Feuille de TD 3 - Analyse complexe M1 - Alain Yger (semaine 40)

<u>THEMES</u> : Holomorphie, formule de Cauchy, théorème de Morera ; développement en série entière : principe des zéros isolés ; méromorphie en un point ; théorème de Casaroti-Weierstrass ; principes du maximum (local et global) ; théorème de Montel (déduit du théorème d'Ascoli).

<u>Sources</u> : Amar-Matheron [Analyse complexe] (Cassini), Berenstein-Gay [Complex variables] (GTM 125, Springer), Yger [Analyse complexe et distributions](Ellipses).

NOTA. Les étoiles indiquent le niveau de difficulté de l'exercice.

Exercice 1 (*) : formule de Cauchy. Calculer les intégrales curvilignes

$$\int_{|\zeta+i|=3} \sin\zeta \, \frac{d\zeta}{\zeta+i}\,, \quad \int_{|\zeta|=4} \frac{\cos\zeta}{\zeta^2-\pi^2}\,, \quad \int_{|\zeta|=2} \frac{d\zeta}{(\zeta-1)^n(\zeta-3)},$$

les chemins d'intégration mentionnés étant parcourus une seule fois dans le sens trigonométrique.

Exercice 2 (*) : holomorphie et formule de Cauchy. Soit f une fonction à valeurs complexes définie et continue dans la couronne fermée $\overline{C_{r,R}} := \{r \leq |z| \leq R\}$ du plan complexe (où $r < R$ sont deux nombres strictement positifs), holomorphe dans la couronne ouverte $C_{r,R} := \{r < |z| < R\}$. On note respectivement γ_r et γ_R les lacets $t \in [0,1] \mapsto re^{2i\pi t}$ et $t \in [0,1] \mapsto Re^{2i\pi t}$. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\Big(\int_{\gamma_R} \frac{\zeta^n f(\zeta)}{z^n(\zeta-z)}\,d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{\zeta^n f(\zeta)}{z^n(\zeta-z)}\,d\zeta\Big) \qquad \forall\, z \in C_{r,R}.$$

En déduire, pour tout $z \in C_{r,R}$, les formules de représentation "approchées" :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_{\gamma_R} \frac{\zeta^n f(\zeta)}{z^n(\zeta-z)}\,d\zeta\Big) = -\frac{1}{2i\pi}\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_{\gamma_r} \frac{z^n f(\zeta)}{\zeta^n(\zeta-z)}\,d\zeta\Big).$$

–

Exercice 3 (*) : holomorphie et formule de Cauchy. Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe une unique fonction F holomorphe dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall\, r > 0\,,\ F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad \forall\, z \in D(0,r)\,,$$

où $\gamma_r \ : t \in [0,1] \longmapsto re^{2i\pi t}$. Quelle est la fonction F lorsque $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 4 (**) : holomorphie et formule de Cauchy. Soit $I = [ia, ib]$ un intervalle fermé de l'axe imaginaire du plan complexe (avec $a < b$) et f une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert de I. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus I$, on pose

$$\Phi(z) := \frac{1}{2i\pi}\int_I \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,.$$

Montrer que la fonction Φ est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus I$ et que, pour tout z dans I, on a

$$f(z) = \lim_{\substack{\zeta\to z\\ \mathrm{Re}\,\zeta<0}} \Phi(\zeta) = \lim_{\substack{\zeta\to z\\ \mathrm{Re}\,\zeta>0}} \Phi(\zeta).$$

Exercice 5 (**) : développement en série entière d'une fonction holomorphe et formules de Cauchy pour les coefficients de Taylor. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D(0,1)}$, injective sur ce disque fermé. Montrer que $f\circ\gamma \ : t \in [0,1] \longmapsto f(e^{2i\pi t})$

est un lacet continu simple et appliquer la formule de Green-Riemann pour montrer que la surface A_f du domaine enserré par le support de ce lacet vaut

$$A_f = \frac{1}{2i}\int_{f\circ\gamma} \overline{z}dz = \frac{1}{2i}\int_\gamma \overline{f(\zeta)}\, f'(\zeta)\, d\zeta \text{ avec } \gamma\ : t\in[0,1]\longmapsto e^{2i\pi t}.$$

