UE MHT734
Devoir surveillé, Mardi 2 Novembre 2010, 8h00-11h00

Corrigé

Exercice I

I.1. On énonce ici le Théorème II.3.2 du cours : « *soit Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, f une application holomorphe non constante au voisinage d'un point z_0 de Ω, telle que $z \mapsto f(z) - f(z_0)$ s'annule à l'ordre $k(z_0) \geq 1$ en z_0 ; alors, pour tout $\epsilon > 0$, pour tout b suffisamment voisin de $f(z_0)$ et différent de $f(z_0)$ ($0 < |b - f(z_0)| < \delta(\epsilon)$), l'équation $f(z) = b$ admet exactement $k(z_0)$ racines deux-à-deux distinctes dans $D(z_0, \epsilon)$. Ceci implique en particulier que f est ouverte dans la composante connexe de Ω contenant z_0* ».
Comme f est ici supposée injective, f ne saurait être constante au voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{D}$ et, de plus, compte tenu du Théorème de l'application ouverte pré-cité, on a $k(z_0) = 1$, ce qui signifie $f'(z_0) \neq 0$. La dérivée f' ne s'annule pas et f réalise donc (Théorème d'inversion locale, voir le cours de MHT513) un difféomorphisme local entre un voisinage de z_0 dans $\mathbb{D}$ (considéré ici comme un ouvert de $\mathbb{R}^2$) et son image (considérée aussi comme un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f étant pensée ici comme l'application $F = (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$). Puisque f est injective et est localement un C^∞-difféomorphisme, f réalise bien un C^∞-difféomorphisme entre $\mathbb{D}$ et son image $f(\mathbb{D})$.
I.2. La surface de $f(\mathbb{D})$ vaut, d'après la formule de changement de variables dans l'intégrale de Lebesgue sur les ouverts de $\mathbb{R}^2$ (voir par exemple le cours d'intégration MHT512[1] de L3, Proposition 3.5)

$$\iint_{f(D(0,r))} dX dY = \iint_{D(0,r)} |\mathrm{Jac}(F)(x,y)|\, dxdy$$

si $F := (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$. Or, puisque f est holomorphe dans $\mathbb{D}$, il résulte des équations de Cauchy-Riemann ($\partial f/\partial \overline{z} \equiv 0$ dans $\mathbb{D}$) que

$$\mathrm{Jac}(F)(x,y) = |f'(x+iy)|^2, \quad z = x + iy \in \mathbb{D}.$$

On a donc (Théorème de Lebesgue et formule de changement de variables)

$$\iint_{f(\mathbb{D})} dXdY \;=\; \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \iint_{f(D(0,r))} dXdY = \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \iint_{D(0,r)} |f'(x+iy)|^2\, dxdy$$

[1] `http ://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht512.pdf`

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \iint_{D(0,r)} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n\overline{c_n}\ \overline{z}^{n-1}\Big)\, dxdy \\
&= \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} n_1 n_2 c_{n_1}\overline{c_{n_2}} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^{n_1+n_2-1} e^{i(n_1-n_2)\theta}\, d\theta\, d\rho
\end{aligned}
$$

puisque la série entière dérivée $\sum_{n\geq 1} n c_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que la série $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ et converge donc normalement dans $D(0,r)$ pour tout $r \in]0,1[$ (ce qui permet le passage de la ligne 2 à la ligne 3, suivi ensuite de calculs d'intégrales en coordonnées polaires). Or

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n_1-n_2)\theta}\, d\theta = 2\pi \delta_{n_1}^{n_2},$$

où δ_k^l désigne le symbole de Kronecker. Comme $\int_0^r \rho^{2n-1}\, d\rho = r^{2n}/(2n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien

$$\iint_{f(\mathbb{D})} dXdY = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n} |c_n|^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2.$$

Exercice II

II.1.

a) Si g est identiquement nulle, il en est de même de la fonction f et l'on peut considérer que f/g est bien définie comme étant la fonction nulle. Si g n'est pas identiquement nulle, les zéros de g forment un ensemble $V(g)$ de points isolés et la fonction f/g est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus V(g)$ dont les singularités isolées aux points de $V(f)$ sont toutes éliminables : en effet, la fonction $|f/g|$ est bornée par C dans $\mathbb{C} \setminus V(f)$. La fonction f/g est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ dont toutes les singularités isolées sont éliminables, elle se prolonge donc de $\mathbb{C} \setminus V(g)$ à $\mathbb{C}$ tout entier en une fonction entière.

b) La fonction f/g introduite au **(a)** est une fonction entière bornée en module par C. D'après le Théorème de Liouville (corollaire 1 de la Proposition II.2.6), il existe une constante λ telle que $f = \lambda g$. Comme $|f/g| \leq C$, on a $|\lambda| \leq C$.

