Feuille de TD 2 - Analyse complexe M1 - Alain Yger (semaine 39)

THEMES : Intégration des formes localement exactes sur les chemins continus ; indice ; théorème de Rouché ; simple connexité ; logarithme. La formule de Cauchy Pompeïu et ses conséquences.

Sources : [Beaucoup pour cette séance !] Berenstein-Gay [Complex variables, chapitre 1, sections 1.1 à 1.8 et exercices correspondants] (GTM 125, Springer), Yger [Analyse complexe et distributions](Ellipses). Certains exercices recoupent ceux des feuilles 1 et 2 de 2008 (P. Parent).

NOTA. Les étoiles indiquent le niveau de difficulté de l'exercice.

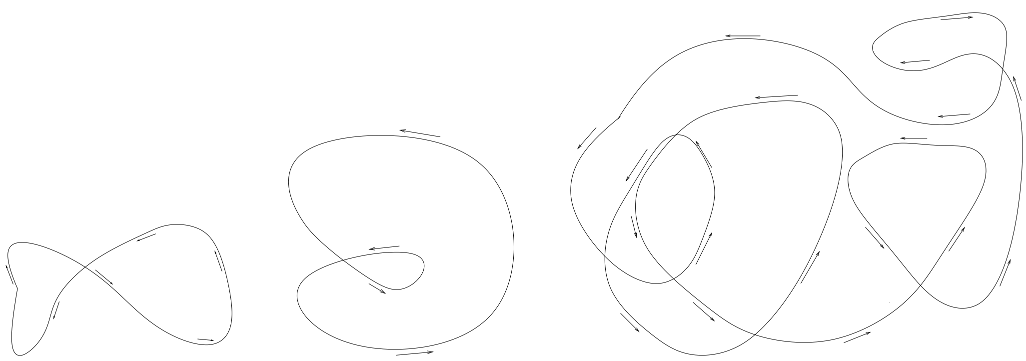
Exercice 1 (*) : homotopie à point de base marqué et groupes $\pi_1(U, a)$. Soit U un ouvert connexe non vide et, pour $a \in U$, $\pi_1(U, a)$ le *groupe d'homotopie à point de base* a, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence des lacets continus γ de support dans U, d'origine et d'extrémité "marquées" a pour la relation d'équivalence suivante : γ_0 est homotope à γ_1 si et seulement si il existe une fonction F continue $F : [0, 1] \times [0, 1] \to U$ telle que

$$F(0, s) = F(1, s) = a \quad \forall\ s \in [0, 1]$$
$$F(t, 0) = \gamma_0(t) \quad , \quad F(t, 1) = \gamma_1(t) \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Montrer que, si a et b sont deux points distincts de U, $\pi_1(U, a)$ et $\pi_1(U, b)$ sont isomorphes.

Exercice 2 (*) : $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^*$ peuvent-ils être homéomorphes ?
Indication : *on calculera pour ces deux ouverts le groupe d'homotopie $\pi_1(U, a)$ pour un point arbitraire a dans U (ces deux ouverts étant connexes, on sait d'après l'exercice 1 que ce groupe d'homotopie ne dépend pas du choix du point a dans l'ouvert).*

Exercice 3 (**) : la notion d'indice : le calcul "visuel".



On considère les lacets γ représentés sur les figures ci-dessus ; calculer, dans chaque composante connexe du complémentaire du support de chacun de ces lacets, la valeur de la fonction

$$z \longmapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z).$$

Tenter d'énoncer à partir de ces trois exemples une règle générale pour calculer $I(\gamma, z)$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\gamma)$) en examinant comment une demi-droite arbitraire issue de z (demi-droite qu'il est judicieux de choisir intelligemment de manière à ce qu'elle ne rencontre le support de γ qu'en des points non multiples, de manière transverse, et que ce nombre de points d'intersection soit le plus petit possible) intersecte le support du lacet orienté γ.