Si $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ est le développement de f au voisinage de 0, vérifier la relation

$$\sum_{n=1}^\infty n|a_n|^2 = \frac{A_f}{\pi} \leq (\sup_{|z|=1}|f(z)|)^2.$$

Exercice 6 (*) : nombres de Bernoulli. En faisant la division suivant les puissances croissantes de X par $\sum_{k\geq 1} X^k/k!$, on obtient

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!}X^k\,,$$

où les B_k sont les *nombres de Bernouilli.* Quel est le rayon de convergence de la série entière $[(B_k/k!)z^k]_{k\geq 0}$?

Exercice 7 (**) : fonctions de Bessel. Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une collection de nombres complexes $(J_n(z))_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que

$$\forall\,\zeta\in\mathbb{C}^*,\ \exp\Big[\frac{z}{2}\Big(\zeta-\frac{1}{\zeta}\Big)\Big] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)\zeta^n.$$

Vérifier que pour tout entier $n\in\mathbb{Z}$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$J_n(z) = \Big(\frac{z}{2}\Big)^n \sum_{k=\max(0,-n)} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k}.$$

Montrer enfin que J_n est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$, solution de l'équation différentielle de Bessel

$$z^2J_n''(z) + zJ_n'(z) + (z^2-n^2)J_n(z) = 0.$$

Exprimer en fonction de J_1 la transformée de Fourier de la fonction caractéristique du disque unité.

Exercice 8 (*) : holomorphie et développement en série. Existe-t-il une fonction f holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$ et telle que

$$f(1/n) = f(-1/n) = 1/(2n+1)$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$? Même question avec cette fois les contraintes

$$|f(1/n)|\leq 2^{-n} \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Exercice 9 (*) : holomorphie et développement en série. Soit f une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ et telle que $f''(1/n) = f(1/n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier.

Exercice 10 (*) : dérivée d'une fonction holomorphe. Soient $f_1,\ldots,f_m$ m fonctions holomorphes dans un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, telles que $\sum_{j=1}^n |f_j|^2$ soit une fonction constante dans U. Montrer qu'alors toutes les fonctions f_j, $j=1,\ldots,m$, le sont aussi.

Exercice 11 (**) : série de Fourier d'une fonction holomorphe périodique. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $f(z+1)=f(z)$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe dans $\mathbb{C}^*$ telle que $f(z) = g(e^{2i\pi z})$. Montrer que l'on a, pour tout w dans $\mathbb{C}^*$,

$$g(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k w^k \,,$$

avec

$$a_k = \int_0^1 f(t+ib)e^{-2i\pi k(t+ib)}\, dt \qquad \forall\, b \in \mathbb{R} \,.$$

Exercice 12 (***) : holomorphie et développement en série. Soit $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ et R le maximum des modules de tous les pôles de F dans $\mathbb{C}$. Montrer que, pour $|z| > R$, la fonction F se développe dans la couronne $\{|z| > R\}$ sous la forme

$$F(z) = a_m z^m + \cdots + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{z^k} \,, \qquad (*)$$

où $m \in \mathbb{N}$, $a_m, ..., a_0 \in \mathbb{C}$ et la suite $(a_{-k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une certaine relation de récurrence linéaire. Réciproquement, si F est une fonction holomorphe dans une couronne $\{|z| > R\}$ se développant sous la forme $(*)$, où la suite $(a_{-k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ obéit à une relation de récurrence linéaire, peut-on affirmer que F est la restriction à la couronne $\{|z| > R\}$ d'une fraction rationnelle ?

Exercice 13 (**) : holomorphie et développement en série ; procédé sommatoire de Borel.

a) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction holomorphe dans $D(0, R)$ $(R > 0)$. Montrer que l'on définit une fonction entière F en posant

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

et que, l'on a, pour tout $r \in]0, R[$, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(\zeta) e^{z/\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} \,.$$

Vérifier aussi que pour tout $\rho \in]0, R[$, $|F(z)| = O(\exp(|z|/\rho)$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$.

b) Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| = O(\exp(\kappa|z|))$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ (pour un certain $\kappa > 0$) et $b_n = F^{(n)}(0)/n!$ pour $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les inégalités de Cauchy, montrer que le rayon de convergence de la série $[n! b_n z^n]_{n\geq 0}$ est au moins égal à $1/\kappa$.

