Semestre 5, Année 2010-2011 SESSION 2

UE : MHT512

Date : 7 Juin 2011, 14h-17h Durée : 3h

Énoncé (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice 1

1. *Étant données deux fonctions mesurables positives sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et un nombre réel $p > 1$, énoncer l'inégalité de Hölder. Que se passe-t'il lorsque $p = 1$?*

Soit p l'exposant conjugué de p ($1/p+1/q=1$). Si f et g sont deux fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ dans $[0,\infty]$, équipé de la tribu borélienne $\mathcal{B}$, on a

$$\int_\Omega fg\, d\mu \leq \Big(\int_\Omega f^p\, d\mu\Big)^{1/p} \times \Big(\int_\Omega g^q\, d\mu\Big)^{1/q}. \tag{1}$$

Si $p=1$, l'inégalité (1) devient

$$\int_\Omega fg\, d\mu \leq \|g\|_\infty \times \int_\Omega f\, d\mu,$$

où $\|g\|$ désigne le sup essentiel de la fonction M, *i.e.*

$$\|g\|_\infty := \inf\{M \in [0,\infty]\,;\, g \leq M\ \mu - \text{presque partout}\}.$$

2. *Montrer l'ensemble $E := \{(u,y) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}\,;\, y \leq \log u\}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$. Montrer que ceci implique que toute combinaison barycentrique $t_1M_1 + \cdots + t_NM_N$ (avec $t_j \geq 0$, $t_1 + \cdots + t_N = 1$) de points $M_j = (u_j, y_j)$ de E est encore un point de E. En déduire que si $u_1, ..., u_N$ sont N nombres strictement positifs et $t_1, ..., t_N$, N nombres réels strictement positifs tels que $t_1 + \cdots + t_N = 1$, on a*

$$\sum_{k=1}^N t_k \log u_k \leq \log\Big(\sum_{k=1}^N t_k u_k\Big).$$

En déduire

$$\prod_{j=1}^N u_k^{t_k} \leq \sum_{k=1}^N t_k u_k. \tag{†}$$

La fonction logarithme népérien log est une concave sur $]0,\infty[$ car c'est une fonction de classe C^∞ dont la dérivée seconde ($t \mapsto -1/t^2$) est strictement négative sur $]0,\infty[$. L'ensemble E (qui correspond à l'ensemble des points de $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ situés sur ou au dessous du graphe de cette fonction sur $]0,\infty[$) est donc convexe. On en déduit que tout barycentre $M = t_1M_1 + \cdots + t_NM_N$ ($t_j \geq 0$, $t_1 + \cdots + t_N = 1$) de points M_j de E est encore un point de E (ceci est la caractérisation géométrique de la convexité). Si on applique ceci aux points $M_j = (u_j, \log u_j)$, $j = 1, ..., M$ (ces points sont sur le graphe de log, donc dans E), le point

$$\big(t_1u_1 + \cdots + t_Nu_N, t_1 \log u_1 + \cdots + t_N \log u_N\big) = t_1M_1 + \cdots + t_NM_N$$

est encore un point de E, donc un point situé sous le graphe de log, ce qui implique l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{N} t_k \log u_k \leq \log\Big(\sum_{k=1}^{N} t_ku_k\Big).$$

L'inégalité (†) en résulte immédiatement en prenant l'exponentielle des deux membres.

3. *Soit N un entier supérieur ou égal à 2 et $p_1, ..., p_N$, N nombres réels strictement supérieurs à 1 tels que $\sum_1^N 1/p_j = 1$. En adaptant la méthode utilisée en cours pour prouver l'inégalité de Hölder pour deux fonctions mesurables positives f_1, f_2, montrer que, si $f_1, ..., f_N$ sont N fonctions $(\Omega, \mathcal{T})$-$([0,\infty], \mathcal{B})$-mesurables ($\mathcal{B}$ étant la tribu borélienne sur $[0,\infty]$), telles que $\int_\Omega f_k^{p_k}\, d\mu > 0$ pour tout $k = 1, ..., N$, on a l'inégalité de Hölder généralisée*

$$\int_\Omega f_1 \cdots f_N \, d\mu \leq \prod_{k=1}^{N} \Big(\int_\Omega f_k^{p_k}\, d\mu\Big)^{1/p_k}$$

