Feuille d'exercices n° 3 — Dérivabilité

Le symbole log *désigne la fonction logarithme népérien.*

Exercice 1
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sqrt{1 + x^2 \sin^2 x}\ , \quad f_2(x) = \frac{\exp(1/x) + 1}{\exp(1/x) - 1}\ ,$$

$$f_3(x) = \log\left(\frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)}\right)\ , \quad f_4(x) = (x(x-2))^{1/3}\ .$$

Exercice 2
Prolonger par continuité en 0 puis étudier la dérivabilité en ce même point des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = x^2 \cos(1/x)$.
2. $f_2(x) = \sin x \sin(1/x)$.

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction (continue) définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en 0.
2. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

Exercice 4
Montrer qu'une fonction qui est dérivable sur un intervalle I, sur lequel elle a dérivée bornée, est uniformémement continue sur I.

Exercice 5
Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admettant deux limites égales en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que la dérivée de f s'annule sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6
Soit f une fonction dérivable sur $]0, 1]$. On suppose qu'il existe un réel a tel que pour tout x de I, $|f'(x)| < a$. Montrer, en utilisant un critère de Cauchy, que la suite $f(1/n)$ (pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$) converge.

Exercice 7
Soit f une fonction numérique dérivable non bornée sur une intervalle fini ouvert. Montrer que f' n'est pas borné sur cet intervalle. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 8
Soient $n \geq 1$ un entier et a et b deux réels. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles.

Exercice 9
Montrer, à l'aide du théorème de Rolle, que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = \left[\left(1 - t^2\right)^n\right]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1, 1]$.

Exercice 10

1. En étudiant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, estimer la différence $\sqrt{100,1} - 10$.
2. En étudiant la fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$, estimer la différence $1 - \exp(-0,1024)$

Exercice 11
Appliquer le théorème des accroissements finis (ou ses variantes) pour démontrer les inégalités suivantes

1. $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \qquad$ pour $x, y \in \mathbb{R}$;
2. $\log(1 + x) \leq x \qquad$ pour $x \geq 0$;
3. $e^x \geq 1 + x \qquad$ pour $x \in \mathbb{R}$;
4. $\dfrac{x}{1 + x^2} \leq \arctan x \leq x \qquad$ pour $x \geq 0$.

Exercice 12
Soient x et y deux réels avec $0 < x < y$. Montrer que l'on a

$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$

Exercice 13
Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\log(x + 1)} - \sqrt{\log x} \right) = 0.$$

Exercice 14
Appliquer la règle de Bernoulli-L'Hospital pour calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{x}{x - 1}\right), \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{x \sin x}\right), \quad \lim_{x \to \pi} (x - \pi) \tan \frac{x}{2},$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}.$$

Exercice 15
Soit f une fonction dérivable en x_0. Calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h^2) - f(x_0 + h)}{h}.$$

Exercice 16
Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$. On suppose que $f(x) \neq 0$ pour $x \in]0,1[$ et que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $f'(0)f'(1) \leq 0$. (Indication : montrer d'abord que f est de signe constant sur $[0,1]$).

Exercice 17
Soit f une fonction dérivable sur $[a,b[$. On suppose que $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.

1. Montrer que f' n'est pas bornée sur $[a,b[$.
2. Peut-on dire que $\lim_{x\to b} f'(x) = +\infty$? (Etudier la fonction $f(x) = \frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}$).

Exercice 18
Soit f une fonction dérivable sur $[-1,1]$, dont on suppose que $f(-1) = 0 = f(1)$. On note $f'(-1)$ et $f'(1)$ les dérivées à droite en -1 et à gauche en 1, respectivement. On pose $g(x) = \frac{f(x)}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité sur $[-1,1]$. On note $\tilde{g}$ la fonction prolongée ; expliciter $\tilde{g}(1)$ et $\tilde{g}(-1)$ en fonction des données de l'énoncé.
2. Montrer qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que $g'(c) = -\frac{1}{4}(f'(1) + f'(-1))$.
3. La fonction $F(x) = \frac{1}{1-x^2}$ est-elle bornée sur $]-1,1[$?
4. Même question pour f.
5. Même question pour g.