UE MHT512

Devoir surveillé, Mardi 20 Octobre 2009, 9h00-12h00

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice 1 (intégrale des fonctions positives)

Pour chacune des trois questions, on citera soigneusement le résultat du cours utilisé.

a) *Vérifier, pour tout $p > 0$, la formule*

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x} \log\Big(\frac{1}{x}\Big)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+k)^2}.$$

On sait que, pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

(somme d'une série géométrique de raison $x \in [0,1[$). D'après le théorème de convergence monotone de Beppo Levi (théorème 2.1 du cours, les fonctions à intégrer sont toutes positives et on a affaire à l'intégrale de la somme d'une série de fonctions positives, comme dans l'exemple 2.1 des notes), on a, pour tout $k \geq 0$,

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x} \log\Big(\frac{1}{x}\Big)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^{k+p-1} \log(1/x)\, dx. \tag{1}$$

En intégrant par parties (cours de MISMI !), on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^1 x^{k+p-1} \log(1/x)\, dx &= -\int_\epsilon^1 x^{k+p-1} \log x \, dx \\
&= -\Big[\frac{x^{k+p}}{k+p} \times \log x\Big]_\epsilon^1 + \int_\epsilon^1 \frac{x^{k+p}}{k+p}\, \frac{dx}{x} \\
&= -\Big[\frac{x^{k+p}}{k+p} \times \log x\Big]_\epsilon^1 + \frac{1}{k+p} \int_\epsilon^1 x^{k+p-1}\, dx \\
&= -\Big[\frac{x^{k+p}}{k+p} \times \log x\Big]_\epsilon^1 + \frac{1}{(k+p)^2} (1-\epsilon^{k+p}) \\
&= \frac{\epsilon^{k+p} \log \epsilon}{k+p} + \frac{1}{(k+p)^2} (1-\epsilon^{k+p})\,.
\end{aligned}$$

Si l'on fait tendre ϵ vers 0, on trouve, comme $p > 0$ (et puisque les fonctions puissances imposent leur limite au logarithme)

$$\int_0^1 x^{k+p-1} \log(1/x)\, dx = \frac{1}{(k+p)^2}. \tag{2}$$

On a donc la formule voulue en additionnant pour tout $k \in \mathbb{N}$ les identités (2), puis en utilisant pour conclure la formule (1).

b) *Montrer que la fonction*

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 + 3^{2n}(x - 3^n)^2}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ *(par rapport à la mesure de Lebesgue) et que son intégrale vaut* 3π.

On sait que la primitive de la fonction $x \mapsto 1/(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \arctan x$ (cours de MISMI !). Pour $n \in \mathbb{N}$, on a (invariance de la mesure de Lebesgue par translation, puis changement élémentaire de variable par homothétie)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + 3^{2n}(x-3^n)^2}\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+3^{2n}u^2}\, du = \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{1+(3^n u)^2} \\ &= \frac{1}{3^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{3^n} [\arctan v]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{3^n}\,. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{2^n}{1+3^{2n}(x-3^n)^2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \pi}{3^n} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n = \frac{1}{1-2/3} = 3\pi.$$

Or, toujours d'après le théorème de Beppo-Levi (on a affaire à une série de fonctions positives, comme dans l'exemple 2.1 des notes de cours), on a

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^{2n}(x-3^n)^2} \Big)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{2^n}{1+3^{2n}(x-3^n)^2}\, dx = 3\pi < +\infty.$$

Cela répond aux deux questions posées ici.

c) *Montrer la formule :*

$$\lim_{x \to 0^+} \Big(\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \Big) = +\infty.$$

Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite tendant vers 0 en décroissant, la suite de fonctions $t \in]0,1] \mapsto t^{x_n-1}e^{-t}$ converge en croissant vers $t \in]0,1] \mapsto e^{-t}/t$. D'après le théorème de Beppo-Levi (il n'y avait que lui à invoquer dans tout cet exercice), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^{x_n-1}e^{-t}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

Or, comme $e^{-t} \geq 1/e$ sur $[0,1]$, on a

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt \geq \frac{1}{e}\int_0^1 \frac{dt}{t} = +\infty\,.$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty t^{x_n-1}e^{-t}\,dt \geq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^{x_n-1}e^{-t}\,dt = +\infty\,.$$

D'où le résultat demandé, puisque ceci est vrai pour toute suite $(x_n)_n$ tendant vers 0 en décroissant.

