Université Bordeaux 1
Département de licence
U.F.R. Mathématiques et Informatique

Mathématiques de base
Fascicule d'Annales, Année 2004-2005

Semestre d'orientation MISMI, cours MIS101

Table des matières

Première partie

Examen commun - Session 1

ANNÉE 2004-2005 | SESSION DE JANVIER 2005

GU : MISMI | **UE** : MIS101

Date : 12/01/2005 | Durée : 3h00

Documents non autorisés

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 6 *points (sur* 20*) et* 14 *points (sur* 20*) ; les exercices 1 à 6 de la partie applicative (partie* II*) sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Les trois séries de questions de la partie* I *sont elles aussi totalement indépendantes entre elles.*

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Série de questions I

I.a. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Donner une définition des trois notions suivantes :

- f injective
- f surjective
- f bijective.

I.b. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 est-elle injective (comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ? Est-elle surjective (toujours comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ? (on justifiera chaque réponse, qu'elle soit positive ou négative).

I.c. L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe z^2 est-elle injective (comme application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) ? Est-elle surjective (toujours comme application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) ? (on justifiera chaque réponse, qu'elle soit positive ou négative).

Série de questions II

Soit x_0 un nombre réel et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ dérivable en x_0.

II.a. Que signifie la dernière hypothèse (f dérivable en x_0) ?

II.b. Après avoir rappelé ce que signifiait l'assertion "*f est continue en x_0*", montrer que cette assertion est vraie.

Série de questions III

III.a. Rappeler le principe du raisonnement par récurrence.

III.b. Vérifier par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

On considère l'équation
$$z^3 - 3z + 1 = 0 \qquad (*)$$
d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1.a. Soient z, u et v des nombres complexes tels que $u - v = z$. Montrer que si u et v vérifient
$$\begin{cases} u^3 - v^3 = -1 \\ uv = -1, \end{cases}$$
alors z est solution de (*).

1.b. Montrer que l'équation en z du second degré
$$z^2 + z + 1 = 0$$
a deux racines complexes distinctes z_1 et z_2 que l'on calculera ; expliciter ces deux racines sous forme trigonométrique ($z = re^{i\theta}$) et placer sur une figure représentant le plan complexe les deux points d'affixes respectives z_1 et z_2.

1.c. Soit $x = e^{2i\pi/3}$ et $y = e^{-2i\pi/3}$. En résolvant les équations $u^3 = x$ et $v^3 = -y$, montrer que trois solutions du système de la question **1.a** sont données par
$$u = e^{2i\pi/9}, \quad v = -e^{-2i\pi/9}$$
$$u = e^{8i\pi/9}, \quad v = -e^{-8i\pi/9}$$
$$u = e^{14i\pi/9}, \quad v = -e^{-14i\pi/9}.$$

1.d. En déduire trois solutions réelles de l'équation (*).

Exercice 2.

2.a. Calculer la dérivée de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
$$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\sin x}.$$

2.b. Déterminer la valeur des limites :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin x}}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin x}}{x}.$$

Exercice 3.

Soif f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par :
$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \text{ si } x \leq -5\pi/2 \\ f(x) &= \sin x + 1 \text{ si } -5\pi/2 < x \leq 0 \\ f(x) &= e^x \text{ si } x > 0 \end{aligned}$$

3.a. Etudier les limites aux bornes du domaine de définition.
3.b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3.c. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3.d. Etudier la dérivabilité de f' .
3.e. Tracer les graphes de f et f' dans un même repère.

Exercice 4.

4.a. Montrer que si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et x un nombre réel, on a la formule :

$$\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} .$$

4.b. En utilisant la formule précédente avec $n = 2$, exprimer à partir des fonctions usuelles (vues en cours) la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

qui vérifie $F(0) = 0$.

Exercice 5.

Soient $\beta > 0$ et $\omega > 0$ deux nombres réels. On considère le problème de Cauchy du second ordre

$$y''(t) + 2\beta\, y'(t) + \omega^2\, y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} ,$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. En physique t représente le temps, β le coefficient d'amortissement et ω la pulsation propre du système oscillant.

5.a. Donner l'expression de la solution $t \longmapsto y(t)$ en fonction du paramètre

$$\Delta = \beta^2 - \omega^2 .$$

5.b. Dessiner l'allure de la solution $t \longmapsto y(t)$ pour $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$.

5.c. On considère maintenant $\Delta < 0$. Calculer l'intervalle de temps $[0, T]$ nécessaire à ce que l'amplitude de l'oscillation (valeur de $y(T)$) soit égale à $1/2$.

Exercice 6.

On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & w & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 2z & - & 2w & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & 4z & + & w & = & 1 \\ 3x & & & & & - & 3w & = & a \end{array} \right.$$

où a représente un nombre rationnel.

6.a. Résoudre le système pour $a = -3$.

6.b. Combien de solutions admet le système pour $a = 0$?

ANNÉE 2004-2005 SESSION DE JANVIER 2005

GU : MISMI **UE** : MIS101

Date : 12/01/2005 Durée : 3h00

CORRIGE DE l'ÉPREUVE

Nota : Le texte des diverses questions du problème est en italiques, le corrigé en roman.

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Série de questions I

I.a. *Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Donner une définition des trois notions suivantes :*
- *f injective*
- *f surjective*
- *f bijective.*

- Une application f de E dans F est injective si et seulement si

$$\forall x_1 \in E\,,\ \forall x_2 \in E\,,\ (f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)$$

  ou encore si et seulement si tout point de F a au plus un antécédent *via* l'application f ;
- une application f de E dans F est surjective si et seulement si

$$\forall y \in F\,,\ \exists x \in E\,,\ y = f(x)$$

  ou encore si et seulement si tout point de F a au moins un antécédent *via* l'application f ;
- une application f de E dans F est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

I.b. *L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 est-elle injective (comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ? Est-elle surjective (toujours comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ? (on justifiera chaque réponse, qu'elle soit positive ou négative).*

Comme $2^2 = (-2)^2 = 4$ et que $2 \neq -2$, l'application $x \to x^2$ n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comme -1 n'a pas d'antécédent (car $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), l'application $x \to x^2$ n'est pas non plus surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

I.c. *L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe z^2 est-elle injective (comme application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) ? Est-elle surjective (toujours comme application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) ? (on justifiera chaque réponse, qu'elle soit positive ou négative).*

Comme $2^2 = (-2)^2 = 4$ et que $2 \neq -2$, l'application $z \to z^2$ n'est pas injective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Comme l'équation du second degré $X^2 = w$ a au moins une racine complexe si w est un nombre complexe quelconque (et même exactement deux racines complexes distinctes si $w \neq 0$), l'application $z \to z^2$ est surjective comme application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Série de questions II

Soit x_0 un nombre réel et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ dérivable en x_0.

II.a. *Que signifie la dernière hypothèse (f dérivable en x_0) ?*
Cela signifie qu'il existe un nombre $l(x_0)$ (dit nombre dérivé de f en x_0) tel que, pour h voisin de 0 ($h \in]-\eta_0, \eta_0[$ pour un certain $\eta_0 > 0$)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + l(x_0)h + h\epsilon(h)$$

où ϵ est une fonction définie dans $]-\eta_0, \eta_0[$, nulle en $h = 0$ et continue en ce point.

