UE MHT836 - Printemps 2011

Devoir surveillé, Mardi 1 Mars 2011, 9h00-12h00

Durée : 3 heures – Documents non autorisés

Question de cours. On rappelle qu'une distribution T (à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite d'*ordre fini* s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, K \subset\subset \Omega,\ \exists C(K) \geq 0, \quad \text{t.q} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{K}),\ |\langle T, \varphi\rangle| \leq C(K)\, N_{K,p}(\varphi).$$

Montrer qu'une distribution T de support compact $K_0 \subset\subset \Omega$ est d'ordre fini. Que peut-on dire de T lorsque K_0 est un singleton ? [*on ne demande pas pour ce dernier point de démonstration, seulement un énoncé*].

Exercice 1.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que les séries

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j \varphi(2^j) \qquad \& \qquad \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \varphi(2^{-j})$$

sont convergentes.

2. Montrer que

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longmapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^j \varphi(2^j)$$

définit une distribution T d'ordre 0 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que toute fonction de classe C^N sur $\mathbb{R}$ se développe en série de Taylor avec reste intégral sous la forme

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(l)}(0)}{l!}\, x^l + \frac{x^N}{(N-1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{N-1} \varphi^{(N)}(\tau x)\, d\tau.$$

1. Construire une distribution T_N d'ordre au plus N sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R}),\ \langle T_N, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x^N}\, dx.$$

Indication. *On cherchera l'action de* T_N *sous la forme*

$$\langle T_N, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\Big[\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x^N}\,dx - R_N[\varphi;\epsilon]\Big]$$

où l'on explicitera le terme correctif $R_N[\varphi;\epsilon]$.

2. Vérifier $x^N\cdot T_N = 1$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}$, 1 désignant ici la distribution fonction correspondant à la fonction presque partout égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer qu'une distribution $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $x^N\cdot T = 0$ (au sens des distributions sur $\mathbb{R}$) est nécessairement de support l'origine. En conclure que T est de la forme $T = P(d/dx)[\delta_0]$, où $P\in\mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré au plus $N-1$.

Indication : *on pourra s'appuyer sur le résultat qui était demandé à la fin de la question de cours proposée en tête du texte.*

4. Trouver toutes les distributions $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $x^N\cdot T = 1$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}$.

Problème (autour du laplacien perturbé).

On considère, pour $a>0$, la fonction

$$f_a\ : (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}\longmapsto\frac{\exp(-a\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

1. Montrer que f_a est une fonction localement intégrable (définie presque partout) sur $\mathbb{R}^3$ et définit donc une distribution fonction T_a dans $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer qu'il existe, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, deux constantes réelles α_n et β_n (que l'on déterminera en fonction de n) telles que la fonction :

$$f_{a,n} = f_a\chi_{\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}>1/n\}} + \Big(\alpha_n(x^2+y^2+z^2)+\beta_n\Big)\,\chi_{\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leq 1/n\}}$$

soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

Indication : *on remarquera que toutes les fonctions impliquées dans l'expression de* $f_{a,n}$ *sont radiales, et que le problème se ramène par conséquent à ajuster* α_n *et* β_n *de manière à réaliser le raccord* C^1 *de deux fonctions d'une variable au point* $r=1/n$.

3. Montrer que, pour tout $n\geq 1$, $0\leq f_{a,n}\leq f_a$ dans $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, puis que la suite de fonctions $(f_{a,n})_{n\geq 1}$ tend simplement vers f_a dans $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

En déduire que, l'on a, T_a et $T_{a,n}$ désignant les distributions fonction sur $\mathbb{R}^3$ correspondant respectivement à f_a et $f_{a,n}$,

$$\lim_{n\to+\infty} T_{a,n} = T_a$$

au sens du principe de convergence des suites dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

4. On rappelle que le Laplacien d'une fonction radiale

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longmapsto g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

(avec g de classe C^2 dans $]0,+\infty[$) vaut $g''(r) + 2g'(r)/r$. En utilisant ce résultat, calculer $(\Delta - a^2\mathrm{Id})[f_a]$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

5. On rappelle la formule de Green-Ostrogradski : si F et G sont deux fonctions de classe C^2 au voisinage d'un fermé borné $\overline{U}$ à frontière C^1 de $\mathbb{R}^3$,

$$\iiint_{\overline{U}} (F\Delta G - G\Delta F)\, dxdydz = \iint_{\partial U} \Big\langle F\nabla G - G\nabla F, n_{\mathrm{ext}}(x,y,z)\Big\rangle d\sigma_{\partial U},$$

où $d\sigma_{\partial U}$ désigne la mesure de Lebesgue induite sur $\partial\overline{U}$ par la mesure euclidienne sur $\mathbb{R}^3$ (Δ désigne le Laplacien, ∇ la prise de gradient). Soit $R > 0$ et $\varphi \in \mathcal{D}(B((0,0,0),R),\mathbb{R})$. Soit $n \geq 1$. En découpant l'intégrale

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} (\Delta - a^2\mathrm{Id})[f_{a,n}](x,y,z)\, \varphi(x,y,z)\, dxdydz$$

en une intégrale sur la boule fermée $\overline{B((0,0,0),1/n)}$ et l'intégrale sur la couronne fermée $\{1/n \leq \sqrt{x^2+y^2+y^2} \leq R\}$, puis en appliquant à chacune de ces intégrales la formule de Green-Ostrogradski rappelée précédemment, montrer que

$$\Big\langle (\Delta - a^2\mathrm{Id})[T_{a,n}], \varphi \Big\rangle =$$
$$\iiint_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leq 1/n} \Big(6\alpha_n - a^2\Big(\alpha_n(x^2+y^2+z^2) + \beta_n\Big)\Big)\, \varphi(x,y,z)\, dxdydz.$$

En déduire

$$(\Delta - a^2\mathrm{Id})[T_a] = -4\pi\delta_{(0,0,0)}$$

au sens des distributions sur $\mathbb{R}^3$.

FIN