SCOLARITÉ ET DE LA VIE ÉTUDIANTE
DIRECTION DE LA
UNIVERSITÉ BORDEAUX I Sciences Technologies
LICENCE

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2011/2012
PREMIÈRE SESSION DE PRINTEMPS

ETAPE : L1 UE : MI 2011
Épreuve : DS Terminal
Date : 11 Juin 2012
Heure : 14 Heure *Durée :* 3 Heures
Épreuve de Messieurs : P. Charpentier & A. Yger
Corrigé de l'épreuve

Département Licence

Exercice I

1. *Questions de cours.*

   (a) *Donner la définition d'une suite de Cauchy.*

   Corrigé. Une suite $(u_n)_n$ est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un entier naturel N_ε tel que $p \geq N_\varepsilon$, $q \geq N_\varepsilon$, $(p,q) \in \mathbb{N}$, implique $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$.

   (b) *Énoncer le critère (ou théorème) de Cauchy pour les suites numériques.*

   Corrigé. Une suite de nombres complexes est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

2. *Montrer que la suite* $n \mapsto u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *n'est pas une suite de Cauchy (considérer* $u_{2n} - u_n$*).*

   Corrigé. On a $u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$, chaque terme de la somme étant $\geq \frac{1}{2n}$. Elle ne vérifie donc pas le critère de Cauchy.

3. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de nombres complexes vérifiant, pour tout entier* n, $|u_{n+1} - u_n| \leq q^n$ *avec* $q \in [0,1[$. *Montrer que cette suite converge.*

   Corrigé. Supposons que n et m sont deux entiers naturels tels que $m \geq n$. Alors, en écrivant $u_m - u_{pn} = u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - u_{m-2} + \ldots + u_{n+1} - u_n$, il vient $|u_m - u_n| \leq \sum_{k=1}^{m-n} |u_{n+k} - u_{n+k-1}| \leq \sum_{k=1}^{m-n} q^{n+k} = q^n \sum_{k=0}^{m-n} q^k = q^n \frac{1-q^{m-n+1}}{1-q} \leq \frac{q^n}{1-q}$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, puisque $q < 1$, il existe n tel que $\frac{q^n}{1-q} \leq \varepsilon$, ce qui montre que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy donc converge.

Exercice II

1. *Donner le développement limité à l'origine, à l'ordre n, de la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \frac{(\cos x) - (1 - x^2/2)}{x^3}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$. *En déduire la tangente, et la position par rapport à celle-ci, à l'origine, de la courbe d'équation* $y = f(x)$.

   Corrigé. Le développement limité de $\cos x$ à l'origine est $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Par suite, $\cos x - \left(1 - x^2/2\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$, et il vient $f(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k-3}}{(2k)!} + x^{2n-2}\varepsilon(x)$. On a donc $f(x) = \frac{x}{4!} - \frac{x^3}{6!} + x^4\varepsilon(x)$, ce qui montre que la droite d'équation $y = \frac{x}{4!}$ est tangente à la courbe à l'origine, et que, pour x assez petit, la courbe est au dessous de sa tangente si $x > 0$ et au dessus sinon.

2. *Étudier les branches infinies de la courbe d'équation* $y = (x-2)\,e^{1/x}$. *On déterminera les éventuelles asymptotes et la position de la courbe par rapport à celles-ci.*

T.S.V.P.

Corrigé. Cette courbe a une branche infinie lorsque x tends vers $\pm\infty$ et lorsque x tends vers 0 par valeurs supérieures. Lorsque x tends vers 0, $x > 0$, y tends vers $-\infty$ et la courbe admet la demi-droite $x = 0$, $y < 0$, comme assymptote; de plus la courbe se trouve à droite de son asymptote.

Étudions maintenant les branches lorsque x tends vers $\pm\infty$. Le développement limité de l'exponnentielle donne $y = (x-2)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, avec $\lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$. On a donc $y = x-1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$. Ceci montre que la droite d'équation $y = x-1$ est assymptote à la courbe lorsque $x \to \pm\infty$, et que la courbe est au dessous de l'asymptote si $x \to +\infty$ et au dessus sinon.

Exercice III

1. *Questions de cours.*

   (a) *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{C}$. Que signifie « f est uniformément continue » ?*

   Corrigé. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, $(x,y) \in A\times A$, $|x-y| \le \eta$ implique $|f(x)-f(y)| \le \varepsilon$.

