvert $U \setminus V$, la fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi_{a_n}$ est également définie et C^∞ - puisque nulle... Donc $\varphi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi_{a_n}$ répond à la question, puisque $U \setminus S$ est la réunion des ouverts Ω et $(U \setminus V)$.

2) *En déduire, à l'aide de la résolution du $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, une preuve du théorème de Mittag-Leffler suivant: sous les hypothèses précédentes, il existe une fonction f qui est méromorphe sur U et holomorphe sur $U \setminus S$, tel que tout a de S possède un voisinage sur lequel $f - F_a$ n'a que des singularités artificielles.*

La fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \in C^\infty(U \setminus S)$ étant nulle au voisinage de S, elle se prolonge par continuité en un élément de $C^\infty(U)$. On sait alors qu'il existe $u \in C^\infty(U)$ tel que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}$: on remarque qu'une telle fonction est en fait holomorphe au voisinage de S (et nécessairement $u \neq \varphi$, puisque cette dernière n'est pas prolongeable par continuité en les points de S). La fonction $f := \varphi - u$ satisfait donc à la conclusion du théorème de Mittag-Leffler : elle est holomorphe sur $U \setminus S$, et au voisinage de tout $a \in S$, $f - F_a = f - \varphi = -u$ n'a que des singularités artificielles.

3) *Soit g une fonction méromorphe sur U et holomorphe sur $U \setminus S$ tel que, pour tout lacet γ dans $U \setminus S$ qui est C^1 par morceaux, $\int_\gamma g(z)dz$ est un multiple entier de $2i\pi$. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f\colon U \setminus S \to \mathbb{C}^*$ vérifiant $f'/f = g$.*

On peut supposer U connexe (par arcs). On fixe un point $z_0 \in U$ et on pose $f(z) = e^{\int_{\gamma_z} g(\xi)d\xi}$, pour γ_z un chemin (C^1 par morceaux) dans $U \setminus S$ joignant z_0 à z. L'hypothèse de nullité modulo $2i\pi$ des $\int_\gamma g(\xi)d\xi$ sur les lacets montre que f

est bien définie, indépendamment des choix de chemins ; elle répond clairement à la question.

4) *Montrer le théorème de Weierstrass dans le cas des ouverts simplement connexes à l'aide du théorème de Mittag-Leffler montré en 2).*

Soit U un ouvert simplement connexe, $S = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ un ensemble de U sans point d'accumulation, $\{m_1, \dots, m_n, \dots\}$ une suite d'entiers. On veut construire une fonction holomorphe sur U dont les zéros sont exactement les a_n, avec multiplicité m_n. Le théorème de Mittag-Leffler assure qu'il existe une fonction h méromorphe sur U, holomorphe sur $U \setminus S$, tel que $h - \frac{m_n}{(z-a_n)}$ n'ait qu'une singularité artificielle au voisinage de a_n, quel que soit n. Puisque U est simplement connexe, si γ est un lacet dans $U \setminus S$, l'invariance par homotopie de l'intégration montre que $\int_\gamma h$ peut s'écrire comme une somme (finie) sur les $a_n \in S$ contenus dans l'ouvert enserré par γ d'intégrales de formes $\int_{\gamma_{a_n}} h(\xi)d\xi$, pour γ_{a_n} un petit lacet enserrant a_n (et pas d'autre élément de S). Comme sur un voisinage de a_n la partie principale de h est $m_n/(z-a_n)$, chaque $\int_{\gamma_{a_n}} h(\xi)d\xi$ vaut $2i\pi m_n \mathrm{Ind}(a_n, \gamma_{a_n})$, donc un multiple entier de $2i\pi$. La question précédente montre alors l'existence d'une fonction f holomorphe de $U \setminus S$ dans $\mathbb{C}^*$ avec $f'/f = h$. Au voisinage de chaque $a_n \in S$, la fonction $f/(z-a_n)^{m_n}$ a pour dérivée logarithmique une fonction g_n qui est holomorphe avec singularité artificielle en a_n : on voit à nouveau que f s'écrit localement $A_n(z-a)^{m_n}e^{G_n(z)}$ pour A_n une constante non nulle et $G_n(z)$ une primitive de g_n, donc une fonction holomorphe (y compris en a_n). Finalement f s'annulle à l'ordre m_n en a_n, et vérifie les conlusions du théorème de Weierstrass.