Exercice 14 (*) : singularités essentielles ou non. Quel est le type des singularités des fonctions suivantes

$$z \mapsto \frac{1}{z^2-1} \cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right), \ z \mapsto \operatorname{cotan} z - \frac{1}{z}, \ z \mapsto z(e^{1/z} - 1) \,?$$

Exercice 15 (*) : singularités essentielles ou non.

a) Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine (l'origine est retirée), telle que $|f(z)| \leq C|z|^{-1/2}$ lorsque $|z|$ tend vers 0. Montrer que la singularité de f en 0 est une singularité éliminable (c'est-à-dire que f peut se prolonger en une fonction holomorphe au voisinage de 0).

b) Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine (l'origine est retirée). Montrer que 0 est une singularité essentielle de f si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{r\to 0} [r^n (\sup_{|z|=r} |f(z)|)] = +\infty.$$

En déduire que si g est une fonction holomorphe au voisinage de 0, non identiquement nulle, et telle que $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ a une singularité essentielle en 0 dès que f en a une.

c) Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine (l'origine est retirée), méromorphe à l'origine (c'est-à-dire présentant en 0 une singularité non essentielle, dite aussi pôle). Soit g une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ non polynomiale. Montrer que 0 est une singularité essentielle de $g \circ f$.

d) Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine (l'origine est retirée), présentant une singularité essentielle en 0. Montrer que, si g est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ et non constante, $g \circ f$ présente une singularité essentielle en 0.

Exercice 16 (*) : inégalités de Cauchy et théorème de Liouville. Soient f et g deux fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$ et telles que $|f(z)| \leq C|g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $f = \lambda g$, où λ est un nombre complexe tel que $|\lambda| \leq C$. Que peut-on dire d'une fonction entière f telle que $|f(z)| \leq e^{\mathrm{Re}\, z}$?

Exercice 17 (**) : inégalités de Cauchy. Soit f une fonction holomorphe dans la couronne ouverte $C_{r,R} := \{z\,;\, r < |z| < R\}$, où $0 < r < R < +\infty$, telle que, $\forall\, z \in C_{r,R}$, $\mathrm{Re}\,(f(z)) \in [A, B]$. Montrer que, pour tout $\rho \in]r, R[$,

$$\sup_{|\zeta|=\rho} |f'(\zeta)| \leq \frac{e^{B-A}}{\min(\rho - r, R - \rho)}.$$

Indication : *on raisonnera avec $g = \exp f$.*

Exercice 18 (*) : principe du maximum.

a) Soit f une fonction continue dans un demi-plan fermé $\overline{\Pi}$, holomorphe dans le demi-plan ouvert Π. On suppose que $|f|$ est bornée par M sur la frontière de Π et que

$$\limsup_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\Pi}} |f(z)| \leq M'.$$

Montrer que $|f|$ est bornée par $\sup(M, M')$ dans $\overline{\Pi}$.

b) En considérant la fonction $z \mapsto e^{\cos z}$, vérifier que le principe du maximum global dans $\overline{\Omega}$ peut fort bien être en défaut lorsque Ω est non borné.

Exercice 19 (*) : principe du maximum. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. Si $|f|$ présente un minimum en $z_0 \in \Omega$, que peut valoir ce minimum ?

Exercice 20 (*) : principe du maximum. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. On imagine le graphe de $(x, y) \mapsto |f(x + iy)|^2$ vu comme une "carte en relief" dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Quelle particularité (ou plutôt anomalie) présente cette carte en relief (si on la compare à une carte en relief classique d'un massif montagneux, telle une carte IGN) ?

Exercice 21 (*) : principe du maximum. Soit P un polynôme de degré d et a un nombre strictement positif. Montrer que l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |P(z)| < a\}$ ne saurait avoir plus de d composantes connexes.