Exercice 2 (mesure)

a) *Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, et μ une mesure positive sur $(\Omega,\mathcal{T})$. Soit $(A_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ une collection d'éléments de $\mathcal{T}$. On note A l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité de A_q, $q\in\mathbb{N}^*$. Pourquoi A est-il mesurable ? Montrer que*

$$\Big(\sum_{q=1}^\infty \mu(A_q) < \infty\Big) \Longrightarrow \Big(\mu(A) = 0\Big).$$

Dire que $\omega \in A$ équivaut à dire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un entier $q \geq n$ tel que $\omega \in A_q$. On a donc

$$A = \bigcap_{n=0}^\infty \bigcup_{q=n}^\infty A_q.$$

L'ensemble A est donc intersection décroissante d'unions dénombrables d'éléments de $\mathcal{T}$. Comme $\mathcal{T}$ est une tribu (donc en particulier invariante par union et intersection dénombrable), $A\in\mathcal{T}$, ce qui signifie que A est mesurable. On a d'autre part, par monotonie et σ-sous additivité de la mesure, pour tout $n \geq \mathbb{N}$,

$$\mu(A) \leq \mu\Big(\bigcup_{q=n}^\infty A_q\Big) \leq \sum_{q=n}^\infty \mu(A_q). \tag{3}$$

Si la série $[\mu(A_q)]_{q\geq 0}$ est convergente, la suite des restes $(\sum_{q\geq n}\mu(A_q))_{n\geq 0}$ tend vers 0. On a, en faisant tendre n vers l'infini dans (3), $\mu(A)=0$. Ceci prouve l'implication demandée.

b) *Soit $\epsilon>0$, $q\in\mathbb{N}^*$ et $E_{\epsilon,q}$ l'ensemble des nombres réels x tels qu'il existe un entier $p\in\mathbb{Z}$ avec $|x-p/q|\leq 1/q^{2+\epsilon}$. Montrer que la mesure de Lebesgue de $E_{\epsilon,q}\cap[0,1]$ est majorée par $2q/q^{2+\epsilon}=2/q^{1+\epsilon}$. Déduire du* **a)** *que l'ensemble des nombres réels de $[0,1]$ qui appartiennent à une infinité de $E_{\epsilon,q}$, $q\in\mathbb{N}^*$, est un borélien de mesure nulle. En conclure que l'ensemble des nombres réels appartenant à une infinité de $E_{\epsilon,q}$, $q\in\mathbb{N}^*$, est aussi un borélien de mesure de Lebesgue nulle.*

Supposons d'abord $q\geq 2$. Si $x\in E_{\epsilon,q}\cap[0,1]$, on a nécessairement :

$$x\in\Big[0,\frac{1}{q^{2+\epsilon}}\Big]\cup\Big(\bigcup_{p=1}^{q-1}\Big[\frac{p}{q}-\frac{1}{q^{2+\epsilon}},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^{2+\epsilon}}\Big]\Big)\cup\Big[1-\frac{1}{q^{2+\epsilon}},1\Big]. \qquad (4)$$

La mesure de l'union des intervalles impliqués dans l'union figurant au second membre de (4) est majorée par la somme des mesures de ces intervalles, soit

$$\frac{1}{q^{2+\epsilon}}+\sum_{p=1}^{q-1}\frac{2}{q^{2+\epsilon}}+\frac{1}{q^{2+\epsilon}}=\frac{2q}{q^{2+\epsilon}}=\frac{2}{q^{1+\epsilon}}.$$

Si $q=1$, on a $E_{\epsilon,1}=\mathbb{R}$; la mesure de $E_{1,\epsilon}\cap[0,1]$ est égale à $1<2/q^{1+\epsilon}=2$. Pour tout $q\geq 1$, la mesure de $E_{\epsilon,1}\cap[0,1]$ est donc bien majorée par $2/q^{1+\epsilon}$. On pose

$$A_q=E_{\epsilon,q}\cap[0,1].$$

Comme $\sum_q\mu(A_q)<+\infty$ (puisque la série de Riemann $\sum_q 2/q^{1+\epsilon}$ converge et que l'on a la majoration $\mu(A_q)\leq 2/q^{1+\epsilon}$), il résulte du **a)** que l'ensemble des éléments de $[0,1]$ appartenant à une infinité de A_q est de mesure nulle. Soit $p\in\mathbb{Z}$. Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, l'ensemble des points de $[p,p+1]$ appartenant à une infinité d'ensembles $E_{\epsilon,q}$ est aussi de mesure nulle. Comme

$$\mathbb{R}=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}[p,p+1]$$

et donc que

$$E_{\epsilon,q}=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}(E_{\epsilon,q}\cap[p,p+1]),$$

l'ensemble F_ϵ des $x\in\mathbb{R}$ appartenant à une infinité de $E_{\epsilon,q}$ est inclus dans l'union, pour $p\in\mathbb{Z}$, de l'ensemble $F_{\epsilon,p}$ des x appartenant à une infinité de

$E_{\epsilon,q} \cap [p, p+1]$. Les ensembles $F_{p,\epsilon}$, $p \in \mathbb{Z}$, sont tous de mesure nulle, l'union des ensembles $F_{p,\epsilon}$ pour $p \in \mathbb{Z}$ est encore de mesure nulle. La mesure de l'ensemble F_ϵ est majorée par celle de l'union des $F_{p,\epsilon}$, qui est de mesure nulle. On a donc $\mu(F_{p,\epsilon}) = 0$ comme demandé.