II.b. *Après avoir rappelé ce que signifiait l'assertion "f est continue en x_0", montrer que cette assertion est vraie.*
Dire que f est continue en x_0 signifie :

$$\forall v > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ (|h| < \eta) \Longrightarrow (|f(x_0 + h) - f(x_0)| < v)\,,$$

ou encore que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Si f est dérivable en x_0, de nombre dérivé $l(x_0)$, on peut écrire, pour $|h| < \eta_0$,

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| = |h|(|l(x_0) + \epsilon(h)) \leq |h|(|l(x_0)| + |\epsilon(h)|)\,;$$

comme ϵ est continue en $h = 0$ et nulle en ce point, il existe $\eta_1 \leq \eta_0$ tel que

$$(|h| < \eta_1) \Longrightarrow (|\epsilon(h)| \leq 1)\,;$$

on a alors

$$(|h| < \inf(\eta_1, \frac{v}{|l(x_0)| + 1})) \Longrightarrow (|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq v)\,,$$

ce qui montre bien la continuité de f en x_0.

Série de questions III

III.a. *Rappeler le principe du raisonnement par récurrence.*
Le raisonnement par récurrence est basé sur l'axiome de récurrence de Peano : si A est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que $(a \in A) \Longrightarrow (S(a) \in A)$ (où S désigne la prise de successeur) soit vraie, alors $A = \mathbb{N}$.
Ce principe de récurrence permet d'affirmer que si une certaine propriété $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$ et telle que $((P(n)$ vraie$) \Longrightarrow (P(n+1)$ vraie$))$ soit une assertion vraie pour $n \geq n_0$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

III.b. *Vérifier par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ la formule*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

On note $P(n)$ l'assertion :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Clairement $P(0)$ est vraie. Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est alors vraie : on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que $P(n+1)$ est vraie. Le principe de récurrence permet de conclure que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

On considère l'équation

$$z^3 - 3z + 1 = 0 \qquad (*)$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1.a. *Soient z, u et v des nombres complexes tels que $u - v = z$. Montrer que si u et v vérifient*

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = -1 \\ uv = -1, \end{cases}$$

alors z est solution de (*).

On a, par la formule du binôme

$$z^3 = (u-v)^3 = u^3 - v^3 - 3u^2v + 3uv^2 = -1 + 3uv(v-u) = -1 - 3(v-u) = -1 + 3z\,,$$

d'où la relation $(*)$ $z^3 - 3z + 1 = 0$ satisfaite par z.

1.b. *Montrer que l'équation en z du second degré*

$$z^2 + z + 1 = 0$$

a deux racines complexes distinctes z_1 et z_2 que l'on calculera ; expliciter ces deux racines sous forme trigonométrique ($z = re^{i\theta}$) et placer sur une figure représentant le plan complexe les deux points d'affixes respectives z_1 et z_2.

Le discriminant du trinôme $X^2 + X + 1$ vaut $\Delta = 1 - 4 = -3$ et ce trinôme admet donc les deux racines complexes

$$z = \frac{-1 \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \exp(\pm \frac{2i\pi}{3})$$

car $\cos(2\pi/3) = -1/2$ et $\cos(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$. On aurait pu aussi remarquer que

$$(X-1)(X^2 + X + 1) = X^3 - 1$$

et donc que les deux racines du trinôme $X^2 + X + 1$ sont des racines 3-èmes de l'unité différentes de $z = 1$; ce sont donc les deux nombres complexes s'écrivant sous forme trigonométrique $z_1 = e^{2i\pi/3}$ et $z_2 = e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3}$. Ces deux points se représentent dans le plan complexe suivant la figure 1 ci-dessous.

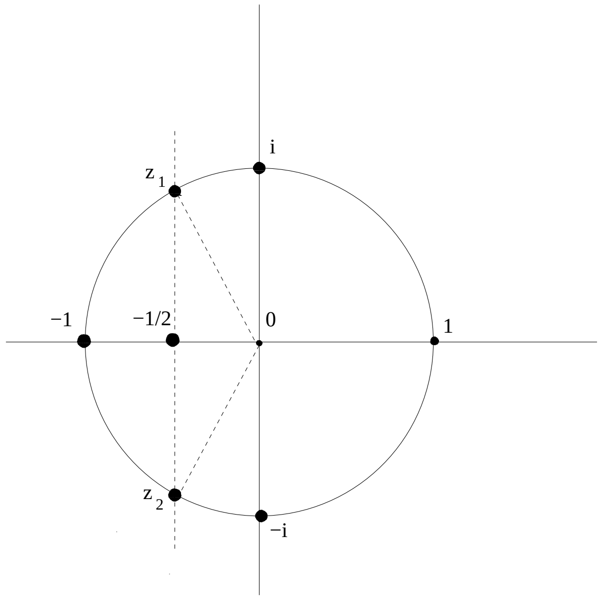


FIG. 1 – Position de z_1 et z_2 dans le plan complexe

1.c. *Soit $x = e^{2i\pi/3}$ et $y = e^{-2i\pi/3}$. En résolvant les équations $u^3 = x$ et $v^3 = -y$, montrer que trois solutions du système de la question* **1.a** *sont données par*

$$\begin{aligned} u = e^{2i\pi/9}, &\quad v = -e^{-2i\pi/9} \\ u = e^{8i\pi/9}, &\quad v = -e^{-8i\pi/9} \\ u = e^{14i\pi/9}, &\quad v = -e^{-14i\pi/9}. \end{aligned}$$

Les solutions de $u^3 = x$ sont les trois nombres

$$u = e^{\frac{1}{3}(\frac{2i\pi}{3}+2ik\pi)}\,,\ k = 0, 1, 2\,.$$

Ce sont les trois nombres $u = e^{2i\pi/9}$, $u = e^{8i\pi/9}$ et $u = e^{14i\pi/9}$. Dire que v est solution de $v^3 = -y$ équivaut à dire que $-v$ est solution de $v^3 = y$ (car $(-1)^3 = -1$). Les solutions de $v^3 = -y$ sont les trois nombres

$$v = -e^{\frac{1}{3}(-\frac{2i\pi}{3}-2ik\pi)}\,,\ k = 0, 1, 2\ ;$$

ce sont donc les trois nombres $v = -e^{2i\pi/9}$, $v = -e^{8i\pi/9}$ et $v = e^{-14i\pi/9}$.

On vérifie dans chacun des cas que $u^3 - v^3 = x + y = -1$ (car x ey y sont racines de $X^2 + X + 1 = 0$) et que $uv = -1$ car $v = -\overline{u}$. Chacun des trois couples (u, v) proposé est donc solution du système du **1.a** ; c'est ce que l'on demandait.

1.d. *En déduire trois solutions réelles de l'équation (*).*

Comme $v = -\overline{u}$ pour chacun des couples proposés au **1.c**, le nombre $u - v = u + \overline{u} = 2\,\mathrm{Re}\,u$ est dans chaque cas un nombre réel. Les trois nombres ainsi obtenus sont $2\cos(2\pi/9)$, $2\cos(8\pi/9)$ et $2\cos(14\pi/9)$. Ce sont trois racines réelles de l'équation (*) (du fait du résultat établi au **1.a**).

Exercice 2.

2.a. *Calculer la dérivée de la fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\sin x}.$$

Par la règle de dérivation des fonctions composées, cette dérivée vaut

$$x \longmapsto \cos x \, e^{\sin x}$$

puisque la dérivée de la fonction sin est la fonction cos et que la fonction exponentielle s'auto-dérive en elle-même.

2.b. *Déterminer la valeur des limites :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin x}}{x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin x}}{x}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin x}}{x} &= \frac{e^{\sin(2x)} - 1}{x} - \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x} \\ &= 2\frac{e^{\sin(2x)} - 1}{2x} - \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x}; \end{aligned}$$

or

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\sin h} - 1}{h} = \cos 0 \, e^0 = 1$$

d'après **2.a** ; donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin x}}{x} = 2 - 1 = 1.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|e^{\sin(2x)} - e^{\sin x}| \le e^{|\sin(2x)|} + e^{|\sin x|} \le e^1 + e^1 = 2e,$$

donc, pour tout $x > 0$,

$$\left| \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin x}}{x} \right| \le 2e/x,$$

d'où l'on déduit

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin x}}{x} = 0.$$

Exercice 3.