*(avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$). On pensera à appliquer le résultat établi à la question **2** en posant $t_k = 1/p_k$ pour tout $k = 1, ..., N$, et, pour un point $\omega \in \Omega$,*

$$u_k(\omega) = \frac{(f_k(\omega))^{p_k}}{\displaystyle\int_\Omega f_k^{p_k}\, d\mu}, \qquad \forall\, k = 1, ..., N,$$

*lorsque tous les nombres $\int_\Omega f_k^{p_k}\, d\mu$ sont strictement positifs. Puis on utilisera l'inégalité (†) établie à la question **2**.*

Pourquoi l'inégalité (††) est-elle encore satisfaite si l'un des nombres $\int_\Omega f_k^{p_k}\, d\mu$ est nul ?

L'inégalité (†) appliquée avec $t_j = 1/p_j$ et $u_j = u_j(\omega)$ ($\omega \in \Omega$) comme indiqué, donne

$$\prod_{j=1}^{N} f_j^{p_j}(\omega) \leq \Big(\prod_{j=1}^{N} \int_\Omega f_j^{p_j}\, d\mu\Big) \times \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{p_j}\, \frac{f_j^{p_j}(\omega)}{\int_\Omega f_j^{p_j}\, d\mu}.$$

En intégrant cette inégalité sur Ω par rapport à la mesure μ, on obtient bien l'inégalité

$$\int_\Omega f_1 \cdots f_N \, d\mu \leq \prod_{k=1}^N \Big(\int_\Omega f_k^{p_k} \, d\mu \Big)^{1/p_k}.$$

voulue. Si l'un des nombres $\int_\Omega f_k^{p_k} \, d\mu$ est nul, ona, pour cet indice k, $f_k = 0$ μ-presque partout, ce qui implique que $f_1 \cdots f_k = 0$ μ-presque partout (avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$ convenue). On a donc $\int_\Omega f_1 \cdots f_N \, d\mu = 0$. Comme on a d'autre part, toujours avec la même convention,

$$\prod_{j=1}^N \Big(\int_\Omega f_k^{p_k} \, d\mu \Big)^{1/p_k} = 0,$$

l'inégalité

$$\int_\Omega f_1 \cdots f_N \, d\mu \leq \prod_{k=1}^N \Big(\int_\Omega f_k^{p_k} \, d\mu \Big)^{1/p_k}$$

est toujours valable (les deux membres valant 0).

Exercice 2

1. *Enoncer la formule de changement de variables dans le cadre de l'intégration sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Si U et V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, Φ un C^1 difféomorphisme entre U et V, de jacobien $\mathrm{jac}[\Phi]$, dire qu'une fonction $f \ : V \to \mathbb{C}$ (mesurable par rapport aux tribus boréliennes à la source et au but) est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue $dy_1 \otimes \cdots \otimes dy_n$ sur V équivaut à dire que $f \circ \Phi \ : U \to \mathbb{C}$ (forcément aussi mesurable par rapport aux tribus boréliennes à la source et au but par composition d'applications mesurables) est telle que

$$x \mapsto f(\Phi(x)) \times |\mathrm{jac}[\Phi](x)|$$

est intégrable sur U. De plus, on a dans ce cas

$$\int_V f dy_1 \otimes \cdots \otimes dy_n = \int_U f(\Phi(x)) \, |\mathrm{jac}[\Phi](x)| \, dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n. \qquad \text{(A)}$$

Si f est de plus positive, la formule (A) ci-dessus est valable sans hypothèse d'intégrabilité sur f (les deux membres ne prenant la valeur $+\infty$ que simultanément).

2. *Rappeler comment s'effectue le calcul de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t^2} \, dt$ en utilisant le changement de variables permettant de passer du repérage cartésien en (x, y) au repérage polaire en (r, θ). Donner le résultat obtenu.*

On a

$$\begin{aligned}
\Big(\int_0^\infty e^{-t^2}\,dv\Big)^2 &= \iint_{]0,\infty[^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy\\
&= \iint_{]0,\infty[\times]0,\pi/2[} e^{-r^2}\,rdrd\theta\\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{2} = \pi/4
\end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini-Tonnelli et la formule de passage en coordonnées polaires. On a donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}/2$.