Problème (mesure de Lebesgue)

1) *On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la mesure de Lebesgue du bord d'un pavé borné $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (on ne le suppose ni nécessairement ouvert, ni nécessairement fermé) est égale à 0. Montrer que la mesure du bord d'une union finie de tels pavés supposés disjoints deux à deux est aussi égale à 0.*

La mesure de l'« hyperplan » H de $\mathbb{R}^n$ défini par $H := \{x_1 = 0\}$ est nulle. On a en effet

$$H \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq 1} ([-1/n, 1/n] \times [-N, N]^{n-1}). \tag{5}$$

Or, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \lambda\Big(\bigcap_{n \geq 1} ([-1/n, 1/n] \times [-N, N]^{n-1})\Big) &= \lim_{n \to +\infty} \lambda([-1/n, 1/n] \times [-N, N]^{n-1}) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{2(2N)^{n-1}}{n} = 0. \end{aligned}$$

On a donc bien, d'après (5), $\lambda(F) = 0$. Par invariance de la mesure de Lebesgue par translation, la mesure de tout hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\{x_j = C\}$ pour $C \in \mathbb{R}$ est égale à 0. Or le bord de tout pavé borné de $\mathbb{R}^n$ est contenue dans une union finie de tels hyperplans. C'est donc un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Si $P_1, ..., P_N$ sont N pavés disjoints, l'intérieur de l'union des P_k est égale à l'union des intérieurs des P_k. L'adhérence de l'union des P_k est égale à l'union des adhérences des P_k. On a

$$\begin{aligned} \partial(P_1 \cup \ldots \cup P_N) &= \overline{P_1 \cup \ldots \cup P_N} \setminus \mathrm{int}(P_1 \cup \ldots \cup P_N) \\ &\subset \bigcup_{k=1}^{N} (\overline{P}_k \setminus \mathrm{int}\,(P_k)) = \bigcup_{k=1}^{N} \partial P_k. \end{aligned}$$

Comme la mesure du bord de chaque P_k est nulle, il en est de même pour celle du bord de l'union des P_k.

2) *Soit $R > 0$ (on le conserve jusqu'à la fin du problème). Montrer que si A est un borélien de $\mathbb{R}^n$ inclus dans la boule ouverte $B(0, R)$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert U_ϵ tel que $A \subset U_\epsilon \subset B(0, R)$ et que $\lambda(U_\epsilon \setminus A) \leq \epsilon/2$ (citer précisément le résultat du cours utilisé ici).*

Comme A est intégrable (car mesurable et borné), on peut appliquer le critère d'intégrabilité du cours (proposition 1.4 des notes) : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert U_ϵ contenant A, un compact K_ϵ inclus dans K, tels que $\lambda(U_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon/2$. Comme on a

$$U_\epsilon \setminus A \subset U_\epsilon \setminus K_\epsilon\,,$$

on a $\lambda(U_\epsilon \setminus A) \leq \lambda(U_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon/2$.

3) *Montrer que si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ inclus dans la boule $B(0,R)$ et si $\epsilon > 0$, il existe un ensemble $V_\epsilon \subset U$ s'écrivant comme union finie de pavés disjoints deux à deux et tel que $\lambda(U \setminus V_\epsilon) < \epsilon/2$.*

Tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est union finie ou dénombrable de pavés disjoints P_k. Si l'union est finie, on prend $V_\epsilon = U$. Si l'union n'est pas finie, on peut numéroter les P_k, $k = 1, 2, \ldots$. L'ouvert U est limite croissante des ensembles

$$V_k = \bigcup_{l=1}^{k} P_l\,,\ \ k = 1, 2, \ldots$$

(ces ensembles sont tous unions finies de pavés disjoints). On a donc (d'après les propriétés des mesures)

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda(V_k) = \lambda(U).$$

Pour k assez grand

$$\lambda(U \setminus V_k) = \lambda(U) - \lambda(V_k) < \epsilon/2.$$

Il suffit donc de prendre $V_\epsilon = V_k$ pour k assez grand pour réaliser l'inégalité demandée.