Exercice 4 (*) : des calculs d'indice pas si surprenants que cela. On rappelle qu'il existe une application continue surjective de $[0, 1]$ dans $[-1, 1]^2$ telle que $\gamma(0) = (-1, -1)$ et $\gamma(1) = (1, 1)$; c'est la courbe introduite par G. Peano. Soit C la couronne fermée du plan complexe $C := \{z \in \mathbb{C}\,;\, 1 \leq |z| \leq 2\}$ et C^- et C^+ les deux demi-couronnes fermées définies par $C^- := C \cap \{z\,;\, \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$ et $C^+ := C \cap \{z\,;\, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. En utilisant la courbe de Peano, construire un chemin continu $\gamma^+ : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ dont le support est exactement C^+, tel que $\gamma^+(0) = 2$, $\gamma^+(1) = -1$, puis un chemin continu $\gamma^- : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ dont le support est exactement C^- tel que $\gamma^-(0) = -1$, $\gamma^-(1) = 2$. On note γ le lacet de $\mathbb{C}^*$ obtenu en concaténant (dans cet ordre) γ^+, puis γ^-. Que vaut l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, 0)$? Même question en demandant à 1 (et non plus -1) d'être l'extrémité du lacet γ^+ et en même temps l'origine de γ^-.

Exercice 5 (*) : variation de l'argument. Soient $a_1, ..., a_N$ N points du disque unité ouvert. Quel est le bilan global de la variation de l'argument le long du lacet

$$t \in [0,1] \longmapsto \prod_{j=1}^{N} \frac{e^{2i\pi t} - a_j}{1 - \overline{a_j} e^{2i\pi t}} \ ?$$

Même questions si les a_j sont tous de module strictement supérieur à 1.

Exercice 6 (*) : variation de l'argument. Construire une détermination continue de l'argument dans $\mathbb{C}$ privé de l'union de $[0,1]$ et du support du chemin paramétré $\Gamma : t \in [0, \infty[\mapsto f(t)e^{it}$, où f est un homéomorphisme croissante entre $[0, +\infty[$ et $[1, +\infty[$.
Indication : *on pourra faire un dessin (on retire à $\mathbb{C}$ une courbe se déroulant en spirale), par exemple en prenant $f(t) = t + 1$.*
Même question, mais cette fois dans $\mathbb{C}$ privé de l'adhérence de l'ensemble $\{f(t)e^{it}\,;\, t \in \mathbb{R}\}$, où f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, \infty[$ (par exemple $f(t) = \exp t$).

Exercice 7 (**) : indice et homotopie entre lacets dans $\mathbb{C}^*$ (à point de base marqué ou libre).

a) Soient γ_0 et γ_1 deux lacets continus de $\mathbb{C}^*$, tels que $\gamma_0(0) = \gamma_0(1) = \gamma_1(0) = \gamma_1(1) = a \in \mathbb{C}^*$, ayant même degré, c'est-à-dire tels que $\mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma_1, 0)$. Montrer que γ_0 et γ_1 sont des représentants du même élément du groupe d'homotopie $\pi_1(\mathbb{C}^*, a)$.

b) Soient γ_0 et γ_1 deux lacets continus de $\mathbb{C}^*$ ayant même degré. Montrer que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ pour l'homotopie entre lacets libres, c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue $F : [0,1]^2 \to \mathbb{C}^*$ telle que

$$\begin{aligned} F(t,0) &= \gamma_0(t) \quad , \quad F(t,1) = \gamma_1(t) \quad \forall\, t \in [0,1] \\ F(0,s) &= F(1,s) \quad \forall\, s \in [0,1]. \end{aligned}$$

Exercice 8 (*) : lacets de $\mathbb{C}^*$ et lacets tracés sur le cercle unité.

a) Montrer que tout lacet continu de $\mathbb{C}^*$ est homotope dans l'homotopie entre lacets libres (dans $\mathbb{C}^*$) à un lacet de support inclus dans le cercle unité.

b) Montrer que tout lacet continu γ de $\mathbb{C}^*$ est homotope au lacet

$$t \in [0,1] \longmapsto e^{2i\pi \mathrm{Ind}(\gamma,0)t}.$$

Exercice 9 (*) : théorème de Rouché (illustré par G. Pólya). Un passant tenant son chien en laisse se déplace autour d'un rond-point de rayon R (il n'est pas autorisé à piétiner le disque central gazonné – de rayon R – de ce rond-point. La longueur de la laisse est $l < R$. Le chien peut, lui, marcher partout (sur le gazon comme sur la chaussée). Au terme d'un parcours indéfini, mais continu, le maître et son chien sont exactement revenus à leurs positions initiales. Si le maître a fait N tours autour du rond-point, combien le chien a-t-il fait de tours autour du centre 0 de ce même rond point ?

