Feuille de TD 5 - Analyse complexe M1 - Alain Yger (semaine 42)

THEMES : Fonctions harmoniques, sous-harmoniques, super-harmoniques ; caractérisation en termes de formules de la moyenne (resp. de la sous-moyenne ou sur-moyenne) ; fonction de Green et noyau de Poisson ; formule de représentation de Green.

Sources : Amar-Matheron [Analyse complexe] (Cassini), Berenstein-Gay [Complex variables] (GTM 125), Yger [Analyse complexe et distributions](Ellipses).

NOTA. Les étoiles indiquent le niveau de difficulté de l'exercice.

Exercice 1 (*) : harmonicité et propriétés de moyenne. Soit u une fonction de classe C^2 dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, telle que, pour toute boule fermée $\overline{B}$ incluse dans Ω, on ait

$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\rm ext}}\, d\sigma = 0\,,$$

où σ désigne la mesure surfacique sur le bord de $\overline{B}$. Montrer que u est harmonique dans Ω.

Exercice 2 (*) : harmonicité et formule de la moyenne (théorème de Kellog). Soit u une fonction continue réelle dans la boule fermée $\overline{B(0,R)}$ de $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout x dans la boule ouverte $B(0,R)$, il existe $r(x) \in]0, d(x,\partial B)[$ tel que

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n (r(x))^{n-1}} \int_{\delta B(x,r(x))} u\, d\sigma_{B(x,r(x))},$$

où $\sigma_{B(x,r(x))}$ désigne la mesure surfacique sur le bord de $\overline{B(x,r(x))}$.

a) Comment s'exprime l'unique fonction v harmonique dans $B(0,R)$, continue dans $\overline{B(0,R)}$, et telle que $v = u$ sur le bord de $\overline{B(0,R)}$?

b) On note $w = u - v$ et $M := \max_{\overline{B(0,R)}} w$ et l'on suppose $M > 0$. On suppose que l'ensemble $E = \{w = M\} \cap B(0,R)$ est non vide. Montrer qu'il existe au moins un point x_0 de $B(0,R)$ tel que

$$d(x_0, \partial B(0,R)) = d(E, \partial B(0,R)) > 0.$$

c) Montrer que

$$\int_{\partial B(x_0, r(x_0))} (w(x_0) - w)\, d\sigma_{B(x_0,r(x_0))} = 0$$

et en conclure que $w \equiv M$ dans $B(x_0, r(x_0))$. Pourquoi ceci contredit-il l'hypothèse faite sur E (E non vide) ?

d) Déduire de la contradiction établie au **c)** que u est harmonique dans $B(0,R)$.

Exercice 3 : fonctions sous-harmoniques. Soit u une fonction continue et à valeurs réelles dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

a) Rappeler ce que signifie le fait que u est sous-harmonique dans Ω.

b) Montrer que u est sous-harmonique dans Ω si et seulement si, pour tout ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$, pour toute fonction h harmonique réelle sur Ω' et continue sur $\overline{\Omega}'$, on ait

$$\forall\, x \in \Omega',\ u(x) - h(x) \leq \sup_{y \in \partial \Omega'} (u(y) - h(y)).$$

Exercice 4 : sous-harmonicité. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. et u une fonction localement intégrale dans Ω, à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$. On suppose que, pour tout $x \in \Omega$, pour tout $r \in]0, d(x, \partial\Omega)[$,

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u d\sigma_{B(x,r)}.$$

La fonction u est-elle sous-harmonique dans Ω ? Pour tout $x \in \Omega$, on pose

$$u^*(x) = \limsup_{y \to x}(u(y))\,.$$

Même question que précédemment pour cette fois la fonction u^*.

Exercice 5 : formule de représentation ($n = 2$). Soit Ω ou ouvert borné du plan de frontière C^1, u une fonction de classe C^1 au voisinage de $\overline{\Omega}$, de classe C^2 et harmonique dans Ω. Vérifier la formule de représentation :

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\text{ext}}}(\zeta) \log|\zeta - z|\, d\sigma(\zeta) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} u(\zeta)\frac{\partial}{\partial \nu_{\text{ext}}}\Big[\log|\zeta - z|\Big]\, d\sigma(\zeta)\,,$$

où $d\sigma$ représente la mesure lineique sur le bord de $\partial\Omega$. Que devient cette formule de représentation en dimension n ? Que devient cette formule de représentation lorsque u est de classe C^2 dans Ω, mais n'est plus supposée harmonique ?

Exercice 6 : principe de réflexion pour les fonctions harmoniques. Soit u une fonction harmonique dans $]a,b[+i]0,\delta[$, se prolongeant par continuité à $]a,b[+i[0,\delta[$, nulle sur le segment réel $]a,b[$. Montrer que la fonction définie dans $]a,b[+i]-\delta,\delta[$ par $v(z) = u(z)$ si $\operatorname{Im} z \geq 0$ et $v(z) = -v(\overline{z})$ si $\operatorname{Im} z \leq 0$ est harmonique dans $]a,b[\times i]-\delta,\delta[$.

Exercice 7 : mesure harmonique. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière C^1. On suppose qu'étant donnée une fonction continue quelconque $\varphi\,:\partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$, il existe une fonction $P[\varphi]$ continue sur $\overline{\Omega}$, harmonique dans Ω et égale à φ sur $\partial\Omega$.

a) Montrer qu'une telle fonction $P[\varphi]$ est unique et exprimer là en termes de la fonction de Green G_Ω de l'ouvert Ω (on admet l'existence d'une telle fonction de Green).

b) Montrer que l'espace des fonctions continues de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}$ est un espace de Banach E pour la norme uniforme, qu'il en est de même pour l'espace des fonctions continues de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$ (aussi pour la norme uniforme) et que $\varphi \mapsto P[\varphi]$ est une isométrie de E dans F. En déduire que, pour tout $x \in \overline{\Omega}$, l'application

$$\varphi \in E \mapsto P[\varphi](x)$$

est une forme linéaire L_x continue positive sur E, i.e une forme linéaire continue L_x telle que $L_x(\varphi) \geq 0$ si $\varphi \geq 0$. Peut-on donner un sens à $L_x(\chi_A)$ si A est un sous-ensemble mesurable de $\partial\Omega$? Si oui, pourquoi définit-on ainsi une mesure positive L_x sur le bord de Ω ?

Exercice 8. On suppose que l'on peut résoudre le problème de Dirichlet pour l'ouvert $\Omega = D(0,1) \setminus \{0\}$ du plan complexe, ce qui implique que l'on puisse construire une fonction de Green G_Ω, s'écrivant donc sous la forme

$$G_\Omega(z,w) = \frac{\log|z-w|}{2\pi} + h_w(z)\,,$$

où h_w est de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$, de classe C^2 et harmonique dans Ω. Pourquoi la fonction harmonique $z \mapsto h_w(z)$ a t-elle une singularité éliminable en $z = 0$? Montrer que la fonction G définie par $G(z) = G_\Omega(z,w)$ est sous-harmonique dans $D(0,1)$ et conclure à une contradiction avec le principe du maximum. En déduire que Ω ne saurait posséder de fonction de Green. Le même résultat se transpose-t'il à la dimension n ?