4) *Déduire des questions* **2)** *et* **3)** *que si A est un borélien inclus dans la boule $B(0,R)$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble V_ϵ, union finie de pavés disjoints deux à deux, avec $V_\epsilon \subset B(0,R)$ et $\lambda\Big((V_\epsilon \setminus A) \cup (A \setminus V_\epsilon)\Big) \leq \epsilon$.*

On construit U_ϵ comme à la question **2)**. On peut faire en sorte que U_ϵ soit inclus dans $B(0,R)$ (en remplaçant par exemple U_ϵ par $U_\epsilon \cap B(0,R)$). On construit ensuite V_ϵ à partir de U_ϵ comme à la question **3)**. On a bien $V_\epsilon \subset U_\epsilon \subset B(0,R)$ et

$$A \setminus V_\epsilon \subset U_\epsilon \setminus V_\epsilon\,,$$

donc

$$\lambda(A \setminus V_\epsilon) \leq \lambda(U_\epsilon \setminus V_\epsilon) < \epsilon/2. \tag{6}$$

D'autre part
$$V_\epsilon \setminus A \subset U_\epsilon \setminus A\,,$$
ce qui implique
$$\lambda(V_\epsilon \setminus A) \leq \lambda(U_\epsilon \setminus A) \leq \epsilon/2. \tag{7}$$
En additionnant (6) et (7), on obtient
$$\lambda\Big((V_\epsilon \setminus A) \cup (A \setminus V_\epsilon)\Big) = \lambda(A \setminus V_\epsilon) + \lambda(V_\epsilon \setminus A) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

5) *Soit $V \subset B(0,R)$ un ensemble s'écrivant comme union finie de pavés disjoints deux à deux, et $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ tendant vers* 0. *En utilisant le résultat établi au* **1)**, *montrer que, si χ_V désigne la fonction caractéristique de V, on a, pour λ-presque tout x dans $\mathbb{R}^n$,*
$$\lim_{k\to+\infty} \chi_V(x+\tau_k) = \chi_V(x).$$

Si x' est un point intérieur à V, il existe une boule ouverte $B(x', r_{x'})$ telle que $x' \in B(x', r_{x'}) \subset V$; la limite, lorsque k tend vers l'infini, de la suite $(\chi_V(x'+\tau_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est égale à $1 = \chi_V(x')$ puisque cette suite devient stationnaire à la valeur 1 pour k assez grand (dès que $\tau_k < r_{x'}$). Si x'' est un point intérieur à $\mathbb{R}^n \setminus V$, il existe une boule ouverte $B(x'', r_{x''})$ telle que $x'' \in B(x'', r_{x''}) \subset \mathbb{R}^n \setminus V$; la limite, lorsque k tend vers l'infini, de la suite $(\chi_V(x'+\tau_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est égale à $0 = \chi_V(x'')$ puisque cette suite devient stationnaire à la valeur 0 pour k assez grand (dès que $\tau_k < r_{x''}$). Comme le bord de V (i.e. l'ensemble des points qui ne sont ni intérieurs à V, ni intérieurs à $\mathbb{R}^n \setminus V$) est de mesure nulle (d'après la question **1)**), on a bien, pour presque tout x dans $\mathbb{R}^n$,
$$\lim_{k\to+\infty} \chi_V(x+\tau_k) = \chi_V(x).$$

6) *Déduire du théorème de convergence monotone que si $(f_k)_{k\geq 0}$ est une suite de fonctions mesurables positives sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, on a*
$$\lim_{k\to+\infty} \inf_{l\geq k} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_l(x)\, d\lambda(x)\Big) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\lim_{k\to+\infty} \inf_{l\geq k} f_l(x)\Big)\, d\lambda(x).$$

La suite $(\inf_{l\geq k} f_l)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurable croissante, tendant <u>en croissant</u> vers la fonction
$$x \mapsto f(x) := \lim_{k\to+\infty} \inf_{l\geq k} f_l(x).$$

D'après le théorème de convergence monotone de Beppo Levi (théorème 2.1 du cours), on a donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda(x) = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \inf_{l\geq k} f_l(x)\, dx. \tag{8}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a, par la propriété de monotonie de l'intégrale,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \inf_{l\geq k} f_l(x)\, dx \leq \inf_{l\geq k} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_l(x)\, dx \Big).$$

On en déduit l'inégalité :

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \inf_{l\geq k} f_l(x)\, dx \leq \lim_{k\to+\infty} \inf_{l\geq k} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_l(x)\, d\lambda(x) \Big). \tag{9}$$

En combinant (8) et (9), on obtient l'inégalité demandée[1].