3. *Montrer que la fonction*

$$(x,y) \longmapsto \Big(\frac{x+y}{x^2+y^2}\Big)\,e^{-(x+y)^2}$$

est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,\infty[\times]0,\infty[$ *et calculer son intégrale par rapport à cette mesure. On pensera à utiliser le difféomorphisme*

$$\Phi\ : (x,y) \longmapsto (x/y, x+y)$$

de $]0,\infty[\times]0,\infty[$ *dans lui-même, après avoir justifié qu'il s'agit bien d'un difféomorphisme.*

On vérifie que Φ est bien un difféomorphisme de l'ouvert $]0,\infty[^2$ dans lui-même, difféomorphisme dont l'inverse est

$$\Psi\ : (u,v) \longmapsto \Big(\frac{uv}{u+1}\,,\,\frac{v}{u+1}\Big)\,.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\Big(x/y = u \quad \& \quad x+y = v\Big) &\Longleftrightarrow \Big(x = yu \quad \& \quad y(1+u) = v\Big)\\
&\Longleftrightarrow \Big(y = \frac{v}{1+u} \quad \& \quad x = uy = \frac{uv}{1+u}\Big).
\end{aligned}$$

Les deux fonctions Φ et Ψ sont bien C^∞ car leurs fonctions coordonnées le sont. Le Jacobien de Φ est

$$J\ : (x,y) \longmapsto \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} = \frac{x+y}{y^2}\,.$$

Comme

$$\iint_{]0,\infty[^2} \Big(\frac{x+y}{x^2+y^2}\Big)\,e^{-(x+y)^2}\,dxdy = \iint_{]0,\infty[^2} \frac{e^{-(x+y)^2}}{1+(x/y)^2}\,J(x,y)\,dxdy\,,$$

la formule de changement de variables (toujours valable sans clause d'intégrabilité *a priori* pour des fonctions mesurables positives comme ici) donne

$$\begin{aligned}\iint_{]0,\infty[^2} \Big(\frac{x+y}{x^2+y^2}\Big)\, e^{-(x+y)^2}\, dxdy &= \iint_{]0,\infty[^2} \frac{e^{-v^2}}{1+u^2}\, dudv \\ &= \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} \times \int_0^\infty e^{-v^2}\, dv\,.\end{aligned}$$

Or $\int_0^\infty e^{-v^2}\, dv = \sqrt{\pi}/2$ comme établi à la question **2**. On a donc au final

$$\iint_{]0,\infty[^2} \Big(\frac{x+y}{x^2+y^2}\Big)\, e^{-(x+y)^2}\, dxdy = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4}\,.$$

Exercice 3

1. *Enoncer le théorème de convergence monotone pour une suite* $(f_k)_{k\geq 0}$ *de fonctions numériques mesurables positives sur un espace mesuré* $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *(en rappelant bien toutes les hypothèses).*

Si la suite $(f_k)_{k\geq 0}$ est croissante ($f_{k+1} \geq f_k$ sur Ω pour tout $k \in \mathbb{N}$), alors la fonction $f := \lim_{k\to+\infty} f_k$ est aussi mesurable (par rapport à la tribu $\mathcal{T}$ sur Ω et à la tribu borélienne sur $[0,\infty]$) et on a

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu \in [0,\infty].$$

2. *Enoncer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour une suite* $(f_k)_{k\geq 0}$ *de fonctions mesurables (à valeurs réelles ou complexes) sur un espace mesuré* $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *(en rappelant bien toutes les hypothèses).*

Si, outre les hypothèses mentionnées, il existe une fonction $g\ :\Omega \to [0,\infty]$ intégrable par rapport à μ, et telle que, hors d'un ensemble μ-négligeable E, on ait

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, \omega \in \Omega \setminus E,\ |f_k(\omega)| \leq g(\omega),$$

et que la suite $(f_k)_{k\geq 0}$ converge simplement sur Ω vers une fonction f, toutes les fonctions f_k, ainsi que leur limite simple f, sont intégrables par rapport à μ, et l'on a

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

3. Vérifier, pour tout $t \in [0,1[$, les formules :

$$-\log(1-t) = \sum_{l=1}^\infty \frac{t^l}{l} \quad , \quad e^{-t} = \sum_{l=0}^\infty (-1)^l\, \frac{t^l}{l!}.$$

On sait que, pour $u \in [0,1[$,

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{\infty} u^l.$$

En intégrant sur $[0,t]$ (la convergence de la série est uniforme sur cet intervalle), on obtient

$$\int_0^t \frac{du}{1-u} = -\log(1-t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{l+1}}{l+1} = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{t^l}{l}.$$

Comme

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, la seconde formule en découle (en prenant $z = -t$).