II. Théorème de la progression arithmétique de Dirichlet

On veut démontrer le théorème suivant : si m est un entier, alors pour tout a premier à m, il existe une infinité de nombres premiers congrus à a modulo m.

A) La fonction ζ de Riemann

On rappelle qu'on définit sur le demi-plan $H_1 := \mathrm{Re}(s) > 1$ la fonction ζ de Riemann comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (absolument convergente sur les compacts de H_1).

A.1) *Montrer que $\zeta(s)$ se prolonge sur $H_0 := \mathrm{Re}(s) > 0$ en une fonction méromorphe telle que $\zeta(s) - 1/(s-1)$ soit holomorphe sur H_0. (On pourra écrire $\frac{1}{s-1} = \sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} t^{-s}dt$.)*

Pour $s \in H_1$ on a bien $\frac{1}{s-1} = \int_1^\infty t^{-s}dt = \sum_1^\infty \int_n^{n+1} t^{-s}dt$ donc

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (n^{-s} - t^{-s})dt.$$

L'inégalité des accroissements finis montre que les termes de cette somme sont majorés par $\sup_{t\in[n,n+1]} |n^{-s} - t^{-s}| \leq |s|/n^{\mathrm{Re}(s)+1}$, donc la somme converge normalement dès que $\mathrm{Re}(s) \geq \varepsilon > 0$, i.e. sur tout compact de H_0.

A.2) *Soit $M\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une fonction multiplicative, i.e. tel que $M(a.b) = M(a).M(b)$ pour tous a, b. Montrer que si M est bornée, la série $\sum_1^\infty \frac{M(n)}{n^s}$ converge absolument sur H_1, où elle est égale à $\prod_P (1 - M(p)p^{-s})^{-1}$ ("produit eulérien"), P désignant (pour toute la suite) l'ensemble des nombres premiers.*

La convergence absolue est immédiate puisque M est bornée. Pour S_q l'ensemble des q premiers nombres premiers et $N(S_q)$ l'ensemble des entiers dont les facteurs sont dans S_q, on a clairement

$$\sum_{n\in N(S_q)} M(n)/n^s = \prod_{p\in S_q} (\sum_{k=0}^{\infty} M(p)^k p^{-ks}) = \prod_{p\in S_q} \left(\frac{1}{1 - M(p)p^{-s}}\right).$$

En $q \to +\infty$ le membre de gauche converge normalement sur tout compact de H_1 vers $\sum_1^\infty \frac{M(n)}{n^s}$. La convergence normale du produit infini sur les compacts est par ailleurs claire par définition, d'où le produit eulérien.

A.3) *En considérant un $\log(\zeta(s))$, montrer que pour $s \in H_1$ tendant vers 1, $\sum_P p^{-s} \sim -\log(s-1)$, mais que pour tout $k \geq 2$ la somme $\sum_P p^{-ks}$ reste bornée.*

Choisissons une détermination continue du logarithme nulle en 1, disons celle sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, de développement $\log(1-z) = -\sum_{\mathbb{N}} z^n/n$. La question précédente montre la décomposition de ζ en le produit eulérien:

$$\zeta(s) = \prod_P \frac{1}{(1 - 1/p^s)},$$

donc

$$\log(\zeta(s)) = \sum_P (\sum_{n\geq 1} 1/np^{ns}).$$

Notons $\phi(s) = \log(\zeta(s)) - \sum_P p^{-s} = \sum_P (\sum_{n\geq 2} 1/np^{ns})$. Si $x := \mathrm{Re}(s) > 1$,

$$|\phi(s)| \leq \sum_P (\sum_{n\geq 2} 1/p^{nx}) = \sum_P p^{-x} (\sum_{n\geq 1} p^{-nx}) = \sum_P p^{-x}(-1 + \frac{1}{(1-p^{-x})})$$

$$= \sum_P \frac{1}{p^x(p^x - 1)} \leq \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$$

Donc ϕ est bornée sur H_1 et par la question précédente $\sum_P p^{-s} \sim -\log(s-1)$. Le même calcul montre maintenant que pour $k \geq 2$ la somme $\sum_P p^{-ks}$ reste bornée quand s tend vers 1.

