UE N1MA7104
Devoir surveillé, Jeudi 3 Novembre 2011, 14h00-17h00

Polycopié de cours autorisé
(à l'exclusion de tout autre document)

Exercice 1.

Soit U un ouvert du plan complexe.

a) Soit φ une fonction continue de U dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. Que vaut la limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Big(\frac{1}{\pi \epsilon^2} \iint_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \varphi(x+iy)\, dx\, dy \Big) \ ?$$

b) Soit ψ une fonction de classe C^2 de U dans $\mathbb{C}$. En utilisant seulement la formule de Green-Riemann, prouver que, si $\overline{D}$ est un disque fermé inclus dans U, on a l'égalité :

$$\iint_{\overline{D}} \Big[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \Big] (x+iy)\, dxdy = 0.$$

c) Que peut on conclure de **a)** et **b)** concernant la fonction

$$x+iy \in U \longmapsto \Big[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \Big] (x+iy) \ ?$$

Exercice 2.

Soit $R > 0$. On considère dans $\mathbb{C}^*$ les deux 1-formes différentielles

$$\begin{aligned} z = x+iy \longmapsto \omega_0(z) &:= \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \\ z = x+iy \longmapsto \omega_1(z) &:= xdy - ydx. \end{aligned}$$

a) Ces 1-formes différentielles sont-elles fermées dans $\mathbb{C}^*$? Sont-elles exactes dans $\mathbb{C}^*$?

b) Vérifier

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*, \quad \omega_0(z) = -i \Big(\frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\, d(\log |z|^2) \Big),$$

puis la formule

$$\int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta) = -i \int_{\gamma_R} \overline{\zeta}\, d\zeta,$$

où γ_R désigne le lacet : $t \in [0,1] \longmapsto R\, e^{2i\pi t}$.

c) Calculer de deux manières différentes les intégrales curvilignes

$$\int_{\gamma_R} \omega_0(\zeta) \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta).$$

d) Soit f une fonction à valeurs complexes continue dans $\overline{D(0,R)}$ et holomorphe dans le disque ouvert $D(0,R)$.

– Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma_R} (\overline{\zeta} - f(\zeta))\, d\zeta.$$

– Déduire du calcul précédent l'inégalité

$$\sup_{|\zeta|=R} |\overline{\zeta} - f(\zeta)| \geq R.$$

– Montrer, si l'on suppose de plus $R \geq 1$, que l'on a l'inégalité

$$\sup_{\theta \in [0,2\pi]} |1 - f(e^{i\theta})| \geq 1.$$

Exercice 3.

a) Soit γ le lacet $t \in [0,1] \longmapsto e^{2i\pi t}$. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule :

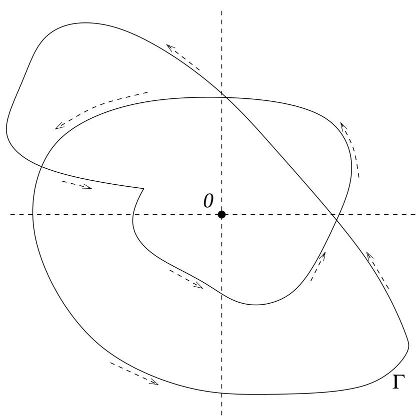
$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{(1+\zeta)^{2n}}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \binom{2n}{n}.$$

b) Déduire du **a)** la valeur du nombre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n \binom{2n}{n}.$$

c) On remplace γ par le lacet continu Γ figuré sur la figure ci-dessous et parcouru une seule fois dans le sens indiqué. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma \frac{(1+\zeta)^{2n}}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta.$$



d) Décrire explicitement, en calculant les valeurs qu'elle prend et en précisant où elle prend ces valeurs, la fonction

$$z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Supp}\Gamma \longmapsto \operatorname{Ind}(\Gamma, z).$$

Exercice 4.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $0 < |z_1| < |z_2|$ et $f\ : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière.

a) Soit R un nombre strictement positif, distinct de $|z_1|$ et $|z_2|$. On note γ_R le lacet : $t \in [0,1] \longmapsto Re^{2i\pi t}$. Calculer, en fonction des valeurs de f aux points z_1 et z_2, l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta$$

(on discutera la valeur de cette intégrale suivant les valeurs de R).

b) On suppose qu'il existe $\epsilon \in]0,1[$ et $C > 0$ tels que la fonction f vérifie

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq C(1 + |z|)^{1-\epsilon}. \tag{$*$}$$

Montrer que

$$\lim_{R \to +\infty} \Big(\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta \Big) = 0.$$

Que peut-on dire alors des valeurs de f en z_1 et z_2 ?

c) Déduire du résultat établi au **b)** que, si f est une fonction entière vérifiant la condition $(*)$ pour un certain $\epsilon \in]0,1[$ et une certaine constante $C > 0$, alors f est nécessairement constante.

Exercice 5.

En justifiant toutes les étapes du raisonnement avec précision, démontrer, pour tout z dans $D(0,1) \setminus \{0\}$, les formules :

$$\begin{aligned}
\frac{z}{\overline{z}} &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\zeta^2}{\zeta - z}\, d\zeta + \lim_{\epsilon \to 0} \Big(\frac{1}{\pi} \iint_{\epsilon \leq |\zeta| \leq 1} \Big(\frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\Big)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)} \Big) \\
&= z^2 + \frac{1}{\pi z} \Big(\iint_{|\zeta| \leq 1} \Big(\frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\Big)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} - \iint_{|\zeta| \leq 1} \Big(\frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\Big)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta} \Big) \\
&= z^2 + \frac{1}{\pi z} \iint_{|\zeta| \leq 1} \Big(\frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\Big)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}
\end{aligned}$$

(où $\gamma\ : t \in [0,1] \longmapsto e^{2i\pi t}$).