4. *Calculer, après avoir justifié ce calcul, les limites, lorsque k tend vers l'infini, des suites numériques $(u_k)_{k\geq 1}$ et $(v_k)_{k\geq 1}$, de terme général respectivement*

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{l=1}^{k} \int_0^{1-1/k} \frac{t^l\, e^{-t^k}}{l}\, dt \\ v_k &= \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \int_0^{1-1/k} \frac{t^l e^{-t^k}}{l!}\, dt. \end{aligned}$$

On a

$$u_k = \int_{[0,1-1/k]} e^{-t^k} \Big(\sum_{l=1}^{k} \frac{t^l}{l}\Big)\, dt = \int_{[0,1[} \chi_{[0,1-1/k]}(t)\, e^{-t^k} \Big(\sum_{l=1}^{k} \frac{t^l}{l}\Big)\, dt.$$

La suite de fonctions positives $(f_k)_{k\geq 1}$, où

$$f_k \ : t \in [0,1[\mapsto \chi_{[0,1-1/k]}(t)\, e^{-t^k} \Big(\sum_{l=1}^{k} \frac{t^l}{l}\Big),$$

est une suite croissante de fonctions positives sur $[0,1[$ convergeant vers la fonction $t \mapsto -\log(1-t)$ (d'après le résultatétabli à la question **3**). Le théorème de convergence monotone (question **1**) implique donc

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} u_k &= \lim_{k\to+\infty} \int_{[0,1[} f_k(t)\, dt \\ &= -\int_{[0,1[} \log(1-t)\, dt = -\int_{[0,1[} \log v\, dv = [v(1-\log v)]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

On a

$$v_k = \int_{[0,1-1/k]} e^{-t^k} \Big(\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{t^l}{l!} \Big)\, dt = \int_{[0,1[} \chi_{[0,1-1/k]}(t)\, e^{-t^k} \Big(\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{t^l}{l!} \Big)\, dt.$$

La suite de fonctions $(g_k)_{k\geq 1}$, où

$$g_k \ : t \in [0,1[\mapsto \chi_{[0,1-1/k]}(t)\, e^{-t^k} \Big(\sum_{l=1}^{k} (-1)^l \frac{t^l}{l!} \Big),$$

est une suite de fonctions mesurables sur $[0,1[$ convergeant vers la fonction $t \mapsto e^{-t}$ (d'après le résultat établi à la question **3**). D'autre part, on a

$$\forall\, t \in [0,1[\,,\ |g_k(t)| \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} = e^t.$$

Comme la fonction $t \mapsto e^t$ est intégrable sur $[0,1[$, le théorème de convergence dominée (question **2**) implique

$$\lim_{k\to+\infty} v_k = \lim_{k\to+\infty} \int_{[0,1|} g_k(t)\, dt = \int_{[0,1[} e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

Problème

Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+t^2}\, dt < +\infty.$$

1. *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \neq 0$, on a*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(\frac{1+t^2}{(x-t)^2+y^2} \Big) < +\infty.$$

En déduire que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}\, dt$$

est absolument convergente.

La fonction

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1+t^2}{(x-t)^2+y^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas car $y \neq 0$) et tend vers 1 au voisinage de $\pm\infty$. Cette fonction est donc bien bornée sur $\mathbb{R}$.

2. *Vérifier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$,*

$$\frac{y}{(x-t)^2+y^2} = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{t-(x+iy)} - \frac{1}{(t-(x-iy)}\Big).$$

En déduire, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\Big[\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\Big] = 0.$$

La formule

$$\frac{y}{(x-t)^2+y^2} = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{t-(x+iy)} - \frac{1}{(t-(x-iy)}\Big)$$

est immédiate (réduction au même dénominateur du membre de droite). Le calcul des dérivées partielles donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[\frac{1}{2i(1-(x\pm iy))}\Big] &= \frac{1}{i(t-(x\pm iy))^3}\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big[\frac{1}{2i(1-(x\pm iy))}\Big] &= \frac{i}{(t-(x\pm iy))^3},\end{aligned}$$

d'où la seconde formule demandée.