   (b) *Toute fonction continue f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est-elle uniformément continue ? Justifier la réponse par un exemple, et énoncer un théorème donnant une condition suffisante pour l'uniforme continuité d'une telle fonction.*

   Corrigé. Non : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas uniformément continue sur cet intervalle. Un théorème du cours dit que toute fonction continue sur un **segment** est uniformément continue.

Soit f une fonction réelle uniformément continue sur $[0,+\infty[$. Soit $\delta > 0$ tel que $|x-y| \le \delta$ implique $|f(x)-f(y)| \le 1$. Soit $x > 0$ fixé.

2. *Vérifier qu'il existe un unique entier n_x tel que $\frac{x}{\delta} \le n_x < \frac{x}{\delta}+1$.*

   Corrigé. Tout intervalle semi-ouvert $]a,b]$ ou$[a,b[$ de longueur 1 contient exactement un entier.

3. *En écrivant $f(x)-f(0) = \sum_{k=0}^{n_x-1}\left(f\left(\frac{(k+1)x}{n_x}\right)-f\left(\frac{kx}{n_x}\right)\right)$, montrer que $|f(x)-f(0)| \le \frac{x}{\delta}+1$.*

   Corrigé. Comme $\left|\frac{(k+1)x}{n_x}-\frac{kx}{n_x}\right| = \frac{x}{n_x} \le \delta$, on a $\left|f\left(\frac{(k+1)x}{n_x}\right)-f\left(\frac{kx}{n_x}\right)\right| \le 1$, et la formule donne $|f(x)-f(0)| \le n_x \le \frac{x}{\delta}+1$.

4. *En déduire qu'il existe deux constantes $a > 0$ et $b > 0$ telles que, pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a $|f(x)| \le ax+b$.*

   Corrigé. La question précédente donne $|f(x)| \le \frac{x}{\delta}+1+(f(0))$, et on peut prendre $a = \frac{1}{\delta}$ et $b = 1+|f(0)|$.

5. *La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur $[0,+\infty[$?*

   Corrigé. Non car elle ne vérifie pas la conclusion de la question précédente (comparaison exponentielle et polynôme).

6. *La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est-elle uniformément continue sur $[0,+\infty[$?*

   Corrigé. La dérivée de cette fonction est $\frac{1}{1+x}$. Elle est donc majorée par 1 sur $[0,+\infty[$. Le théorème des accroissements finis donne alors, pour $(x,y) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, $|\ln(1+x)-\ln(1+y)| \le |x-y|$ ce qui montre que $x \mapsto \ln(1+x)$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice IV

1. *Questions de cours. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur un segment $[a,b]$.*

   (a) *Que peut-on dire de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$?*

   Corrigé. Cette fonction est continue sur $[a,b]$.

   (b) *Donner une condition suffisante portant sur f pour que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ soit dérivable en un point x_0. Que vaut alors cette dérivée ?*

   Corrigé. Cette fonction est dérivable en x_0 si f est continue en ce point et sa dérivée vaut $f(x_0)$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+ =]0,+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$.

Le but de l'exercice est d'étudier la fonction F que l'on ne cherchera pas à calculer.

2. *Étudier le signe, la continuité et la dérivabilité de la fonction F.*

Corrigé. Si $x \geq 1$, $\frac{\ln t}{1+t} \geq 0$ sur $[1,x]$ et $F(x) \geq 0$. Si $0 < x < 1$, $\frac{\ln t}{1+t} \leq 0$ sur $[x,1]$ et $F(x) = -\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t}dt \geq 0$. Comme $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, F est dérivable sur cet intervalle.

3. *Que vaut $F'(x)$?*

   Corrigé. $F'(x) = \frac{\ln x}{1+x}$.

4. (a) *Question de cours. Énoncer, pour une fonction h, la formule de Taylor-Young en un point x_0 à l'ordre $p+1$, en précisant les hypothèses sur h.*

   Corrigé. Soit h une fonction de classe $\mathscr{C}^p$ définie sur un intervalle$[a,b]$ et $x_0 \in]a,b[$. On suppose que $f^{(p)}$est dérivable au point x_0. Alors, pour $x \in [a,b]$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^{p+1}\varepsilon(x),$$

   avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

   (b) *Donner le développement limité à l'ordre* 3 *de F au point* 1.

   Corrigé. Un calcul direct donne $F(1) = 0$, $F'(1) = 0$, $F''(1) = 1/2$ et $F^{(3)}(1) = -1$. Le développement limité est donc

$$F(x) = \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x).$$

5. Soit $\varphi(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$, $t > 0$. En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = (\ln x)(\ln(1+x)) - \int_1^x \varphi(t)\,dt.$$

   Corrigé. Immédiat avec $u = \ln x$ et $v = \ln(1+x)$.