Exercice 10 (*) : calcul mathématique de l'indice (et théorème de Rouché). Soit l'arc paramétré
$$\gamma \ : t \in [0,1] \longmapsto (1 + t(1-t))e^{4i\pi t}.$$
Vérifier qu'il s'agit d'un lacet de $\mathbb{C}^*$ et calculer $I(\gamma, 0)$ dans un premier temps par le calcul d'une intégrale curviligne. Dessiner ensuite γ et retrouver ce résultat.

Exercice 11(*) : le théorème fondamental de l'algèbre, une preuve géométrique. Soit P un polynôme de degré $d > 0$. Montrer que, si R est assez grand, le lacet
$$\gamma_R \ : t \in [0,1] \longmapsto P(Re^{2i\pi t})$$
est de support inclus dans $\mathbb{C}^*$ et que le degré de ce lacet, c'est-à-dire l'indice $I(\gamma_R, 0)$, vaut exactement d. Vérifier que, si P ne s'annulait pas dans $\mathbb{C}$, le lacet γ_R serait homotope dans $\mathbb{C}^*$ (dans l'homotopie entre lacets libres définie à l'exercice 7) au lacet constant $t \in [0,1] \longmapsto P(0)$. En déduire une démonstration géométrique du théorème de d'Alembert (*tout polynôme de degré strictement positif à coefficients complexes admet au moins une racine complexe*).

Exercice 12 (**) : variation de l'argument, comptage de zéros. Soit $0 \leq a_0 < a_1 < ... < a_n$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs et $P(X) := a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. En considérant, si $P(z) = 0$, la ligne polygonale fermée de sommets $0, a_0, a_0 + a_1 z, a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}, 0$, montrer que les zéros de P sont tous dans le disque unité ouvert $D(0,1)$. Calculer la variation totale de l'argument le long du lacet $\Gamma \ : \theta \in [0, 2\pi] \longmapsto P(e^{i\theta})$. En déduire que l'équation
$$a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = 0$$
a exactement $2n$ solutions distinctes dans $]0, 2\pi[$ (*pensez "visuellement" en vous aidant d'un dessin et comptez le nombre de fois au moins où le support de* Γ *doit couper l'axe des ordonnées).*

Exercice 13 (**) : notion de simple connexité. Rappeler ce que signifie le fait qu'un ouvert de $\mathbb{C}$ soit simplement connexe. Montrer que l'union de deux ouverts simplement connexes d'intersection connexe non vide est simplement connexe. Si l'intersection n'est pas connexe ?

Exercice 14 (***) : le logarithme d'une fonction continue ne s'annulant pas dans un ouvert simplement connexe. Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue de U dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe une fonction g continue sur U telle que $f = \exp(g)$. Montrer de la même manière que toute fonction continue de $\overline{U}$ dans $\mathbb{C}^*$ s'écrit dans $\overline{U}$ comme l'exponentielle d'une fonction continue.
Indication : *on montrera d'abord que si* a *et* z *sont deux points de* U*,* c *un nombre complexe tel que* $f(a) = e^c$*, et* $\gamma_{a,z} \ : t \in [0,1] \mapsto \gamma_{a,z}(t)$ *un chemin continu arbitraire de* U *tel que* $\gamma_{a,z}(0) = a$ *et* $\gamma_{a,z}(1) = z$*, il existe une fonction* $c_{\gamma_{a,z}}(t)$ *telle que* $c_{\gamma_{a,z}}(0) = c$ *et* $f(\gamma_{a,z}(t)) = \exp(c_{\gamma_{a,z}}(t))$ *pour tout* $t \in [0,1]$ *(on dit aussi un "relèvement" de* $\gamma_{a,z}$*). On remarquera ensuite que* $c_{\gamma_{a,z}}(1)$ *ne dépend que de* a, c, z*, mais pas du choix de* $\gamma_{a,z}$*, avant de proposer un candidat pour* $g(z)$*.*

Exercice 15 (**) : indice et logarithme. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, f une application continue de U dans $\mathbb{C}^*$. On suppose que pour tout lacet continu γ de U, l'indice $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0)$ (on dit encore le *degré* de $f \circ \gamma$ comme lacet de $\mathbb{C}^*$) est nul. Montrer qu'il existe une fonction g continue de U dans $\mathbb{C}$ telle que $f = \exp g$.