Soif f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \text{ si } x \le -5\pi/2 \\ f(x) &= \sin x + 1 \text{ si } -5\pi/2 < x \le 0 \\ f(x) &= e^x \text{ si } x > 0 \end{aligned}$$

3.a. *Etudier les limites aux bornes du domaine de définition.*

La fonction f tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3.b. *Montrer que f est continue sur* $\mathbb{R}$ *.*

La limite à gauche de f en $-5\pi/2$ vaut $0 = f(-5\pi/2)$ (car f est constante et nulle sur $]-\infty, -5\pi/2]$) ; la limite à droite de f en $-5\pi/2$ vaut $\sin(-5\pi/2) + 1 = -1 + 1 = 0 = f(-5\pi/2)$ car la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$; la fonction f est donc continue en $x = -5\pi/2$. La limite à gauche de f en 0 vaut $\sin 0 + 1 = 1 = f(0)$ tandis que la limite à droite de f en 0 vaut $\lim_{0+} e^x = e^0 = 1 = f(0)$; la fonction f est donc continue en $x = 0$. Comme elle est clairement continue en tous les points différents de $-5\pi/2$ et 0 car $\sin + 1$ et exp sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3.c. *Montrer que f est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *.*

Les seuls points litigieux sont $x = -5\pi/2$ et $x = 0$; en $x = -5\pi/2$, f admet 0 comme nombre dérivé à gauche et $\cos(-5\pi/2) = 0$ comme nombre dérivé à droite ; ces deux nombres dérivés étant égaux, f est dérivable en $-5\pi/2$. En $x = 0$, f admet $\cos 0 = 1$ comme nombre dérivé à gauche et $\exp(0) = 1$ comme nombre dérivé à droite ; ces deux nombres dérivés étant encore égaux, f est dérivable en $x = 0$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3.d. *Etudier la dérivabilité de f' .*

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ privé des points $-5\pi/2$ et 0. La dérivée à gauche de f' en $-5\pi/2$ vaut 0 tandis que la dérivée à droite vaut

$$\lim_{x \to -5\pi/2^+} (-\sin x) = 1 \ ;$$

la fonction f' n'est donc pas dérivable en $x = -5\pi/2$. La dérivée à gauche de f' en $x = 0$ vaut

$$\lim_{x \to 0^-} (-\sin x) = 0$$

tandis que la dérivée à droite de f' en ce point vaut

$$\lim_{x \to 0^-} (\exp(x)) = 1 \ ;$$

la fonction f' n'est donc pas non plus dérivable en $x = 0$.

3.e. *Tracer les graphes de f et f' dans un même repère.*

Voici les graphes de f (en plein) et de f' (en tirets) sur l'intervalle $[-10, 2]$.

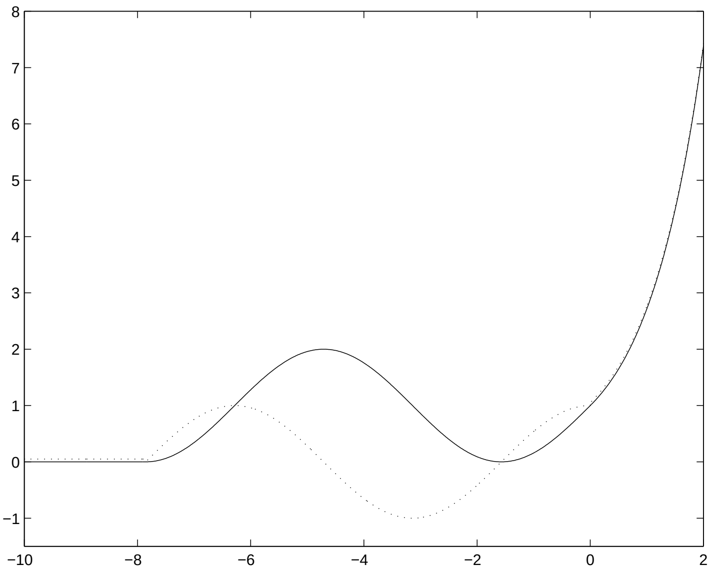


FIG. 2 – Les graphes de f et f'

Exercice 4.

4.a. *Montrer que si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et x un nombre réel, on a la formule :*

$$\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} .$$

On écrit

$$\frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} = \frac{1+t^2}{(1+t^2)^n} .$$

On peut calculer par parties

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^n} &= -\frac{1}{2(n-1)} \int_0^x t \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}\Big)\, dt \\
&= -\frac{1}{2(n-1)} \left[\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}\right]_0^x + \frac{1}{2(n-1)} \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} .
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} &= \int_0^x \frac{[(1+t^2)-t^2]\, dt}{(1+t^2)^n} \\
&= \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \left[\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}\right]_0^x \\
&\quad -\frac{1}{2(n-1)} \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} \\
&= \frac{1}{2(n-1)} \left[\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}\right]_0^x + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} ,
\end{aligned}$$

ce qui est la formule voulue.

4.b. *En utilisant la formule précédente avec $n = 2$, exprimer à partir des fonctions usuelles (vues en cours) la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction*

$$f \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

qui vérifie $F(0) = 0$.

La primitive F de f valant 0 en 0 est la fonction

$$\begin{aligned} x \longmapsto F(x) : \quad &= \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\, x\,. \end{aligned}$$

<u>**Exercice 5.**</u>

Soient $\beta > 0$ et $\omega > 0$ deux nombres réels. On considère le problème de Cauchy du second ordre

$$y''(t) + 2\beta\, y'(t) + \omega^2\, y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. En physique t représente le temps, β le coefficient d'amortissement et ω la pulsation propre du système oscillant.

5.a. *Donner l'expression de la solution $t \longmapsto y(t)$ en fonction du paramètre*

$$\Delta = \beta^2 - \omega^2\,.$$

Le polynôme caractéristique de l'équation est

$$X^2 + 2\beta X + \omega^2$$

et son discriminant réduit est $\Delta = \beta^2 - \omega^2$. On distingue trois cas.

- si $\Delta > 0$, la solution générale de l'équation différentielle homogène du second ordre $y'' + 2\beta y' + \omega^2 y = 0$ est

  $$y(t) = e^{-\beta t}(\lambda e^{\sqrt{\Delta}t} + \mu e^{-\sqrt{\Delta}t})\ ;$$

  pour que cette solution soit solution du problème de Cauchy posé, il faut que λ et μ vérifient le système

  $$\begin{aligned} \lambda + \mu \quad &= \quad 1 \\ (\sqrt{\Delta} - \beta)\lambda - (\sqrt{\Delta} + \beta)\mu \quad &= \quad 0\,, \end{aligned}$$

  soit

  $$\lambda = 1 - \mu = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}(\beta + \sqrt{\Delta})\,;$$

- si $\Delta = 0$, la solution générale de l'équation différentielle homogène second ordre $y''+2\beta y'+\omega^2 y = 0$ est

  $$y(t) = e^{-\beta t}(\lambda + \mu t))\ ;$$

  pour que cette solution soit solution du problème de Cauchy posé, il faut que $\lambda = 1$ et $\mu = \beta$;