Exercice 22 (*) : principe du maximum. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, φ une fonction de classe C^1 dans Ω, à valeurs réelles, telle que la surface $S = \{\varphi = 0\}$ soit régulière (le gradient de φ ne s'annule pas sur cette surface). Montrer que si f est une une fonction holomorphe dans U telle que $f(\Omega) \subset S$, alors nécessairement f est constante dans Ω.

Exercice 23 (**) : le théorème de Montel sans Ascoli. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes dans un voisinage ouvert du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$ et $f_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} z^k$ le développement en série entière de f_n au voisinage de l'origine. On suppose que les fonctions $|f_n|$ sont uniformément bornées par une constante M_K sur tout compact K inclus dans leur domaine de définition.

a) En utilisant les inégalités de Cauchy et le processus diagonal, montrer que l'on peut extraire de la suite des entiers positifs une sous suite strictement croissante $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(a_{n_l,k})_k$ converge vers un certain nombre complexe a_k.

b) En utilisant toujours les inégalités de Cauchy dans la majoration

$$|f_{n_l}(z) - f_{n_l}(z)| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_{n_l,k} - a_{n_{l'},k}|\,|z|^k + 2\sum_{k>N} \sup_n |a_{n,k}|\,,$$

montrer que, pour tout $z \in \overline{D(0,1)}$, la suite $(f_{n_l}(z))_{l\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Conclure à l'existence d'une fonction g continue sur $\overline{D(0,1)}$ telle que $\lim_{l\to+\infty} f_{n_l}(z) = g(z)$. Pourquoi g est-elle holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1)$?

c) Déduire des questions précédentes une démonstration du théorème de Paul Montel [1] qui ne fasse pas appel au théorème d'Ascoli.

Exercice 24 (**) : théorème de Montel. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$ une famille bornée de fonctions holomorphes dans U (il existe une constante M telle que pour tout $f \in \mathcal{F}$, pour tout $z \in U$, $|f(z)| \leq M$). Montrer que la famille $\mathcal{F}' := \{f'\,;\, f \in \mathcal{F}\}$ est aussi une famille bornée.
Indication : *on supposera qu'il existe une suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}'$ telle que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_n \in U$ avec $|f'_n(z_n)| > n$ et on montrera que ceci est en contradiction avec le théorème de Montel.*
Si $\mathcal{F}'$ est une famille bornée, en est-il de même de $\mathcal{F}$?

Exercice 25 (*) : théorème de Montel. La topologie de la convergence uniforme sur tout compact sur l'espace des fonctions holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ peut-elle être définie par une norme ?
Indication : *on pensera au théorème de F. Riesz caractérisant les espaces vectoriels normés de dimension finie en termes de relative compacité de la boule unité ouverte.*

Exercice 26 (*) : théorème de Montel. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions holomorphes de Ω dans lui-même. Pourquoi $\mathcal{F}$ est-elle une partie relativement compact de l'ensemble $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω, équipé de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ? Quelle est l'adhérence de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{H}(\Omega)$? Vérifier que $\mathcal{F}$ est un semi-groupe pour la composition des applications et que, si $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ et $g = \lim_{n\to+\infty} g_n$ dans $\mathcal{F}$, alors $g \circ f = \lim_{n\to+\infty}(g_n \circ f_n)$ (toujours pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω).

Exercice 27 (*) Suites de fonctions holomorphes. Pour chacun des exemples suivants, montrer que l'on définit bien une fonction holomorphe dans l'ouvert indiqué entre parenthèses :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n!} \quad (\text{dans } \mathbb{C}) \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z(z-n)} \quad (\text{dans } \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}^*)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}\,z^2} \quad (\text{dans } |\mathrm{Arg}_{]-\pi,\pi[}\, z| < \pi/4) \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\sin(nz) \quad (\text{dans } |\mathrm{Im}\, z| < 1).$$

[1] Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}$, uniformément bornée en module sur tout compact de cet ouvert, alors on peut extraire de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(f_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ qui soit uniformément convergente sur tout compact de U vers une fonction g holomorphe dans U.