B) Fonctions L de Dirichlet

Un caractère de Dirichlet χ modulo m est une fonction $\chi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ qui est nulle sur les entiers non premiers à m, et qui se factorise sur les autres par un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ dans $\mathbb{C}^*$. L'ensemble des caractères de Dirichlet mod m forme clairement un groupe pour la multiplication, qu'on notera $\hat{G}(m)$. Pour $\chi \in \hat{G}(m)$ on définit la fonction L de Dirichlet :

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

B.1) *Montrer que cette somme définit bien une fonction holomorphe sur H_1, où elle possède un produit eulérien.*

Notons $\varphi(m) = \mathrm{card}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ l'indicateur d'Euler en m. Pour $\chi \in \hat{G}(m)$ les valeurs non nulles de χ sont des racines $\varphi(m)$-ième de l'unité. La question A.2 donne donc la convergence normale de $L(\chi, 1)$ sur les compacts de H_1, qui y définit donc une fonction holomorphe ayant le produit eulérien

$$L(s, \chi) = \prod_{p \in P} (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}.$$

B.2) *On suppose $\chi = 1$. Montrer que $L(s, 1)$ se prolonge analytiquement sur H_0 avec un pôle simple en $s = 1$.*

Le produit eulérien montre que $L(\chi, 1) = \zeta(s) \prod_{p|m}(1 - p^{-s})$. Le produit (fini) sur les $p \nmid m$ est clairement une fonction entière qui ne s'annule que sur l'axe des imaginaires purs, donc l'étude faite plus haut de $\zeta(s)$ permet de conclure.

B.3) *On suppose $\chi \neq 1$.*

B.3.a) *Soit $0 < a < b$ deux réels et $z = x + iy \in H_0$. En écrivant $e^{-az} - e^{-bz}$ comme une intégrale, montrer que $|e^{-az} - e^{-bz}| \leq |z/x|(e^{-ax} - e^{-bx})$.*

On a

$$|e^{-az} - e^{-bz}| = |z \int_a^b e^{-tz} dt| \leq |z| \int_a^b e^{-tx} dt = \frac{|z|}{x}(e^{-ax} - e^{-bx}).$$

B.3.b) *On considère un série de forme $f(s) = \sum_{\mathbb{N}} a_n/n^s$ (série de Dirichlet) qui converge en $s_0 \in \mathbb{C}$. Montrer qu'elle converge alors uniformément dans tout domaine de forme* $\mathrm{Re}(s) \geq \mathrm{Re}(s_0)$, $|\mathrm{Arg}(s - s_0)| \leq a$ *avec $a < \pi/2$. (On pourra utiliser le lemme d'Abel).*

Puisque $f(s) = \sum_{\mathbb{N}} (a_n/n^{s_0}) n^{-(s-s_0)}$, on peut quitte à changer de variable (et de coefficients) supposer $s_0 = 0$. Dans ce cas, l'hypothèse de convergence est celle de la série numérique $\sum_{\mathbb{N}} a_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $m, m' \geq N$, $|A_{m,m'}| < \varepsilon$, avec $A_{m,m'} = \sum_m^{m'} a_n$. Le lemme d'Abel donne :

$$\sum_{n=m}^{m'} a_n n^{-s} = \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n}(n^{-s} - (n+1)^{-s}) + A_{m,m'} m'^{-s}.$$

En écrivant $n^s = e^{-s \log n}$, la majoration de B.3.a) (toujours avec $x = \mathrm{Re}(s)$) donne pour $m, m' \geq N$:

$$|\sum_{n=m}^{m'} a_n n^{-s}| \leq \varepsilon (1 + |s/x| \sum_{n=m}^{m'-1} (n^{-x} - (n+1)^{-x}))$$

$$\leq \varepsilon(1 + |s/x|(m^{-x} - m'^{-x})) \leq \varepsilon(1 + |s/x|).$$

Fixons $a \in [0, \pi/2[$. Sur $\{s|\mathrm{Re}(s) \geq 0,\ |\mathrm{Arg}(s)| \leq a\}$ on a $|s|/x < 1/\cos a$. L'inégalité précédente pour les sommes partielles implique donc la convergence uniforme.