II.2. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le développement en série entière de f en série de puissances de z ($a_n = f^{(n)}(0)/n!$). D'après les inégalités de Cauchy (Proposition II.2.6), on a, pour tout $R > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| \leq \frac{\sup\limits_{|z|=R} |f(z)|}{R^n} \leq \frac{A + BR^k}{R^n}\,.$$

Si $n > k$, ceci implique (si l'on fait tendre R vers $+\infty$) $a_n = 0$. On en déduit que f est une fonction polynomiale de la variable complexe z, de degré au plus égal à k.

Exercice III

III.1. La fonction φ_w est le quotient de deux fonctions entières, le dénominateur ne s'annulant (éventuellement, c'est-à-dire ici seulement si $w \neq 0$) qu'au point $z = 1/\overline{w} \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. La fonction φ_w (ainsi définie) est donc bien holomorphe dans un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}$; elle est donc holomorphe dans $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$.
Pour $z = e^{i\theta}$, on a

$$|w - e^{i\theta}| = |\overline{w} - e^{-i\theta}| = |e^{i\theta}\overline{w} - 1| = |1 - \overline{w}e^{i\theta}|,$$

ce qui montre que $|\varphi_w(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Par le principe du maximum global (Proposition II.2.8 du cours), on a $|\varphi_w(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, donc $\varphi_w(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ et même en fait $\varphi_w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ puisque φ_w n'est pas constante, donc $|\varphi_w|$ ne saurait atteindre son maximum sur $\overline{\mathbb{D}}$ (en l'occurrence 1) en un point de $\mathbb{D}$.

III.2. On a immédiatement $\varphi_w(w) = 0$ et $\varphi_w(0) = w$. D'autre part, par la règle de Leibniz pour la composée de deux fonctions holomorphes,

$$(\varphi_w \circ \varphi_w)'(0) = \varphi_w'(\varphi_w(0)) \times \varphi_w'(0) = \varphi_w'(w) \times \varphi_w'(0). \qquad (*)$$

Or

$$\varphi_w'(z) = \frac{-(1 - \overline{w}z) + (w - z)\overline{w}}{(1 - \overline{w}z)^2} = \frac{|w|^2 - 1}{(1 - \overline{w}z)^2}.$$

On a donc $\varphi_w'(w) = 1/(1 - |w|^2)$ et $\varphi_w'(0) = |w|^2 - 1$, ce qui implique bien, en reportant dans $(*)$, $(\varphi_w \circ \varphi_w)'(0) = 1$. La fonction $\varphi_w \circ \varphi_w$ est nulle en 0 car $\varphi_w(\varphi_w(0)) = \varphi_w(w) = 0$ et telle que $(\varphi_w \circ \varphi_w)(\mathbb{D}) \subset \varphi_w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. D'après le Lemme de Schwarz[2] (Proposition II.2.12, plus précisément le volet 4 de cette proposition), il existe une constante λ de module 1 telle que

$$\forall\, z \in \mathbb{D},\ (\varphi_w \circ \varphi_w)(z) = \lambda z.$$

En spécifiant $z = w$, il vient $\varphi_w(\varphi_w(w)) = \varphi_w(0) = w = \lambda w$, d'où nécessairement $\lambda = 1$ (si $w = 0$, seul cas un peu particulier, on a aussi en fait $\varphi_w = -\mathrm{Id}$, donc $\varphi_w \circ \varphi_w = \mathrm{Id}$).

[2] On choisit ici la première méthode suggérée dans l'énoncé, plutôt que la seconde, c'est-à-dire le calcul direct de la composée $\varphi_w \circ \varphi_w$ qui aurait tout aussi bien abouti.