Exercice 16 (*) : indice, logarithme, racines n-ièmes. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue de U dans $\mathbb{C}^*$.

a) Montrer que si f admet un logarithme continu dans U, elle admet aussi, pour tout entier strictement positif n, une racine n-ième continue dans U.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et γ un lacet continu de U. Montrer que si f admet une racine n-ième continue dans U, l'indice $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0)$ de $f \circ \gamma$ par rapport à l'origine est un multiple de n.

c) Montrer que si f est une fonction continue de U dans $\mathbb{C}^*$ admettant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une racine n-ième continue, alors f admet aussi un logarithme continu dans U.

Exercice 17 (***) : indice et logarithme (suite).

a) Soit U un ouvert homéomorphe à $\mathbb{C}$, p un point de U, f une fonction continue dans $U \setminus \{p\}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ et une fonction g continue dans $U \setminus \{p\}$ telles que $f(z) = (z-p)^k \exp((z))$ pour tout $z \in U \setminus \{p\}$.
Indication : *on notera γ le lacet $t \in [0,1] \longmapsto p + \epsilon e^{it}$ avec ϵ suffisamment petit et on montrera que $k = \mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0)$ convient.*

b) Soit U un ouvert homéomorphe à $\mathbb{C}$, p_1 et p_2 deux points distincts de U, f une fonction continue dans $U \setminus \{p_1, p_2\}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe deux entiers k_1 et k_2 dans $\mathbb{Z}$ (que l'on définira comme des indices de lacets de $\mathbb{C}^*$ par rapport à l'origine) et une fonction g continue dans $U \setminus \{p_1, p_2\}$, à valeurs complexes, tels que $f(z) = (z-p_1)^{k_1}(z-p_2)^{k_2} \exp(g(z))$ pour tout $z \in U \setminus \{p_1, p_2\}$.

c) Soit U un ouvert homéomorphe à $\mathbb{C}$, $p_1, ..., p_N$ N points distincts de U, f une fonction continue dans $U \setminus \{p_1, ..., p_N\}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe N entiers $k_1, ..., k_N$ dans $\mathbb{Z}$ (que l'on définira comme des indices de lacets de $\mathbb{C}^*$ par rapport à l'origine) et une fonction g continue dans $U \setminus \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, à valeurs complexes, tels que $f(z) = (z-p_1)^{k_1} \cdots (z-p_N)^{k_N} \exp(g(z))$ pour tout $z \in U \setminus \{p_1, ..., p_N\}$.

Exercice 18 (***) : indice et homotopie.

a) Soit f une application continue injective de $\overline{D(0,1)}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $s \in [0,1]$, on considère le lacet

$$t \in [0,1] \longmapsto f\Big(\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\Big) - f\Big(-s\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\Big).$$

Montrer que tous les γ_s, $s \in [0,1]$, sont des lacets continus de support dans $\mathbb{C}^*$ et que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans l'homotopie entre lacets libres dans $\mathbb{C}^*$ (voir l'exercice 7). Montrer que $\mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma_1, 0)$.

b) Pourquoi existe-t-il une fonction contine $c_1\ : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que $\gamma_1(t) = \exp(c_1(t))$ pour tout $t \in [0,1]$? Vérifier qu'il existe deux entiers k_1 et l_1 tels que

$$\begin{aligned} \forall\, t \in [0,1/2]\,,\ c_1(t+1/2) - c_1(t) &= (2k_1+1)i\pi \\ \forall\, t \in [1/2,1]\,,\ c_1(t-1/2) - c_1(t) &= (2l_1+1)i\pi. \end{aligned}$$

Indication : *on utilisera le fait que $\gamma_1(t+1/2) = -\gamma_1(t)$ sur $[0,1/2]$ et que $\gamma_1(t-1/2) = -\gamma_1(t)$ sur $[1/2,1]$.*

c) En vérifiant, pour tout $t \in [0,1/2]$, que

$$c_1(t+1/2) = c_1(t+1/2) + 2(k_1+l_1+1)i\pi\,,$$

montrer que $k_1 \neq l_1$, puis que $\mathrm{Ind}(\gamma_1, 0) = k_1 - l_1 \neq 0$. Déduire du **a)** que $\mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) \neq 0$.