B.3.c) *Montrer qu'il existe une borne à toutes les sommes partielles* $\sum_a^b \chi(n)$.

Les valeurs non nulles de χ sont des racines $\varphi(m)$-ièmes non toutes triviales de l'unité. Or le fait que pour $k \in \mathbb{N}$ non nul on ait $\sum_{r=0}^{k-1} e^{2ir\pi/k} = 0$ montre la périodicité $\sum_a^b \chi(n) = \sum_a^{b+m} \chi(n)$. Ces sommes partielles ne peuvent donc prendre qu'un nombre fini de valeurs.

B.3.d) *En déduire que $L(s, \chi)$ converge simplement dans H_0, et qu'elle y définit une fonction holomorphe. (On pourra à nouveau utiliser le lemme d'Abel).*

La question B.3.b) montre que si $L(s, \chi) = \sum_{\mathbb{N}} \chi(n) n^{-s}$ converge (simplement) en un point s_0 de $\mathbb{C}$, elle converge sur tout le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s)$, et converge normalement sur tout secteur $\{s|\mathrm{Re}(s) \geq s_0,\ |\mathrm{Arg}(s)| \leq a\}$ pour $a < \pi/2$, cette convergence normale assurant alors l'holomorphie sur le secteur en question. Il suffit donc de montrer qu'elle converge en tout $s_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Fixons un tel $s_0 > 0$. D'après B.3.c), il existe $B > 0$ tel que $|\sum_{n=m}^{m'} \chi(n)| \leq B$ pour tous m, m'. Le lemme d'Abel donne :

$$|\sum_{n=m}^{m'} \chi(n) n^{-s_0}| \leq B(\sum_{n=m}^{m'-1} (n^{-s_0} - (n+1)^{-s_0}) + m'^{-s_0}) = Bm^{-s_0}$$

qui tend bien vers 0 quand m tend vers l'infini.

B.4) *Si $o(p)$ désigne l'ordre de p dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$, $\varphi(m) = \mathrm{card}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ est l'indicateur d'Euler en m, $\omega(p) = \varphi(m)/o(p)$ et X une indétrerminée, montrer que $\prod_{\hat{G}(m)}(1 - \chi(p)X) = (1 - X^{o(p)})^{\omega(p)}$. (On pourra d'abord montrer que pour $\alpha \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ et $\chi_0 \in \hat{G}(m)$, il existe $\omega(\alpha)$ éléments $\chi \in \hat{G}(m)$ vérifiant $\chi(\alpha) = \chi_0(\alpha)$).*

Vérifions d'abord l'assertion de l'indication. Quitte à remplacer χ par $\chi\chi_0^{-1}$, on peut supposer $\chi_0(\alpha) = 1$. On doit donc compter les éléments de $\hat{G}(m)$ qui sont triviaux sur le groupe $\langle\alpha\rangle$, c'est-à-dire les caractères de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*/\langle\alpha\rangle$. Ce dernier, comme groupe abélien fini, se décompose en produit de groupes cycliques : on peut donc se ramener au cas où il est lui-même isomorphe au groupe (additif) $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Mais le groupe des caractères de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ est (non canoniquement) isomorphe au groupe μ_k des racines k-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ (considérer l'application qui à χ associe $\chi(\gamma)$, pour γ un générateur de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$). Le groupe des caractères d'un groupe fini d'ordre λ est donc lui-même d'ordre λ : cela montre l'indication.

On a alors

$$\prod_{\hat{G}(m)} (1 - \chi(p)X) = \prod_{w \in \mu_{o(p)}} \prod_{\chi/\chi(p)=w} (1 - wX) = \prod_{w \in \mu_{o(p)}} (1 - wX)^{\omega(p)}$$

et on conclut en remarquant que $\prod_{w \in \mu_{o(p)}} (1 - wX) = (1 - X^{o(p)})$.

On pose maintenant $\zeta_m(s) = \prod_{\chi\in\hat{G}(m)} L(s,\chi)$.