III.3. La fonction
$$\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w$$
est bien définie dans $\mathbb{D}$ car $\varphi_w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ (cf. **III.1**) et $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Les deux enchaînements sont donc licites. La composée est holomorphe et l'on a
$$(\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w)(\mathbb{D}) \subset \varphi_{f(w)}[f(\mathbb{D})] \subset \varphi_{f(w)}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}.$$
De plus
$$(\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w)(0) = \varphi_{f(w)}(f(w)) = 0$$
(cf. **III.2**). On peut donc appliquer le Lemme de Schwarz (Proposition II.2.12, plus précisément ici le volet 1 de cette proposition) et l'on a
$$\forall\, z \in \mathbb{D},\ |(\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w)(z)| \leq |z|.$$
En particulier
$$\forall\, z \in \mathbb{D},\ |(\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w)(\varphi_w(z))| \leq |\varphi_w(z)|. \qquad (**)$$
Or, puisque $\varphi_w \circ \varphi_w = \mathrm{Id}$ (cf. **III.2**), $(**)$ se lit
$$\forall\, z \in \mathbb{D},\ |\varphi_{f(w)}(f(z))| \leq |\varphi_w(z)|,$$
qui est exactement l'inégalité demandée (vu les définitions de φ_w et $\varphi_{f(w)}$).

Exercice IV

IV.1. On pose $\Omega_0 = \Omega$. Dire que $\Omega_1 = f(\Omega)$ est relativement compact dans Ω signifie que l'on a l'inclusion $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ (l'adhérence est ici entendue dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$). Supposons (hypothèse inductive) que $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n-1}$. En prenant l'image par f, on a
$$f(\overline{\Omega_n}) \subset f(\Omega_{n-1}) = \Omega_n. \qquad (\dagger)$$
Or
$$\overline{\Omega_{n+1}} = \overline{f(\Omega_n)} \subset f(\overline{\Omega}_n)\ ; \qquad (\dagger\dagger)$$
en effet, si $(z_k)_k$ est une suite de points de Ω_n telle que la suite $(f(z_k))_k$ converge vers un point $Z \in \overline{f(\Omega_n)}$, on peut extraire de $(z_k)_k$ une sous-suite convergente vers un point $z \in \overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n-1}$; comme f est continue, on a $Z = f(z)$; le point Z est donc bien dans $f(\overline{\Omega}_n)$, ce qui conclut à l'inclusion $(\dagger\dagger)$. En combinant $(\dagger)$ et $(\dagger\dagger)$, on a bien montré $\overline{\Omega_{n+1}} \subset \Omega_n$, ce qui correspond à l'hypothèse inductive au cran $n+1$. La preuve par récurrence de $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n-1}$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est ainsi achevée.
On a, compte tenu de la propriété qui vient d'être établie par récurrence,

$$\overline{K} = \overline{\bigcap_{n\geq 1} \Omega_n} \subset \bigcap_{n\geq 1} \overline{\Omega_n} \subset \bigcap_{n\geq 1} \Omega_{n-1} = K \subset \overline{K},$$

et, par conséquent $K = \overline{K}$, ce qui prouve que K est fermé dans $\mathbb{C}$. Comme K est inclus dans Ω_1 et que $\overline{\Omega_1}$ est un compact inclus dans Ω, donc une partie bornée de $\mathbb{C}$, K est une partie fermée bornée de $\mathbb{C}$, donc compacte (incluse dans Ω).

IV.2. On applique ici le Théorème de Montel (corollaire de la Proposition II.2.10 du cours). La suite $(f^{[n]})_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions holomorphes dans Ω uniformément bornée sur tout compact de Ω puisque

$$\forall\, z \in \Omega,\ \forall\, n \geq 1,\ |f^{[n]}(z)| = |f(f^{[n-1]}(z))| \leq \sup\{Z\,;\, Z \in \Omega_1\} < +\infty$$

(Ω_1 est relativement compact dans Ω). On peut donc extraire de la suite $(f^{[n]})_{n\geq 1}$ une sous-suite $(f^{[n_k]})_{k\geq 0}$ uniformément convergente sur tout compact de Ω vers une fonction g holomorphe dans Ω (la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ étant ici une suite strictement croissante d'entiers positifs tendant vers $+\infty$).
Si $z \in \Omega$ et $k \in \mathbb{N}$, tous les $f^{[n_l]}(z)$ pour $l \geq k$ sont dans Ω_{n_k} car, pour $l \geq k$,

$$f^{[n_l]}(z) = f^{[n_k]}(f^{[n_l - n_k]}(z)).$$

Le point $g(z)$, limite de la suite $(f^{[n_k]}(z))_{k\geq 0}$ est donc dans $\overline{\Omega}_{n_k} \subset \Omega_{n_k - 1}$ (cf. **IV.1**). On a donc ainsi

$$g(\Omega) \subset \bigcap_{k\geq 0} \Omega_{n_k - 1}. \qquad (\dagger\dagger\dagger)$$

Comme la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ tend vers $+\infty$ et que les Ω_n, $n \geq 1$, sont emboîtés en décroissant, on a

$$\bigcap_{k\geq 0} \Omega_{n_k - 1} = \bigcap_{n\geq 1} \Omega_n = K. \qquad (\dagger\dagger\dagger\dagger)$$

On vient donc bien de vérifier l'inclusion $g(\Omega) \subset K$ (combiner $(\dagger\dagger\dagger)$) avec $(\dagger\dagger\dagger\dagger)$).

