Feuille de TD 6 - Analyse complexe M1 - Alain Yger (semaine 43)

THEMES : Fonctions harmoniques, sous-harmoniques dans $\mathbb{C}$; intégrale de Poisson d'une mesure borélienne sur $\mathbb{T}$; valeurs au bord des fonctions holomorphes.

Sources : Amar-Matheron [Analyse complexe] (Cassini), Berenstein-Gay [Complex variables] (GTM 125), Yger [Analyse complexe et distributions](Ellipses).

NOTA. Les étoiles indiquent le niveau de difficulté de l'exercice.

Exercice 1 (*) : harmonicité et propriétés de moyenne. Soit u une fonction harmonique dans une couronne ouverte $\{R_1 < |z| < R_2\}$. On pose, pour tout $r > 0$,

$$f(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Montrer que $f(r) = a \log r + b$, où a et b sont deux constantes. Montrer que si P est un polynôme de Laurent, i.e. $P(z) = \sum_{-N}^{N} a_k z^k$, il existe une subdivision $R_0 = 0 < R_1 < ... < R_{m-1} < R_m = +\infty$ de $]0, \infty[$ telle que la fonction

$$r \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(re^{i\theta}|\, d\theta$$

soit une fonction affine de $\log r$ sur chaque intervalle ouvert $]R_k, R_{k+1}[$.

Exercice 2 (*) : harmonicité et holomorphie. Montrer que toute fonction réelle harmonique dans $\mathbb{C}$ et bornée supérieurement est constante.

Exercice 3 (**) : formule de représentation de Poisson.

a) Vérifier, pour $\zeta \in \{|\zeta| = 1\}$ et $z \in D(0,1)$, la relation

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \mathrm{Re}\,\Big(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\Big).$$

En déduire que si u est une fonction harmonique dans $D(0,1)$ et continue dans $\overline{D(0,1)}$, l'unique fonction h (on dira au passage pourquoi elle est unique) holomorphe dans $D(0,1)$, telle que $\mathrm{Im}\, h(0) = 0$ et que $\mathrm{Re}\, h = u$ dans $D(0,1)$, est donnée par

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta)\, \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

b) Soit f une fonction holomorphe dans $D(0,1)$, nulle en 0, et telle que $|\mathrm{Re}\, f| \le A$ dans $D(0,1)$. Montrer que, si $0 < r < 1$, on a, pour tout $z \in D(0,r)$,

$$|\mathrm{Im}\, f(z)| \le \frac{2A}{\pi} \log \frac{1+r}{1-r}.$$

Exercice 4 (**) : inégalité de Harnack. Soit u une fonction continue positive dans $\overline{D(z_0, R)}$, harmonique dans $D(z_0, R)$.

a) Établir, pour tout $z \in D(z_0, R)$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, l'inégalité :

$$\frac{R - |z - z_0|}{R + |z - z_0|} \le \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + Re^{i\theta} - z|^2} \le \frac{R + |z - z_0|}{R - |z - z_0|}.$$

b) En déduire que si u est une fonction continue positive dans $\overline{D(z_0, R)}$, harmonique dans $D(z_0, R)$, on a l'*inégalité de Harnack* :

$$\frac{R - |z - z_0|}{R + |z - z_0|} u(z_0) \le u(z) \le \frac{R + |z - z_0|}{R - |z - z_0|} u(z_0) \qquad \forall\, z \in D(z_0, R).$$

c) En utilisant l'inégalité établie au **a)** (on pourra se ramener au cas des fonctions harmoniques positives réelles), montrer que si u est une fonction harmonique de $\mathbb{C}$ dans lui-même, bornée en module, alors u est constante (comparer avec le résultat établi dans l'exercice 2).

Exercice 5 (**) : intégrale de Poisson. Pour tout $z \in D(0,1)$, on définit une fonction $\varphi_z : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ comme suit (faire un petit dessin) : le point $e^{i\varphi_z(\theta)}$ est l'intersection du cercle unité et de la demi-droite issue de z et dirigée par $e^{i\theta}$, avec la convention $0 \leq \varphi_z(\theta) - \theta < 2\pi$.

a) Montrer que φ_z est différentiable et que

$$\varphi_z'(\theta) = \Big| \frac{e^{i\varphi_z(\theta)} - z}{e^{i\theta} - z} \Big|.$$

b) Montrer que, si u est une fonction continue sur $\mathbb{T}$, alors, si $P(u)$ désigne l'intégrale de Poisson de u,

$$P(u)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi_z(\theta)})\, d\theta.$$

Exercice 6 (**) : formule de Poisson, fonctions sous-harmoniques. Soit u une fonction continue, positive dans $\overline{B(0,R)}$ et sous-harmonique dans $B(0,R)$. Soit $z_0 \in B(0,R)$ et C un cercle de centre z_0 inclus dans $D(0,R)$.

a) Soit v la fonction harmonique dans $D(0,R)$ égale à u sur le bord de ce disque. Comparer

$$\int_C u(z) d\sigma_C$$

et $v(z_0)$ ($d\sigma_C$ désigne la mesure de Lebesgue sur le cercle C).

b) Utiliser la formule de Poisson pour établir :

$$\int_C u(z) d\sigma_C \leq \Big(1 + \frac{|z_0|}{R}\Big) \int_{\partial C(0,R)} d\sigma_{\partial D(0,R)}.$$

Exercice 7 (*) : sous harmonicité de $|f|^p$ pour f holomorphe et $p > 0$. Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,1)}$. Montrer, pour tout $p > 0$, l'*inégalité de Hardy* :

$$\frac{1}{\pi} \int_{D(0,1)} |f|^p \, d\lambda \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \, d\theta\,.$$

Exercice 8 (**) : sous-harmonicié et convexité. Soit u une fonction continue dans la couronne ouverte $\{0 \leq R_1 < |z| < R_2 \leq \infty\}$. Montrer que la fonction

$$r \mapsto \log \lambda(u, 0, r) := \log \Big[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta \Big]$$

est une fonction convexe de $\log r$ dans $]R_1, R_2[$ si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, $r \mapsto r^\alpha \lambda(u, O, r)$ est une fonction convexe de $\log r$. Si l'on suppose en plus $\log u$ sous-harmonique dans la couronne, montrer qu'il en est de même pour $z \mapsto \log(u(z)) + \alpha \log |z|$ et $z \mapsto |z|^\alpha u(z)$ pour tout $\alpha > 0$. Calculer $\lambda(|z|^\alpha u, 0, r)$ en fonction de $\lambda(u, 0, r)$ si $r \in]R_1, R_2[$. Montrer enfin que si u est une fonction positive dans la couronne et telle que $\log u$ y soit sous-harmonique, alors $r \mapsto \log(\lambda(u, 0, r))$ est une fonction convexe de $\log r$ dans $]R_1, R_2[$.