– Si $\Delta < 0$, la solution générale de l'équation différentielle homogène second ordre $y''+\beta y'+\omega^2 y = 0$ est

$$y(t) = re^{-\beta t}\cos(\sqrt{-\Delta}\,t+\varphi)\,,$$

où $r \geq 0$ et $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$ sont des paramètres réels ; on doit avoir $r\cos\varphi = 1$ et $\beta\cos\varphi = -\sqrt{-\Delta}\sin\varphi$, ce qui donne

$$\varphi = -\mathrm{Arctan}\frac{\beta}{\sqrt{-\Delta}}$$

et $r = 1/\cos\varphi$; comme

$$\tan^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1\,,$$

on a

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{\beta^2}{\Delta}}} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{\beta^2-\Delta}}\,;$$

la solution du problème de Cauchy dans le cas $\Delta < 0$ est donc

$$y(t) = \frac{\sqrt{\beta^2-\Delta}}{\sqrt{-\Delta}}e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{-\Delta}\,t - \mathrm{Arctan}(\beta/\sqrt{-\Delta})\right) \qquad (**)$$

5.b. *Dessiner l'allure de la solution $t \longmapsto y(t)$ pour $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$.*

Voici l'allure de la courbe pour $\Delta > 0$ avec un choix de $\beta = 3$ et $\Delta = 1$; on constate que le phénomène évolue asymptotiquement et de manière monotone vers la valeurs $y = 0$ si t tend vers $+\infty$; au contraire, il y a "explosion" vers $-\infty$ lorsque t tend vers $-\infty$.

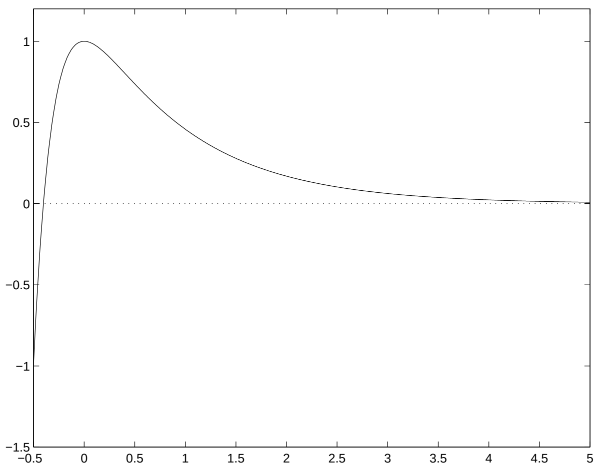


FIG. 3 – Le cas $\Delta > 0$

Voici l'allure de la courbe pour $\Delta < 0$ avec un choix de $\beta = 1$ et $\Delta = -4$; on constate les oscillations amorties (vers $y = 0$ lorsque t tend vers $+\infty$) ou amplifiées (lorsque t tend vers $-\infty$).

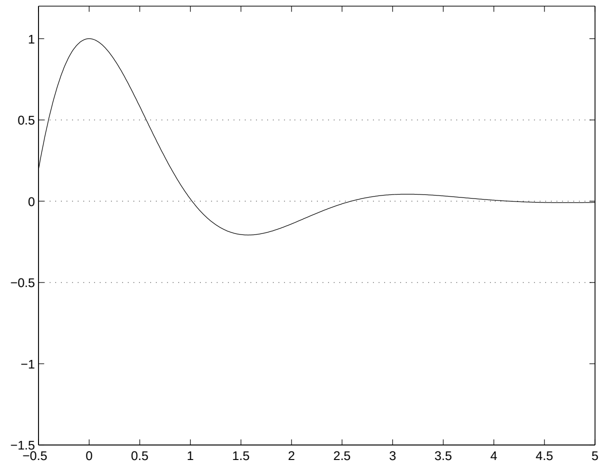


FIG. 4 – Le cas $\Delta < 0$

5.c. *On considère maintenant $\Delta < 0$. Calculer l'intervalle de temps $[0, T]$ nécessaire à ce que l'amplitude de l'oscillation (valeur de $y(T)$) soit égale à 1/2.*

Vu la forme (**) de la solution, le temps T nécessaire à ce que l'amplitude de l'oscillation $y(t)$ au temps t, soit

$$\frac{\sqrt{\beta^2 - \Delta}}{\sqrt{-\Delta}} e^{-\beta t}$$

atteigne et passe en dessous du seuil 1/2 est donné (puisque cette amplitude décroit) par la relation

$$e^{-\beta T} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{\beta^2 - \Delta}},$$

soit

$$T = -\frac{1}{\beta} \log \left[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{\beta^2 - \Delta}} \right] = \frac{1}{\beta} \log \left[2 \frac{\sqrt{\beta^2 - \Delta}}{\sqrt{-\Delta}} \right].$$

Exercice 6.

On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & 2z & - & w & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 2z & - & 2w & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & 4z & + & w & = & 1 \\ 3x & & & & & - & 3w & = & a \end{array} \right.$$

où a représente un nombre rationnel.

6.a. *Résoudre le système pour $a = -3$.*

En changeant l'ordre des inconnues, le système devient

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} -y & +2z & -w & +x & = & -1 \\ y & -2z & -2w & +2x & = & -2 \\ 2y & -4z & +w & -x & = & 1 \\ & & -3w & +3x & = & a \end{array} \right.$$

En utilisant la méthode du pivot de Gauss ($L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$), le système est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} -y & +2z & -w & +x & = & -1 \\ & & -3w & +3x & = & -3 \\ & & -w & +x & = & -1 \\ & & -3w & +3x & = & a \end{array}\right.$$

Ce dernier système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} -y & +2z & -w & +x & = & -1 \\ & & -w & +x & = & -1 \\ & & & 0 & = & a+3 \end{array}\right.$$

Si $a = -3$, les solutions du système (dans $\mathbb{R}^4$) sont constituées de l'ensemble des quadruplets de nombres (x, y, z, w) tels que $w = x + 1$ et $y = 2z$; il y a deux degrés de liberté (matérialisés par y et z) et l'ensemble de ces solutions est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

6.b. *Combien de solutions admet le système pour $a = 0$?*

Comme dans ce cas la relation $0 = a + 3$ est impossible car $0 \neq 3$, le système n'a aucune solution dans $\mathbb{R}^4$.

Deuxième partie

Examen commun - Session 2

ANNÉE 2004-2005 — SESSION DE JUIN 2005

GU : MISMI — **UE** : MIS101

Date : 17/06/2005 — Durée : 3h00

Documents non autorisés

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 8 points (sur 20) et 12 points (sur 20) ; les exercices 1 à 5 de la partie applicative (partie II) sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Les exercices de chacune des deux parties sont eux aussi totalement indépendants entre eux.

I. PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Exercice I.1

1. Rappeller la formule du binôme pour calculer $(X+Y)^n$ avec $n \geq 1$.

2. Décrire la méthode permettant de calculer les coefficients du binôme $\binom{n}{j}$ pour les valeurs de $j = 0, ..., n$ à l'aide du triangle de Pascal.

3. Écrire la formule complète pour
$$(X+Y)^6.$$

Exercice I.2

On note $T(n) = n(n+1)/2$ pour $n \geq 1$ entier.

1. Montrer que $T(n)$ est un entier (et non pas un rationnel avec dénominateur $\neq 1$) pour tout entier $n \geq 1$.

2. Montrer par récurrence que
$$T(1) + \cdots + T(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$
pour tout $n \geq 1$.

Exercice I.3

Justifier l'existence de la dérivée de la fonction définie pour x réel par
$$f(x) = \sin(e^x).$$
et calculer cette dérivée.