III.3.

a) La suite $(\xi_k)_k$ étant une suite de l'ouvert relativement compact Ω_1 (tel que $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_0 = \Omega$), on peut, puisque toute suite de points d'un compact de $\mathbb{R}^2$ a au moins une valeur d'adhérence, extraire de cette suite une sous-suite $(\xi_{k_p})_p$ qui converge vers un point ξ de $\overline{\Omega_1}$.

b) D'après la Proposition II.2.10 du cours, la suite $((f^{[n_{k_p}]})')_p$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers la fonction holomorphe g' puisque la suite $(f^{[n_{k_p}]})_p$ converge uniformément sur sur tout compact de Ω vers la fonction holomorphe g. Soit ϵ tel que $\overline{D(\xi,\epsilon)} \subset \Omega_1$. D'après l'inégalité des accroissements finis

$$\begin{aligned} |(f^{[n_{k_p}]}(\xi_{k_p}) - g(\xi_{k_p})) - (f^{[n_{k_p}]}(\xi) - g(\xi))| &\leq |\xi_{n_{k_p}} - \xi| \sup_{[\xi_{n_{k_p}},\xi]} |(f^{[n_{k_p}]})' - g'| \\ &\leq |\xi_{n_{k_p}} - \xi| \sup_{\overline{\Omega}_1} |(f^{[n_{k_p}]})' - g'| \end{aligned}$$

dès que p est assez grand pour que $\xi_{n_{k_p}}$ soit dans le disque $D(\xi,\epsilon)$. Comme $\sup_{\overline{\Omega}_1} |(f^{[n_{k_p}]})' - g'|$ est borné indépendamment de p (et tend même vers 0 lorsque p tend vers l'infini), il en résulte

$$\lim_{p\to+\infty} |(f^{[n_{k_p}]}(\xi_{k_p}) - g(\xi_{k_p})) - (f^{[n_{k_p}]}(\xi) - g(\xi))| = 0. \tag{†††††}$$

Mais, par définition de g,

$$\lim_{p\to\infty} f^{[n_{k_p}]}(\xi) = g(\xi).$$

On déduit donc de (†††††) que

$$\lim_{p\to+\infty} |f^{[n_{k_p}]}(\xi_{k_p}) - g(\xi_{k_p})| = 0.$$

Comme g est continue en ξ, on a donc bien, comme demandé,

$$\lim_{p\to+\infty} f^{[n_{k_p}]}(\xi_{k_p}) = g(\xi).$$

Le point z de K s'écrit ainsi $z = f^{[n_{k_p}]}(\xi_{k_p})$ pour tout p et, par passage à la limite en p et utilisation du résultat qui vient d'être établi, on voit que $z = g(\xi)$ pour un certain $\xi \in \overline{\Omega_1} \subset \Omega$. Puisque l'on sait que $g(\Omega) = K$ (cf. **IV.2**) et que l'on vient de montrer que $K \subset g(\Omega)$, on a $K = g(\Omega)$.

IV.4. Comme Ω est connexe, si g n'est pas constante dans Ω, g est ouverte (dernière assertion du Théorème II.3.2, Théorème de l'application ouverte). L'ensemble $g(\Omega) = K$ est donc à la fois un ouvert de Ω et un compact de Ω, ce qui est impossible (sauf si $g(\Omega) = \emptyset$, ce qui est exclus à moins que Ω ne soit vide !) ou que $K = \Omega$. On doit donc avoir, si $g(\Omega)$ n'est pas constante (ce qui exclut le cas $\Omega = \emptyset$), $K = \Omega$.

IV.5. Comme un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ ne saurait être compact (donc fermé) sans être $\mathbb{C}$ tout entier (puisque $\mathbb{C}$ est connexe), il est exclus que K soit égal à Ω ($\mathbb{C}$ n'est pas compact !). L'application g est donc constante et K est réduit à un point.