3. *Montrer que la fonction*

$$(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \longmapsto F_f(x,y) := \frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt$$

est de classe C^2 dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ et vérifie

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)[F_f](x,y) \equiv 0$$

dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. On citera avec précision le résultat du cours utilisé.

Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Sur $[-\infty,\infty] \times \overline{D((x_0,y_0),|y_0|/2)}$, on considère la fonction définie par

$$\varphi(t,(x,y)) = \begin{cases} \dfrac{|t-(x\pm iy)|}{|t-(x_0\pm iy_0)|} \text{ si } t\in\mathbb{R} \\ 1 \text{ si } t = \pm\infty \end{cases}$$

Cette fonction est continue et ne s'annule pas sur le sous-ensemble compact $[-\infty, \infty] \times \overline{D((x_0, y_0), |y_0|/2)}$ de $[-\infty, \infty] \times \mathbb{R}^2$. Elle est donc minorée par une constante strictement positive κ_{x_0,y_0} sur ce compact, et l'on a donc

$$\forall\, (x, y) \in D((x_0, y_0), |y_0|/2),\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{|t - (x \pm iy)|} \leq \frac{1}{\kappa_{x_0,y_0}} \frac{1}{|t - (x_0 \pm iy_0)|}.$$

Les conditions d'application du thórème de différentiation sous le signe somme (pour les fonctions de plusieurs variables, théorème 3.3 du cours) sont remplies (on l'applique en fait deux fois) car les dérivées partielles d'ordre total l $(l = 1, l = 2)$ par rapport à (x, y) de

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{t - (x \pm iy)}$$

sont majorées sur $\mathbb{R}$, lorsque $(x, y) \in D((x_0, y_0), |y_0|/2)$ par la fonction intégrable

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\kappa_{x_0,y_0}^{l+1}\, |t - (x_0 \pm iy_0)|^{l+1}}$$

La fonction F_f est bien de classe C^2 dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (elle l'est au voisinage de tout point (x_0, y_0) de cet ouvert), et ses dérivées partielles (qui se calculent donc en différentiant sous le signe somme) vérifiant la formule demandée.

4. *Que vaut l'intégrale*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1 + t^2}\ ?$$

*Calculer la fonction F_f introduite à la question **3** lorsque f est la fonction constante égale à 1. Vérifier que, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$,*

$$f(t_0) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t_0)}{(x - t)^2 + y^2}\, dt. \qquad (*)$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1 + t^2} = [\arctan t]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Par changement de variable, on a, pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$,

$$F_1(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2 + y^2}\, dt = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y\,du}{y^2(1 + u^2)} = 1.$$

Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a donc

$$f(t_0) = f(t_0) \times 1 = f(t_0) \times F_1(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t_0)}{(x - t)^2 + y^2}\, dt.$$

5. *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Déduire de la formule (*) établie à la question* **4** *que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$,*

$$|F_f(x,y) - f(t_0)| \leq \frac{|y|}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{(x-t)^2 + y^2}\, dt.$$

On écrit

$$\begin{aligned} F_f(x,y) - f(t_0) &= F_f(x,y) - f(t_0) F_1(x,y) = F_f(x,y) - F_{f(t_0)}(x,y) \\ &= F_{f-f(t_0)}(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t) - f(t_0)}{(x-t)^2 + y^2}\, dt. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que le module de l'intégrale d'une fonction G est majorée par l'intégrale du module de G (proposition 2.7 du cours), on en déduit l'inégalité demandée.

