UE MHT512

Devoir surveillé, Mardi 2 Novembre 2010, 9h30-12h30

Durée : 3 heures – Documents non autorisés

Exercice 1 (intégrale abstraite.) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré ($\mathcal{T}$ est une tribu sur l'ensemble Ω, μ désigne une mesure positive sur la tribu $\mathcal{T}$), telle que $\mu(\Omega) < +\infty$. Soit f une fonction $(\Omega, \mathcal{T})$-$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les sous-ensembles de Ω définis par $A_n := \{\omega \in \Omega\,;\, |f(\omega)| \geq n\}$ et $B_n := A_n \setminus A_{n+1}$.

a) Montrer que l'on a $A_n \in \mathcal{T}$ et $B_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que f est intégrable sur Ω relativement à la mesure μ si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(B_n) < +\infty$ (on adopte ici la convention $0 \times (+\infty) = 0$).

c) Montrer que f est intégrable sur Ω relativement à la mesure μ si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$.

Exercice 2 (lemme de Cantor). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels tels que la suite de fonctions

$$f_n \ : t \in I \mapsto a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

vérifie $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$ pour tout t dans $I \setminus N$, où N est un sous-ensemble de I de mesure nulle au sens de Lebesgue. On pose pour tout entier positif n, $r_n := \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

a) On suppose que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que $r_{n_l} > 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et que la suite de fonctions $(g_l)_{l\in\mathbb{N}}$, où

$$g_l \ : t \in I \mapsto \frac{a_{n_l} \cos(n_l t) + b_{n_l} \sin(n_l t)}{r_{n_l}}$$

converge simplement sur $I \setminus N$, lorsque l tend vers l'infini, vers la fonction identiquement nulle sur $I \setminus N$.

b) Montrer que $|g_l(t)| \leq 1$ pour tout $t \in I$, pour tout $l \in \mathbb{N}$ et en déduire, si $[\alpha, \beta] \subset I$ avec $\alpha < \beta$, que

$$\lim_{l\to+\infty} \int_{[\alpha,\beta]} g_l^2(t)\, dt = 0.$$

c) Montrer qu'il existe, pour chaque $l \in \mathbb{N}$, un nombre $\varphi_l \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\forall\, t \in I\,,\ g_l(t) = \cos(n_l t + \varphi_l).$$

Calculer explicitement l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta \cos^2(n_l t + \varphi_l)\, dt$$

et vérifier que l'on a

$$\lim_{l\to+\infty} \int_\alpha^\beta g_l^2(t)\, dt = \frac{\beta-\alpha}{2}.$$

d) En confrontant les résultats obtenus au **(b)** et au **(c)**, montrer que l'hypothèse faite au **(a)** est absurde. Que peut-on donc dire des deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 3. On rappelle que l'on a (on l'admet)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-t^2/2}\, dt = 1.$$

a) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, pourquoi la fonction $F_\alpha\ : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^\infty \exp(-k^\alpha t^2/2) \in [0,\infty]$ est-elle mesurable (relativement aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}([0,\infty])$) ?
b) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ cette même fonction F_α est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure $\mu_\mathbb{R}$ de Lebesgue sur $\mathbb{R}$? Vérifier que l'on a la formule

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \int_\mathbb{R} F_\alpha(t)\, d\mu_\mathbb{R}(t) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} F_\alpha(t)\, dt = \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{\alpha/2}} \in [0,\infty].$$

c) Soit $\epsilon > 0$. En utilisant **(b)** et l'inégalité de Markov, montrer que l'on a $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \mu_\mathbb{R}(\{F_\alpha(t) > e^{-t^2/2} + \epsilon\}) = 0$.

Exercice 4.
a) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, mesurable, dérivable en presque tout point (au sens de Lebesgue) de l'intervalle ouvert I. Vérifier que la fonction g définie sur I par $g(t) = f'(t)$ en tout point $t \in I$ où f est dérivable, par $g(t) = 0$ ailleurs, est encore une fonction mesurable de I dans $\mathbb{R}$.
b) On suppose de plus qu'il existe une constante strictement positive M telle que $|f(t_1) - f(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|$ pour tout $t_1, t_2 \in I$. Montrer que f' est intégrable (relativement à la mesure de Lebesgue) sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans I, puis, en utilisant la continuité de f et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, que, pour toute suite de réels $(\tau_k)_{k\geq 0}$ tendant vers 0,

$$f(\beta) - f(\alpha) = \lim_{k\to+\infty} \int_{[\alpha,\beta]} \frac{f(t+\tau_k) - f(t)}{\tau_k}\, dt = \int_{[\alpha,\beta]} g(t)\, dt = \int_{[\alpha,\beta]} f'(t)\, dt.$$