B.5) *Montrer que* ζ_m *converge dans* H_1*, qu'on a le produit eulérien* $\zeta_m(s) = \prod_{p\nmid m}(1-p^{-o(p)s})^{-\omega(p)}$*, et que* ζ_m *s'écrit sous forme d'une série* $\sum_{\mathbb{N}} \alpha_n/n^s$ *avec* $\alpha_n \in \mathbb{N}$ *pour tout* n.

Puisque $\zeta_m(s)$ est le produit fini des $L(s,\chi)$, la question B.1) donne la convergence sur H_1 et le produit eulérien $\prod_{\chi\in\hat{G}(m)}\prod_{p\in P}(1-\frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$. En intervertissant les produits et en utilisant la question précédente avec $X = p^{-s}$ (noter que $\chi(p) = 0$ si et seulement si p divise m), on obtient l'expression de ζ_m demandée. Le fait que $\zeta_m(s) = \sum_{\mathbb{N}} \alpha_n/n^s$ avec $\alpha_n \in \mathbb{N}$ découle du développement de ce dernier produit eulérien.

B.6) *Soit* $f(s) = \sum_{\mathbb{N}} a_n/n^s$ *une série de Dirichlet à coefficients* a_n *réels, positifs ou nuls, qui converge pour* $\mathrm{Re}(s) > R \in \mathbb{R}$*, et possède un prolongement holomorphe au voisinage de* R*. Montrer qu'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* f *converge pour* $\mathrm{Re}(z) > R-\varepsilon$*. (On pourra considérer un développement de Taylor de* f*).*

Le changement de variable $s \mapsto s-R$ ne change pas l'hypothèse sur les coefficients de f : on peut donc supposer que $R = 0$. On en déduit que f est holomorphe sur un disque fermé de forme $\overline{D(1,1+\varepsilon)}$ avec $\varepsilon > 0$, sur laquelle elle est nécessairement égale à son développement de Taylor en 1. La question B.3.b) assure à nouveau que la convergence de $f(s) = \sum_{\mathbb{N}} a_n e^{-s\log(n)}$ est uniforme au voisinage de tout $s \in H_0$. La dérivée k-ième de f en 1 vaut donc $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-\log n)^k a_n/n$. On en déduit que l'évaluation en $-\varepsilon$ du développement de Taylor en 1 de f, qui converge, est :

$$f(-\varepsilon) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}(-1-\varepsilon)^k[\sum_{n\in\mathbb{N}}(-\log n)^k a_n/n] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}(1+\varepsilon)^k[\sum_{n\in\mathbb{N}}(\log n)^k a_n/n].$$

Cette dernière série double n'étant composée que de termes positifs, on peut intervertir les signes de sommation, d'où :

$$f(-\varepsilon) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n/n \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}((1+\varepsilon)\log n)^k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} e^{(1+\varepsilon)\log n} = \sum a_n n^{\varepsilon}.$$

On en conclut que non seulement f, ou son développement de Taylor en 1, mais aussi *la série de Dirichlet qui la définit*, convergent en $-\varepsilon$. Appliquant encore une fois les résultats de B.3.b) on obtient la convergence de cette série de Dirichlet pour tout s vérifiant $\mathrm{Re}(s) > -\varepsilon$.

B.7) *Montrer que* $L(1,\chi) \neq 0$ *pour tout* $\chi \neq 1$*, et que* ζ_m *a un pôle simple en* $s = 1$.

Par B.2) et B.3.d), si l'on montre la non-annulation en 1 des $L(s,\chi)$ pour $\chi \neq 1$ on obtient le pôle simple de ζ_m. Supposons donc qu'il existe $\chi \neq 1$ pour lequel $L(1,\chi) = 0$. Alors ζ_m est holomorphe sur H_0. Puisque c'est une série de Dirichlet à coefficients réels positifs ou nuls, la question B.6 montre que cette série converge (simplement) sur tout H_0. Or, pour p premier à m, le p-ième facteur du produit eulérien de ζ_m est $(\sum_{k\in\mathbb{N}} p^{-ko(p)s})^{\omega(p)}$ qui domine sur l'axe réel $(\sum_{k\in\mathbb{N}} p^{-k\varphi(m)s})^{\omega(p)}$, donc ζ_m domine $(\sum_{n\in\mathbb{N},\mathrm{pgcd}(n,m)=1} n^{-\varphi(m)s})^{\omega(p)}$. Mais cette dernière série diverge dès $s = 1/\varphi(m)$: contradiction.