7) *En utilisant le résultat établi en* **5)**, *montrer que*

$$\lim_{k\to+\infty} \inf_{l\geq k} \Big(\int_{B(0,2R)} \Big(2 - |\chi_V(x+\tau_l) - \chi_V(x)|\Big)\, d\lambda(x) \Big) \geq 2\lambda(B(0,2R)).$$

En déduire

$$\lim_{k\to+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_V(x+\tau_k) - \chi_V(x)|\, d\lambda(x) \Big) = 0.$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_l(x) = 2 - |\chi_V(x+\tau_l) - \chi_V(x)| \chi_{B(0,2R)}(x)\,.$$

D'après le résultat établi à la question **5)**, la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers la fonction $2\chi_{B(0,2R)}$. C'est d'autre part une suite de fonctions mesurables positives puisque V est mesurable et que

$$|\chi_V(x+\tau_l) - \chi_V(x)| \leq |\chi_V(x+\tau_l)| + |\chi_V(x)| \leq 1 + 1 = 2$$

d'après l'inégalité triangulaire. En appliquant le résultat établi à la question **6)** à la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on en déduit

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to+\infty} \inf_{l\geq k} \Big(\int_{B(0,2R)} \Big(2 - |\chi_V(x+\tau_l) - \chi_V(x)|\Big)\, d\lambda(x) \Big) \\ \geq\ & \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0,2R)}(x)\, d\lambda(x) = 2\lambda(B(0,2R)). \end{aligned}$$

[1] Noter que cette question est quasiment une question de cours (il s'agissait ici de retrouver la preuve du lemme de Fatou (théorème 2.2 du cours) à partir du théorème de convergence monotone de Beppo Levi).

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to+\infty} \sup_{l\geq k} \Big(\int_{B(0,2R)} |\chi_V(x+\tau_l) - \chi_V(x)|\, d\lambda(x) \Big) \\
\leq\ & 2\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0,2R)}(x)\, d\lambda(x) - 2\lambda(B(0,2R)) = 0.
\end{aligned}$$

Ceci implique bien

$$\lim_{k\to+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_V(x+\tau_k) - \chi_V(x)|\, d\lambda(x) \Big) = 0.$$

Le résultat demandé est établi[2].

8) *En combinant les résultats obtenus aux questions* **4)** *et* **7)**, *montrer que si A est un borélien de $\mathbb{R}^n$ inclus dans la boule ouverte $B(0,R)$, on a*

$$\lim_{k\to+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_A(x+\tau_k) - \chi_A(x)|\, d\lambda(x) \Big) = 0.$$

On fixe $\epsilon > 0$ et on introduit l'union finie de pavés V_ϵ construite à la question **4)**. Il résulte de l'inégalité triangulaire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_A(x+\tau_k) - \chi_A(x)|\, d\lambda(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_A(x+\tau_k) - \chi_{V_\epsilon}(x+\tau_k)|\, d\lambda(x) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{V_\epsilon}(x+\tau_k) - \chi_{V_\epsilon}(x)|\, d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{V_\epsilon}(x) - \chi_A(x)|\, d\lambda(x).
\end{aligned}$$

D'après l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_A(x+\tau_k) - \chi_{V_\epsilon}(x+\tau_k)|\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{V_\epsilon}(x) - \chi_A(x)|\, d\lambda(x).$$

D'autre part

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{V_\epsilon}(x) - \chi_A(x)|\, d\lambda(x) \leq \lambda(A \setminus V_\epsilon) + \lambda(V_\epsilon \setminus A) \leq \epsilon.$$

On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_A(x+\tau_k) - \chi_A(x)|\, d\lambda(x) \leq \epsilon + \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{V_\epsilon}(x+\tau_k) - \chi_{V_\epsilon}(x)|\, d\lambda(x).$$

[2] Noter que cette question est directement inspirée de la preuve du théorème de convergence dominée de Lebesgue (théorème 2.3 du cours) à partir du lemme de Fatou. Comme le théorème de Lebesgue n'était pas au programme du DS, l'exercice proposé ici (questions **6)** et **7)**) consistait à vous guider pour refaire cette preuve.

Si nous fixons $\epsilon > 0$ et que nous faisons tendre k vers $+\infty$, il résulte de la question **7)** que

$$\limsup_{k\to+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_A(x+\tau_k) - \chi_A(x)| \, d\lambda(x) \Big) \leq \epsilon + 0 = \epsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a bien

$$\lim_{k\to+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_A(x+\tau_k) - \chi_A(x)| \, d\lambda(x) \Big) = 0.$$