d) On suppose que $f(0)$ est un point frontière de $f(\overline{D(0,1)}$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_n$ de nombres complexes tendant vers $f(0)$ et tels que le lacet $\Gamma_n\ : t \in [0,1] \longmapsto f(e^{it}) - w_n$ ait son support dans $\mathbb{C}^*$ et soit d'indice nul par rapport à l'origine.
Indication : *on utilisera le fait qu'une fonction continue ne s'annulant pas dans $\overline{D(0,1)}$ s'écrit comme l'exponentielle d'une fonction continue dans $\overline{D(0,1)}$, voir l'exercice* 14.

e) Montrer (en utilisant le théorème de Rouché) que $\mathrm{Ind}(\Gamma_n, 0) = \deg \gamma_0$ pour n assez grand et conclure à une contradiction.

f) Montrer que si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si f est une application injective continue de U dans $\mathbb{C}$, $f(U)$ est un ouvert.

Exercice 19 (*) : intégration des formes localement exactes sur un chemin continu. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma\ : [0,1] \to U$ un chemin continu de U et ω une 1-forme continue localement exacte au voisinage de U. Existe-t-il toujours un voisinage V du support de γ dans lequel ω soit exacte ? Sinon, donner un contre-exemple.

Exercice 20 (**) : intégration sur un lacet des formes localement exactes et exactes. Soit $R = P/Q$ une fraction rationnelle dans $\mathbb{Q}(X)$ et γ un lacet continu de $\mathbb{C}$ dont le support évite tous les pôles de R dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma R(z)\,dz$$

est un nombre complexe algébrique (*les nombres algébriques forment un sous-corps de* $\mathbb{C}$).
Indication : *on pensera à utiliser la décomposition en éléments simples de* R *dans* $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 21 (*) : formule de Cauchy. Calculer les intégrales curvilignes

$$\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}\,dz \qquad \int_\gamma \frac{e^{\overline{z}} - e^{-\overline{z}}}{z^4}dz\,, \qquad \gamma\ : t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}.$$

Exercice 22 (**) : la formule de Cauchy-Pompeïu. Soit φ une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{C}$, nulle hors du disque $D(0,R_0)$ pour un certain $R_0 > 0$.

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{z-\zeta} = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\zeta}}(z+\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta}.$$

où l'on a noté sous l'intégrale $\zeta = \xi + i\eta$.
Indication : *on appliquera la formule de Cauchy-Pompeïu (que l'on rappellera) et l'on se souviendra que* $(\xi,\eta) \mapsto 1/(\xi + i\eta) = 1/\zeta$ *est localement intégrable dans* $\mathbb{R}^2$.

b) Déduire de **a)** qu'il existe une fonction Φ de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ (que l'on explicitera) telle que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{z}}(z) = \varphi(z)\,,\ \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Exercice 23 (***) : de la formule de Cauchy Pompeïu à l'identité de Bézout. Soient $p_1, ..., p_m$ m polynômes de n variables sans zéros communs dans $\mathbb{C}$, avec $d = \max(\deg p_j) > 0$.

a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$\zeta \in \mathbb{C}\setminus\{z\} \longmapsto \sum_{j=1}^m \Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{j=1}^m |p_j(\zeta)|^2}\Big)\frac{p_j(\zeta)-p_j(z)}{\zeta - z}$$

se prolonge en une fonction Q_z de classe C^1 dans $\mathbb{C}$. Calculer $Q_z(\zeta)(z-\zeta)+1$.

b) Soit $R > 0$ et z un point du disque ouvert $D(0,R)$. Représenter au point z avec la formule de Cauchy-Pompeïu (que l'on rappellera) la fonction

$$\zeta \in D(0,R) \longmapsto (Q_z(\zeta)(z-\zeta)+1)^2.$$

c) En fixant z et en faisant tendre R vers l'infini dans la formule établie au **b)**, construire m polynômes $q_1, ..., q_m$ à coefficients complexes tels que

$$1 = \sum_{j=1}^m p_j(z)q_j(z)\,,\ \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Quelle autre méthode (algébrique cette fois) permet aussi de calculer de tels polynômes q_j ?