Exercice I.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par les conditions suivantes :
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} + x & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(x) + \sin(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Calculer (en justifiant soigneusement votre calcul) les limites suivantes :
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x), \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq 0}} f(x).$$

Expliquer pourquoi le résultat implique que f est continue en 0.

2. Calculer (en justifiant soigneusement votre calcul) les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-1}{x}, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\geq 0}} \frac{f(x)-1}{x}.$$

Expliquer pourquoi le résultat implique que f est dérivable en 0. Quelle est la valeur de $f'(0)$?

3. Expliquer pourquoi f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Calculer $f'(x)$ sur ces deux intervalles et montrer que f' est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ entier à l'aide de la question précédente.

4. Calculer (en justifiant soigneusement votre calcul) les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f'(x)-1}{x}, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\geq 0}} \frac{f'(x)-1}{x}.$$

Expliquer pourquoi le résultat implique que f' *n'est pas* dérivable en 0.

II. DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice II.1

1. Soit $z \neq 0$ un nombre complexe non nul. Expliciter $z/\bar{z}$ en coordonnées polaires (sous la forme $re^{i\theta}$) et en coordonnées rectangulaires (sous la forme $a+ib$) en fonction des coordonnées de z.

2. Montrer que l'application f de $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$f \ : z \in \mathbf{C}^* \longmapsto \frac{z}{\bar{z}}$$

a pour image le cercle unité

$$\mathbf{S} = \{w \in \mathbf{C} \mid |w| = 1\},$$

c'est-à-dire que $f(\mathbf{C}^*) = \mathbf{S}$.

3. Montrer que f n'est pas une application injective. Calculer l'ensemble des antécédents par f de $1 \in \mathbf{S}$ et de $i \in \mathbf{S}$.

4. Calculer les antécédents par f de $(3+4i)/5$.

Exercice II.2

1. Résoudre le système

$$\begin{cases} 6x - y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + y - 3z = -1. \end{cases}$$

2. Résoudre le système

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 2 \\ -12x + 21y + 10z = 3 \\ -5x + 9y + 4z = -1. \end{cases}$$

Exercice II.3

1. Soit $x \longmapsto f(x)$ la fonction définie sur $[e, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x)},$$

où ln désigne le logarithme néperien. Donner l'expression de la primitive F de f telle que $F(e) = 0$.

2. Montrer par intégration par parties que pour $x \geq e$ on a la relation

$$F(x) = \frac{x}{\ln(x)} - e + \int_e^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}.$$

3. Pour $x \geq e^2$, montrer que

$$\int_e^{\sqrt{x}} \frac{dt}{(\ln(t))^2} \leq \sqrt{x} - e.$$

4. Pour $x \geq e^2$, montrer que

$$\int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{(\ln(t))^2} \leq \frac{4(x - \sqrt{x})}{(\ln(x))^2}$$

en majorant $1/(\ln(t))^2$ pour $t \geq \sqrt{x}$.

5. À l'aide des trois questions précédentes, montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)\ln(x)}{x} = 1.$$

Exercice II.4

1. Calculer les primitives de la fonction réelle $x \in \mathbf{R} \longmapsto f(x) = e^x \cos(x)$.
[*On pourra faire deux intégrations par parties successives*]

2. Résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$y' + \tan(x)y = e^x(\cos(x))^2,$$

où la fonction inconnue y est définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice II.5

1. Trouver toutes les solutions définies sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle du second ordre

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

2. Résoudre l'équation précédente avec les conditions initiales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

3. Résoudre l'équation précédente avec les conditions aux limites

$$y(0) = 1, \quad y(\pi/4) = 1.$$

4. Montrer qu'il n'existe pas de solution avec les conditions aux limites

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1.$$

ANNÉE 2004-2005 SESSION DE JUIN 2005

GU : MISMI **UE** : MIS101

Date : 17/06/2005 Durée : 3h00

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

Nota : Le texte des diverses questions du problème est en italiques, le corrigé en roman.

I. PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Exercice I.1

1. *Rappeler la formule du binôme pour calculer $(X+Y)^n$ avec $n \geq 1$.*

On a

$$(X+Y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j Y^{n-j} \,,$$

où

$$\binom{n}{j} := \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$$

désigne le coefficient binomial d'indices n, k.

2. *Décrire la méthode permettant de calculer les coefficients du binôme $\binom{n}{j}$ pour les valeurs de $j = 0, ..., n$ à l'aide du triangle de Pascal.*

La relation inductive sur laquelle est basée le calcul des coefficients binomiaux *via* le triangle de Pascal est

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} \,, \forall n \in \mathbf{N} \,, \forall j \in \{0, ..., n\} \,,$$

avec les conventions $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$ pour tout entier $n \geq 0$ et la condition initiale $\binom{0}{0} = 1$.

3.) *Écrire la formule complète pour*

$$(X+Y)^6.$$

On a

$$(X+Y)^6 = X^6 + 6X^5Y + 15X^4Y^2 + 20X^3Y^3 + 15X^2Y^4 + 6XY^5 + Y^6$$

en calculant les coefficients binômiaux $\binom{6}{j}$ *via* le triangle de Pascal.

Exercice I.2

On note $T(n) = n(n+1)/2$ pour $n \geq 1$ entier.

1. *Montrer que $T(n)$ est un entier (et non pas un rationnel avec dénominateur $\neq 1$) pour tout entier $n \geq 1$.*

Etant donnés deux nombres entiers consécutifs (n et $n+1$), l'un des deux est toujours pair, ce qui implique que leur produit soit divisible par 2 ; le nombre $n(n+1)/2$ est donc un entier pour tout $n \geq 0$.

2. *Montrer par récurrence que*

$$T(1) + \cdots + T(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

pour tout $n \geq 1$.

La formule proposée est vraie pour $n = 1$ (les deux membres valent 1). Supposons qu'elle soit vraie au cran n et prouvons la au cran $n+1$. On a

$$\begin{aligned} T(1) + \cdots + T(n+1) &= \Big[T(1) + \cdots T(n)\Big] + T(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \times \Big(\frac{n}{3} + 1\Big) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}\,, \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à la formule voulue au cran $n+1$. La formule est ainsi démontrée par récurrence pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice I.3

Justifier l'existence de la dérivée de la fonction définie pour x réel par

$$f(x) = \sin(e^x).$$

et calculer cette dérivée.

La fonction f est la composée de la fonction exponentielle (définie est dérivable sur tout $\mathbf{R}$) et de la fonction sin (définie et dérivable sur tout $\mathbf{R}$). Comme la composée $g \circ f$ de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbf{R}$ est dérivable de dérivée $(g' \circ f) \times f'$ (règle de Leibniz), que $\exp' = \exp$ et $\sin' = \cos$, f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}\,,\ f'(x) = e^x \cos(e^x)\,.$$

Exercice I.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par les conditions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} + x & \textit{si } x \leq 0 \\ \cos(x) + \sin(x) & \textit{si } x > 0. \end{cases}$$

1. *Calculer (en justifiant soigneusement votre calcul) les limites suivantes :*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x), \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq 0}} f(x).$$

Expliquer pourquoi le résultat implique que f est continue en 0.

Comme la fonction $g\ : x \in \mathbf{R} \longmapsto e^{-x^2} + x$ est continue en tout point de $\mathbf{R}$, donc en particulier en $x = 0$, on a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = g(0) = 1\,.$$

De même, comme la fonction $h\ : x \in \mathbf{R} \longmapsto \cos x + \sin x$ est continue en tout point de $\mathbf{R}$, donc en particulier en $x = 0$, on a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq 0}} h(x) = h(0) = 1\,.$$

Comme ces deux limites sont égales (à 1), on a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1\,;$$

comme de plus $1 = f(0)$, la fonction f est bien continue en $x = 0$.