6. *On suppose à partir de maintenant (et jusqu'à la fin du problème) que la fonction f est continue au point t_0. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta(\epsilon) > 0$ tel que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \forall\, y \in \mathbb{R}^*,\ \frac{|y|}{\pi} \int_{t_0-\eta(\epsilon)}^{t_0+\eta(\epsilon)} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{(x-t)^2 + y^2}\, dt \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Il existe $\eta(\epsilon) > 0$ tel que

$$|t - x_0| < \eta(\epsilon) \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| \leq \epsilon/2$$

(puisque f est continue en t_0). On a donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, du fait de la propriété de monotonie de la prise d'intégrale,

$$\begin{aligned} \frac{|y|}{\pi} \int_{t_0-\eta(\epsilon)}^{t_0+\eta(\epsilon)} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{(x-t)^2 + y^2}\, dt &\leq \frac{\epsilon}{2} \times \Big(\frac{|y|}{\pi} \int_{t_0-\eta(\epsilon)}^{t_0+\eta(\epsilon)} \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2} \Big) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \times \Big(\frac{|y|}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2} \Big) = \frac{\epsilon}{2} \times 1. \end{aligned}$$

7. *On considère $\epsilon > 0$ et $\eta(\epsilon)$ donné par la question* **6**. *Montrer que, si $\big((x_k, y_k)\big)_{k \geq 0}$ est une suite de points de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ convergeant vers $(t_0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$, on a*

$$\lim_{k \to +\infty} \Big(\frac{|y_k|}{\pi} \int_{\{t \in \mathbb{R}\,;\, |t - t_0| \geq \eta(\epsilon)\}} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{(x_k - t)^2 + y_k^2}\, dt \Big) = 0.$$

On utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue : pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout k tel que $|x_k - t_0| \leq \eta(\epsilon)/2$, on a

$$\frac{|f(t) - f(t_0)|\, \chi_{\mathbb{R}\setminus]t_0-\eta(\epsilon), t_0+\eta(\epsilon)[}(t)}{(x_k - t)^2 + y_k^2} \leq \frac{|f(t) - f(t_0)|\, \chi_{\mathbb{R}\setminus]t_0-\eta(\epsilon), t_0+\eta(\epsilon)[}(t)}{(|t - t_0| - \eta(\epsilon)/2)^2}.$$

La fonction majorante est ici intégrable sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\{t \in \mathbb{R}\,;\, |t-t_0| \geq \eta(\epsilon)\}} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{(x_k - t)^2 + y_k^2}\, dt = \int_{\{t \in \mathbb{R}\,;\, |t-t_0| \geq \eta(\epsilon)\}} \frac{dt}{(t - t_0)^2}.$$

Comme $\lim_{k \to 0} |y_k| = 0$, on a le résultat demandé.

8. *En combinant les résultats obtenus aux questions* **5**, **6** *et* **7**, *montrer que, si* $\big((x_k, y_k)\big)_{k \geq 0}$ *est une suite de points de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ *convergeant vers* $(t_0, 0)$ *dans* $\mathbb{R}^2$, *on a*

$$\lim_{k \to +\infty} F_f(x_k, y_k) = f(t_0).$$

Soit $\epsilon > 0$. On choisit dans un premier temps $\eta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \forall\, y \in \mathbb{R}^*,\ \frac{|y|}{\pi} \int_{t_0-\eta(\epsilon)}^{t_0+\eta(\epsilon)} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{(x - t)^2 + y^2}\, dt \leq \frac{\epsilon}{2}$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (question **6**), en particulier pour $x = x_k$, $y = y_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ensuite, une fois cet $\eta(\epsilon) > 0$ fixé, on constate (question **7**) que, pour k assez grand,

$$\frac{|y_k|}{\pi} \int_{\{t \in \mathbb{R}\,;\, |t-t_0| \geq \eta(\epsilon)\}} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{(x_k - t)^2 + y_k^2}\, dt \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On conclut, en utilisant le résultat établi à la question **5**, que, pour k assez grand,

$$\begin{aligned}
|F_f(x_k, y_k) - f(t_0)| &\leq \frac{|y_k|}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{(x_k - t)^2 + y^2}\, dt \\
&\leq \frac{|y_k|}{\pi} \int_{t_0-\eta(\epsilon)}^{t_0+\eta(\epsilon)} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{(x_k - t)^2 + y^2}\, dt + \\
&\qquad + \frac{|y_k|}{\pi} \int_{\{t \in \mathbb{R}\,;\, |t-t_0| \geq \eta(\epsilon)\}} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{(x_k - t)^2 + y_k^2}\, dt \\
&\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.
\end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.