6. *En déduire que F est prolongeable par continuité en* 0.

   Corrigé. Lorsque $x \to 0$, $\ln(1+x)$ est équivalent à x, et, par suite $\lim_{x\to 0}(\ln x)(\ln(1+x)) = 0$. Pour la même raison, la fonction φ se prolonge par continuité au segment $[0,1]$, ce qui implique que $x \mapsto \int_1^x \varphi(t)\,dt$ est continue sur $[0,1]$ (Première question de cours). Ainsi F se prolonge en 0 par $F(0) = -\int_0^1 \varphi(t)\,dt$.

7. *En utilisant un changement de variables montrer que, pour $x > 0$, $F(1/x) = \int_1^x \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)\ln u\,du$.*

   Corrigé. Il suffit de poser $t = \frac{1}{u}$ dans $F(1/x) = \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t}dt$: $F(1/x) = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)}du$.

8. *En déduire que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\ln^2 x} = 1/2$.

   Corrigé. Le résultat de la question précédente s'écrit $F(x) = -F(1/x) + \int_1^x \frac{\ln u}{u}du = -F(1/x) + \frac{1}{2}(\ln x)^2$, d'où le résultat en vertu de la question 5.

9. On pose $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t\,dt$, $k \in \mathbb{N}$.

   (a) *En utilisant le développement limité à l'ordre n de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ montrer que*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(x) + \int_1^x \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}\ln t}{1+t}dt.$$

   Corrigé. Le développement limité à l'ordre n de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k + \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$, d'où la formule.

   (b) *En calculant $I_k(x)$, en déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $\left|F(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\right| \leq \int_0^1 t^{n+1}\ln(1/t)\,dt$.*

   Corrigé. En intégrant par parties, il vient $I_k(x) = \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2}$, d'où

$$F(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}\ln t}{1+t}dt,$$

   ce qui donne le résultat puisque $\left|\frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}\ln t}{1+t}\right| \leq t^{n+1}\ln(1/t)$.

(c) *Conclure que* $F(0) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Corrigé. La fonction $t \mapsto t\ln t$ se prolonge par continuité au segment $[0,1]$. Par un théorème du cours elle y est donc bornée par une constante $M > 0$. La question précédente donne donc $\left|F(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\right| \leq M\int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1}$, ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty} \left|F(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\right| = 0$.

Exercice V

1. *Question de cours.*

(a) *Donner la définition d'une subdivision d'un segment $[a,b]$ et, pour une fonction f définie sur $[a,b]$, d'une somme de Riemann de f associée à cette subdivision.*

Corrigé. On appelle subdivision du segment $[a,b]$ une suite finie $\mathscr{S} = (a_i)_{i=0}^{n}$ de points de $[a,b]$ telle que $a_0 = a < a_1 < a_1 < \ldots < a_n = b$. On appelle somme de Riemann de f associée à la subdivision $\mathscr{S}$ toute somme de la forme $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)(a_{i+1} - a_i)$ où $z_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

(b) *Énoncer le théorème reliant les sommes de Riemann d'une fonction intégrable sur un segment $[a,b]$ et son intégrale.*

Corrigé. Le théorème dit que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision $\mathscr{S}$ de pas $\leq \delta$, toute somme de Riemann σ de f associée à $\mathscr{S}$ vérifie $\left|\sigma - \int_{[a,b]} f\right| \leq \varepsilon$.

2. *Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ en en déduire que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}.$$

Corrigé. La formule des accroissements finis donne $\ln(1+x) = x\frac{1}{1+c}$ avec $c \in]0,x[$ ce qui donne $\ln(1+x) \leq x$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+c)^2}$ avec $c \in]0,x[$ d'où on tire $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

On obtient alors les inégalités demandées en appliquant cette inégalité aux points $x = \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$ et en additionnant les inégalités obtenues.

3. *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx$ *et que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} = \int_0^1 x(1-x)\,dx$.

Corrigé. En effet, $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)}$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)$ et il suffit d'appliquer le théorème sur les sommes de Riemann.

4. *En admettant que $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx = \pi/8$, en déduire que*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{n-1}}{n^2}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{2(n-2)}}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{\sqrt{(n-2)2}}{n^2}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{(n-1)}}{n^2}\right) = e^{\pi/8}.$$

Corrigé. En effet, la question précédente montre que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \pi/8$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} = 0$, et la question 2. donne alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right) = \pi/8$, et il suffit alors de prendre l'exponentielle de $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$.

FIN