2. *Calculer (en justifiant soigneusement votre calcul) les limites suivantes :*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-1}{x}, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\geq 0}} \frac{f(x)-1}{x}.$$

Expliquer pourquoi le résultat implique que f est dérivable en 0. Quelle est la valeur de $f'(0)$?

Comme la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ (puisque $x \longmapsto e^{-x^2}$ l'est comme composée de fonctions dérivables et $x \longmapsto x$ aussi) de dérivée $x \longmapsto -2xe^{-x^2} + 1$ d'après la règle de Leibniz, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(0) = 1.$$

Comme la fonction h est dérivable sur $\mathbf{R}$ (puisque $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ le sont) de dérivée $x \longmapsto -\sin x + \cos x$ d'après la règle de Leibniz, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\geq 0}} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\geq 0}} \frac{h(x)-h(0)}{x} = h'(0) = 1.$$

Comme ces deux limites sont égales (à 1), on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1\,;$$

comme de plus $f(0) = 1$, ceci signifie que f est dérivable en $x = 0$, de nombre dérivé $f'(0)$ égal à 1.

3. *Expliquer pourquoi f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Calculer $f'(x)$ sur ces deux intervalles et montrer que f' est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ entier à l'aide de la question précédente.*

On a vu à la question précédente que les fonctions g et h sont dérivables sur $\mathbf{R}$. Comme $f \equiv g$ sur $]-\infty, 0[$, f est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $x \longmapsto f'(x) = -2xe^{-x^2} + 1$ sur $]-\infty, 0[$. Comme $f \equiv h$ sur $]0, +\infty[$, f est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $x \longmapsto f'(x) = -\sin x + \cos x$ sur $]0, +\infty[$. Les limites de $x \longmapsto f'(x)$ à gauche et à droite en $x = 0$ sont égales (compte-tenu des expressions de f') à 1. Comme $1 = f'(0)$ d'après la question **2**, f' est bien continue aussi en $x = 0$ (elle l'est bien sûr en tout autre point compte-tenu des expressions explicites sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$).

4. *Calculer (en justifiant soigneusement votre calcul) les limites suivantes :*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f'(x)-1}{x}, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\geq 0}} \frac{f'(x)-1}{x}.$$

Expliquer pourquoi le résultat implique que f' n'est pas *dérivable en* 0.

La fonction g' (qui vérifie $g'(0) = 1$) est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée (de par les règles de calcul de la dérivée d'une somme, d'une composée et d'un produit)

$$x \longmapsto g''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}.$$

On a donc $g''(0) = -2$, ce qui implique

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f'(x)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{g'(x)-g'(0)}{x} = g''(0) = -2\,.$$

La fonction h' (qui vérifie $h'(0) = 1$) est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée (de par les règles de calcul de la dérivée d'une somme)

$$x \longmapsto h''(x) = -\cos x - \sin x\,.$$

On a donc $h''(0) = -1$, donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq 0}} \frac{f'(x) - 1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq 0}} \frac{h'(x) - h'(0)}{x} = h''(0) = -1\,.$$

Comme les deux limites trouvées sont distinctes

$$x \longmapsto \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$$

n'a pas de limite en $x = 0$, ce qui implique que f' n'est pas dérivable en ce point.

II. DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice II.1

1. *Soit $z \neq 0$ un nombre complexe non nul. Expliciter $z/\bar{z}$ en coordonnées polaires (sous la forme $re^{i\theta}$) et en coordonnées rectangulaires (sous la forme $a + ib$) en fonction des coordonnées de z.*

On a $z/\bar{z} = re^{i\theta}/(re^{-i\theta}) = e^{2i\theta}$. On a aussi

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + ib}{a - ib} = \frac{(a + ib)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2 + 2iab}{a^2 + b^2}$$

2. *Montrer que l'application f de $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ dans $\mathbf{C}$ définie par*

$$f \ : z \in \mathbf{C}^* \longmapsto \frac{z}{\bar{z}}$$

a pour image le cercle unité

$$\mathbf{S} = \{w \in \mathbf{C} \ | \ |w| = 1\},$$

c'est-à-dire que $f(\mathbf{C}^*) = \mathbf{S}$.

Si e^{iu}, $u \in \mathbf{R}$, est un point quelconque du cercle unité, on voit (d'après la question **1**) que $e^{iu} = f(z)$, où

$$z = \exp(iu/2) \in \mathbf{C}^*\,.$$

Ceci montre que $f(\mathbf{C}^*) = S$.

3. *Montrer que f n'est pas une application injective. Calculer l'ensemble des antécédents par f de $1 \in \mathbf{S}$ et de $i \in \mathbf{S}$.*

Pour θ fixé et $r > 0$ arbitraire, on a $f(re^{i\theta}) = e^{2i\theta}$, expression indépendante de r. Le point $e^{2i\theta}$ a donc pour antécédents tous les nombres complexes $re^{i\theta}$ avec $r > 0$. L'application f n'est donc pas injective. Les antécédents de 1 sont les nombres complexes $re^{i\theta}$ avec $2i\theta = 2ik\pi$ pour $k \in \mathbf{Z}$, soit $\theta = k\pi$; ce sont les points de l'axe réel privé de $z = 0$. Les antécédents de i sont les nombres complexes $re^{i\theta}$ avec $2i\theta = i\pi/2 + 2ik\pi$ pour $k \in \mathbf{Z}$, soit $\theta = \pi/4 + k\pi$; ce sont les points de la droite $y = x$ privée de l'origine.

4. *Calculer les antécédents par f de $(3 + 4i)/5$.*

Si l'on pose $z = 2 + i$ ($a = 2$, $b = 1$), on a d'après la question **1**, $z/\bar{z} = \frac{1}{5}(3 + 4i)$. Le nombre complexe $2 + i$ est bien un antécédent voulu. Les autres antécédents sont les points de la forme $t(2 + i)$ avec

$t \in \mathbf{R}^*$, puisque si z est un tel antécédent, on a $f(z/(2+i)) = 1$; on applique alors le résultat de la question **3** où est décrit l'ensemble des antécédents du nombre complexe 1.

Exercice II.2

1. *Résoudre le système*

$$\begin{cases} 6x - y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + y - 3z = -1. \end{cases}$$

En formant la différence entre les lignes (2) et (1), on obtient la ligne

$$z - 4x = 1.$$

Le système équivaut donc à

$$\begin{cases} -4x + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + y - 3z = -1. \end{cases}$$

En formant maintenant dans ce nouveau système la différence entre les nouvelles lignes $(2)'$ et $2 \times (1)'$, on voit que le système équivaut au système

$$\begin{cases} -4x + z = 1 \\ 10x - y = 1 \\ 3x + y - 3z = -1. \end{cases}$$

On remplace enfin la ligne $(3)'' = (3)$ de ce nouveau système par $(3)'' + (2)'' + 3 \times (1)''$, ce qui nous donne le système équivalent

$$\begin{cases} -4x + z = 1 \\ 10x - y = 1 \\ x = 3\,. \end{cases}$$

La solution est donc $x = 3$, $y = 29$, $z = 13$. C'est l'unique solution du système.