C) Le théorème de la progression arithmétique
Pour $\chi \in \hat{G}(m)$ *et* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *on définit*

$$f_\chi(s) = \sum_{p\nmid m} \chi(p)/p^s.$$

C.1) *On suppose* $\chi = 1$*. Montrer que* $f_\chi = f_1$ *est équivalente en* 1 *à* $-\log(s-1)$.

On a $f_1(s) = (\sum_P p^{-s}) - \sum_{p|m} p^s$. La dernière somme est finie, donc le comportement de $(\sum_P \frac{1}{p^s})$ vu en A.3 permet de conclure.

C.2) *On suppose* $\chi \neq 1$*. Montrer, en utilisant le développement d'un* $\log L(s,\chi)$*, que* f_χ *reste bornée au voisinage de* 1.

Choisissons à nouveau la détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ qui s'annule en 1. Alors le produit eulérien de $L(s,\chi)$ donne :

$$\log L(s,\chi) = \sum_P \log \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} = \sum_{1\leq n\in\mathbb{N},\, p\in P} \frac{\chi(p)^n}{np^{sn}} = f_\chi(s) + \sum_{2\leq n\in\mathbb{N},\, p\in P} \frac{\chi(p)^n}{np^{sn}}.$$

La dernière somme reste bornée quand s tend vers 1 par la question A.3 et par B.7 la même chose est vraie pour $\log L(s,\chi)$, d'où le résultat pour f_χ.

C.3) *On note* P_a *l'ensemble des premiers congrus à* a *modulo* m *et on définit* $g_a(s) = \sum_{p\in P_a} 1/p^s$*. Montrer que* $g_a(s) = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi\in\hat{G}(m)} \chi(a)^{-1} f_\chi(s)$.

On calcule :

$$\sum_{\chi\in\hat{G}(m)} \chi(a)^{-1} f_\chi(s) = \sum_{\chi\in\hat{G}(m)} \chi(a)^{-1} \sum_{p\in P} \frac{\chi(p)}{p^s} = \sum_{p\in P} (\sum_{\chi\in\hat{G}(m)} \frac{\chi(a^{-1}p)}{p^s}) \ ;$$

or pour $\alpha \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$, on a $\sum_{\hat{G}(m)} \chi(\alpha) = \varphi(m)$ si $\alpha = 1$, et 0 sinon. (On vérifie en effet que $\sum_{\hat{G}(m)} \chi(\alpha)$ est alors une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}$ de sommes des racines de l'unité d'ordre divisant $\varphi(m)$, et encore une fois chacune de ces sommes est nulle).

C.4) *En déduire le théorème de la progression arithmétique.*

Par C.2, en 1 les f_χ restent bornés pour $\chi \neq 1$, tandis que $f_1(s) \sim -\log(s-1)$ d'après C.1. Donc $g_a(s) \sim \frac{-1}{\varphi(m)} \log(s-1)$ tend vers l'infini quand s tend vers 1. En particulier, P_a est infini.

(On a en fait obtenu un résultat plus précis : $(\sum_{P_a} 1/p^s)/(\sum_P 1/p^s)$ tend vers $1/\varphi(m)$ en 1, quel que soit a dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$. On dit que P_a est de *densité* *de Dirichlet* $1/\varphi(m)$; les nombres premiers sont donc équirépartis, au sens de cette densité, dans les différentes classes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$. Notons enfin qu'on peut montrer que la notion de densité de Dirichlet ne coïncide pas en général avec celle de densité naturelle ou naïve ($= \lim_{X\to\infty} \frac{\{p\in A, p\leq X\}}{\{p\in P, p\leq X\}}$), mais que c'est bien le cas ici, pour $A = P_a$. Le théorème de Dirichlet dit donc que les P_a sont équirépartis, même au sens le plus intuitif).