Université Bordeaux 1 Année 2012-2013
M1MI2011

Feuille d'exercices n° 4 — Formules de Taylor- Développements limités

---

Exercice 1
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I.

1. Donner l'expression du polynôme de Taylor de f à l'ordre n en un point $x_0 \in I$.
2. Rappeler l'énoncé des formules de Taylor-Young et Taylor-Lagrange pour la fonction f au point x_0, en indiquant soigneusement les hypothèses.

Exercice 2

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x - x^3/6 \leq \sin(x) \leq x - x^3/6 + x^5/120$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x$.
3. Montrer que
$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^x$$

Exercice 3

1. Soit n un entier. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral au voisinage de 0 à l'ordre n pour la fonction $\cos(x)$.
2. En déduire que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k/(2k)!$ a une limite quand n tend vers l'infini, et calculer cette limite.

Exercice 4
Calculer les développements limités en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(x^2) + \sin(x)$ avec $n = 6$.
2. $f(x) = \cos(2x)\sqrt{1+x}$ avec $n = 3$.
3. $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x-x^2}$, avec $n = 4$.
4. $f(x) = (\sin(x^3))^{\frac{1}{3}}$, $n = 13$.
5. $f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$, avec $n = 2$.
6. $f(x) = \ln(1 + x\sin(x))$, et $n = 4$.
7. $f(x) = e^{\cos(x)}$, $n = 4$.
8. $f(x) = (1 + \cos(x))^{1/3}$, $n = 4$.
9. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, $n = 4$.
10. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $n = 3$. (On aura posé $f(0) = e$).

Exercice 5
Soit $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Donner le développement limité de f à l'ordre 4 au point 0 ainsi qu'au point 2.

Exercice 6

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt{1+\sin(x)\mathrm{sh}(x)}$.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de $\arcsin(\ln^2(x))$.

Exercice 7

Soit $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
2. Donner la tangente à la courbe représentative de f au voisinage du point $x = 0$. Donner la position de la courbe par rapport à cette tangente et représenter sommairement le graphe de f au voisinage du point 0.

Exercice 8

On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (e^x - 1)/x$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour tout x.
2. Montrer que f est en fait deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner $f''(0)$.
3. Écrire la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour f. Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.
4. Déterminer les variations de $\phi := xe^x - e^x + 1$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer l'intervalle image J de la fonction f, et montrer que la fonction réciproque g de f est deux fois dérivable sur J.

Exercice 9

1. Calculer les limites suivantes en 0 :
2. $(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x))\frac{1}{x^2}$.
3. $\frac{x\cos(x) - \ sin(x)}{x\ln(1+x^2)}$.
4. $\frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x}$.
5. $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\sinh^2(x)}$.
6. $(\frac{e^{ax}+e^{bx}}{2})^{1/x}$, ($a$ et b réels quelconques).

Exercice 10

Rechercher les asymptotes aux graphes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$.
2. $g(x) = [(x^2 - 2)(x + 3)]^{1/3}$.