2. *Résoudre le système*

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 2 \\ -12x + 21y + 10z = 3 \\ -5x + 9y + 4z = -1. \end{cases}$$

On remplace la ligne (3) par la ligne $(3) - 5 \times (1)$; le système proposé équivaut donc au système

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 2 \\ -12x + 21y + 10z = 3 \\ -y - z = -11. \end{cases}$$

On remplace la ligne (2) par la ligne $(2) - 12 \times (1)$ pour obtenir le système équivalent

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 2 \\ -3y - 2z = -21 \\ -y - z = -11. \end{cases}$$

On remplace enfin la nouvelle ligne $(2)'$ par la ligne $2 \times (3') - (2')$, ce qui donne le système équivalent

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 2 \\ y = -1 \\ -y - z = -11. \end{cases}$$

Ce système équivaut au système

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = -1 \\ z = 12 \end{cases}$$

et on trouve ici encore une unique solution $(x = 8,\ y = -1,\ z = 12)$.

Exercice II.3

1. *Soit $x \longmapsto f(x)$ la fonction définie sur $[e, +\infty[$ par*

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x)}\,,$$

où ln *désigne le logarithme néperien. Donner l'expression de la primitive F de f telle que $F(e) = 0$.*

On a, pour tout $x \in [e, +\infty[$,

$$F(x) = \int_e^x \frac{1}{\ln t} dt\,.$$

2. *Montrer par intégration par parties que pour $x \geq e$ on a la relation*

$$F(x) = \frac{x}{\ln(x)} - e + \int_e^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}.$$

On a, par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_e^x \frac{1}{\ln t} dt = \int_e^x \frac{1}{\ln t} \times 1\, dt \\ &= \Big[\frac{t}{\ln t}\Big]_e^x - \int_e^x t\Big(\frac{1}{\ln t}\Big)' dt \\ &= \frac{x}{\ln x} - e + \int_e^x t \times \frac{1}{t} \times \frac{1}{(\ln t)^2} dt \\ &= \frac{x}{\ln(x)} - e + \int_e^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}\,. \end{aligned}$$

3. *Pour $x \geq e^2$, montrer que*

$$\int_e^{\sqrt{x}} \frac{dt}{(\ln(t))^2} \leq \sqrt{x} - e.$$

Pour $t \geq e$, on a $\ln t \geq 1$, donc $1/(\ln t)^2 \leq 1$. Du fait de la monotonie de la prise d'intégrale, on a donc

$$\int_e^{\sqrt{x}} \frac{dt}{(\ln(t))^2} \leq \int_e^{\sqrt{x}} dt = \sqrt{x} - e.$$

4. *Pour $x \geq e^2$, montrer que*

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{(\ln(t))^2} \leq \frac{4(x-\sqrt{x})}{(\ln(x))^2}$$

en majorant $1/(\ln(t))^2$ pour $t \geq \sqrt{x}$.

Pour $t \geq \sqrt{x}$, on a $\ln t \geq \ln \sqrt{x} = (\ln x)/2$ (la fonction logarithme néperien est croissante sur $]0, +\infty[$), donc $1/(\ln t)^2 \leq 4/(\ln x)^2$. Du fait de la monotonie de la prise d'intégrale, on a donc

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{(\ln(t))^2} \leq \frac{4}{(\ln x)^2} \int_{\sqrt{x}}^{x} dt = \frac{4(x-\sqrt{x})}{(\ln x)^2}\,.$$

5. *À l'aide des trois questions précédentes, montrer que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)\ln(x)}{x} = 1.$$

On a

$$\frac{F(x)\ln x}{x} = 1 - e\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x} \int_{e}^{x} \frac{dt}{(\ln(t))^2}$$

d'après la formule établie dans la question **2**. D'autre part

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

car les fonctions puissances imposent leur limite à la fonction logarithme en $+\infty$. Enfin, d'après les estimations établies aux questions **3** et **4**,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln x}{x}\int_{e}^{x} \frac{dt}{(\ln(t))^2} &\leq \frac{\ln x}{x}\Big(\int_{e}^{\sqrt{x}} \frac{dt}{(\ln(t))^2} + \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{(\ln(t))^2}\Big) \\
&\leq \frac{\ln x}{x}(\sqrt{x}-e) + \frac{\ln x}{x} \times \frac{4(x-\sqrt{x})}{(\ln x)^2} \\
&\leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\ln x}
\end{aligned}$$

(on majore par 0 les termes négatifs dans les membres de droite des inégalités). Comme

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\ln x}\Big) = 0\,,$$

on a bien

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)\ln x}{x} = 1$$

comme voulu.

Exercice II.4

1. *Calculer les primitives de la fonction réelle $x \in \mathbf{R} \longmapsto f(x) = e^x \cos(x)$.*
[On pourra faire deux intégrations par parties successives]

On a (au prix de deux intégrations par parties successives) :

$$\begin{aligned}\int_a^x e^t \cos t \, dt &= \Big[e^t \cos t\Big]_a^x + \int_a^x e^t \sin t \, dt \\ &= e^x \cos x - e^a \cos a + \left(\Big[e^t \sin t\Big]_a^x - \int_a^x e^t \cos t \, dt \right) \\ &= e^x(\cos x + \sin x) + \text{constante} + \int_a^x e^t \cos t \, dt \,.\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_a^x e^t \cos t \, dt = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} + \frac{\text{constante}}{2} \,.$$

Les primitives de $x \longmapsto e^x \cos x$ sur $\mathbf{R}$ son donc les fonctions

$$x \longmapsto \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} + C \,,$$

où C est une constante réelle arbitraire.

2. *Résoudre l'équation différentielle du premier ordre*

$$y' + \tan(x) y = e^x (\cos(x))^2,$$

où la fonction inconnue y est définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

La solution générale de l'équation homogène $y' + \tan(x)y = 0$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ s'obtient en intégrant

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x} \,,$$

soit

$$y = C \cos x \,,$$

avec $C \in \mathbf{R}$. La méthode de variation de la constante nous autorise à chercher les solutions de l'équation $y' + \tan(x)y = e^x(\cos x)^2$ proposée sous la forme

$$y(x) = C(x) \cos x \,.$$

En reportant, il vient

$$C'(x) \cos x = e^x (\cos x)^2 \,,$$

soit

$$C'(x) = e^x \cos x$$

car $\cos x \neq 0$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On a donc, d'après la question **1**,

$$C(x) = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} + C$$

avec C constante arbitraire. La solution générale de l'équation proposée est donc

$$y(x) = \cos x \Big(C + \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} \Big)$$

où C désigne une constante réelle arbitraire.

Exercice II.5

1. *Trouver toutes les solutions définies sur* $\mathbf{R}$ *de l'équation différentielle du second ordre*

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

L'équation caractéristique

$$X^2 - 2X + 5 = 0$$

a deux racines $X = 1 \pm 2i$ car le discriminant réduit vaut -4. La solution générale de l'équation est

$$y(t) = e^t(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t))$$

avec C_1 et C_2 constantes réelles arbitraires.

2. *Résoudre l'équation précédente avec les conditions initiales*

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

Les conditions initiales donnent

$$C_1 = 1$$

et, puisque

$$y'(t) = y(t) + 2e^t(-C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)),$$
$$1 + 2C_2 = 3,$$

soit $C_2 = 1$. La solution du problème avec conditions initiales est donc

$$y(t) = e^t(\cos(2t) + \sin(2t)).$$

3. *Résoudre l'équation précédente avec les conditions aux limites*

$$y(0) = 1, \quad y(\pi/4) = 1.$$

On a encore $C_1 = 1$ mais cette fois

$$C_1 \cos(\pi/2) + C_2 \sin(\pi/2) = e^{-\pi/4},$$

soit

$$C_2 = e^{-\pi/4}.$$

La solution du problème avec conditions aux limites est

$$y(t) = e^t(1 + e^{-\pi/4} \sin(2t)).$$

4. *Montrer qu'il n'existe pas de solution avec les conditions aux limites*

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1.$$

Si une telle fonction existait, on aurait

$$C_1 = 1$$

et

$$C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi) = e^{-\pi} ,$$

ce qui imposerait

$$C_1 = e^{-\pi} ,$$

contrainte incompatible avec la première contrainte $C_1 = 1$. Le problème aux limites proposé ici n'a donc pas de solution.

Troisième partie

Textes de DS1 (séries A,B,C,D,E)

COURS MIS101

Devoir Surveillé 1, Série A

Durée : 1 heure 20 mn

Documents et calculatrice non autorisés

Exercice 1.

Soit $f\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ une application strictement croissante, c'est à dire $n > p \Rightarrow f(n) > f(p)$. Montrer par récurrence que l'on a $\forall n \in \mathbf{N}\ f(n) \geq f(0) + n$.

Exercice 2.

Soit E un ensemble non vide. On note $\wp(E)$ l'ensemble des parties de E. Soit l'application

$$\begin{array}{rccl} f\colon \wp(E) & \longrightarrow & \wp(E) \\ A & \longmapsto & \complement_E A\ . \end{array}$$

a. Montrer que f est bijective.

b. Quelle est l'application réciproque de f ?

Exercice 3.

Soient deux entiers a et b tels que $-15a - 3b = 3$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Une justification est exigée.

a. L'égalité n'est pas possible.

b. Le pgcd de a et b divise 3.

c. Le pgcd de a et b est un multiple de 3.

d. Le pgcd de a et b est égal à 1.

Exercice 4.

Soient $a, b, c \in \mathbf{N}^\star$. On considère l'équation en x : $ax + b = c$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Une justification est exigée.

a. La condition $c \geq b$ est suffisante pour que x appartienne à $\mathbf{N}$.

b. La condition $c \geq b$ est nécessaire pour que x appartienne à $\mathbf{N}$.

c. Soit $c \geq b$. La condition ($b/a \in \mathbf{Z}$ et $c/a \in \mathbf{Z}$) est suffisante pour que x appartienne à $\mathbf{N}$.

d. Soit $c \geq b$. La condition ($b/a \in \mathbf{Z}$ et $c/a \in \mathbf{Z}$) est nécessaire pour que x appartienne à $\mathbf{N}$.

e. Soit $b \leq a \leq c$. La condition $b = n$ pgcd(a, c) $n \in \mathbf{N}$ est nécessaire pour que x appartienne à $\mathbf{N}$.

f. Soit $b \leq a \leq c$. La condition $b = n$ pgcd(a, c) $n \in \mathbf{N}$ est suffisante pour que x appartienne à $\mathbf{N}$.

COURS MIS101
Devoir Surveillé 1, Série B
Durée : 1 heure 20 mn
Documents non autorisés

Problème 1. (1) [Cours] Donner la définition d'une application injective, et la définition d'une application surjective.
(2) Donner un exemple d'application injective, mais pas surjective.
(3) Donner un exemple d'application surjective, mais pas injective.

Problème 2. Soient x et y des nombres réels. Montrer que si $x \neq y$ et $x \neq 1-y$, alors

$$x(1-x) \neq y(1-y).$$

Problème 3. (1) Montrer que pour tout $n \geq 0$, il existe des entiers u_n, v_n tels que

$$(1+\sqrt{2})^n = u_n + \sqrt{2}v_n, \quad \text{et} \quad (1-\sqrt{2})^n = u_n - \sqrt{2}v_n.$$

Donner une relation de récurrence permettant de calculer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.
(2) Montrer que pour tout n pair, on a

$$u_n^2 - 2v_n^2 = 1.$$

(3) Donner trois paires distinctes d'entiers positifs explicites (a, b) tels que

$$a^2 - 2b^2 = 1.$$

Problème 4. [Adapté de « Harry Potter et la pierre philosophale ».] Un sorcier et une sorcière ont devant eux sept bouteilles de potions diverses. Deux contiennent du vin (V), trois un poison mortel (P), une contient une potion rajeunissante (PR) et une contient une potion qui fait voler (PV). Il s'agit d'identifier les sept correctement, à l'aide des indices suivant :

(i) Les bouteilles sont toutes de hauteur différente, qui sont, de la gauche (bouteille numéro 1) vers la droite (bouteille numéro 7) :

1	2	3	4	5	6	7
12 cm	15 cm	10 cm	28 cm	32 cm	36 cm	25 cm

(ii) Si une bouteille contient du vin, celle qui se trouve à sa gauche contient du poison.
(iii) Les bouteilles aux deux extrémités ont un contenu différent, et qui n'est pas la potion rajeunissante.
(iv) Les bouteilles numérotées 2 et 6 ont un contenu identique.
(v) Ni la plus petite, ni la plus grande bouteille ne contiennent du poison.

(1) Déterminer la nature de chacune des bouteilles ; présenter d'abord la solution par un tableau (cf. l'exemple dans la question suivante), et expliquer avec soin le raisonnement utilisé pour trouver la solution.
(2) [Optionnel] Supposer que l'on veuille verser dans les bouteilles (placées dans le même ordre qu'auparavant) les différents contenus de la manière suivante :

1	2	3	4	5	6	7
P	V	P	V	PV	PR	P

Trouver une série d'indices (raisonnable...) permettant d'identifier cette configuration et aucune autre, et expliquer pourquoi.

COURS MIS101

Devoir Surveillé 1, Série C

Durée : 1 heure 20 mn

Documents non autorisés

Exercice 1.

a. Montrer (en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier n appartenant à $\mathbb{N} \setminus \{0\}$) que l'assertion suivante est vraie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,,\ 8 \text{ divise } (9^n + 7)$$

b. On considère l'assertion (R) suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,, \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,,\ \mathrm{PGCD}(2^k, 9^n + 7) \leq 2^{k-1} \qquad (R)$$

Formuler l'assertion $(\mathrm{non}\, R)$. Laquelle des deux assertions (R) ou $(\mathrm{non}\, R)$ est vraie ?

Exercice 2. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rrcl} f & : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (x, y) & \longmapsto & 15x - 8y \end{array}$$

est une application surjective. Décrire l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$. L'application f est-elle injective ?

Exercice 3. En utilisant un raisonnement par l'absurde, prouver qu'il n'existe aucun nombre rationnel dont le carré soit égal à 5. Adapter ce raisonnement pour montrer que si p est un nombre premier quelconque dans $\mathbb{N}$ ($p = 2, 3, 5, 7, ...$), il n'existe aucun nombre rationnel dont le carré soit égal à p.

Exercice 4.

Soient E, F, G trois ensembles, f une application injective de E dans F, g une application injective de F dans G.

a. Montrer que $g \circ f$ est une application injective de E dans G.

b. Si l'on suppose de plus que E et G sont deux ensembles finis ayant même nombre d'éléments n, montrer que F est aussi un ensemble fini à n éléments et que les trois applications $f, g, g \circ f$ sont bijectives.

c. Soit f l'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ qui à x associe $x^3 + 1$. Calculer l'image du nombre rationnel x par l'application $f \circ f$ (on exprimera $(f \circ f)(x)$ en fonction de x). L'application $f \circ f$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 5. En utilisant un algorithme basé sur la division euclidienne, exprimer la fraction $\frac{7}{33}$ sous la forme

$$\frac{7}{33} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_N}}}}}\,,$$

où les nombres $N, a_1, ..., a_N$ sont des entiers strictement positifs que l'on calculera.

COURS MIS101

Devoir Surveillé 1, Série D

Durée : 1 heure 20 mn

Documents non autorisés

Exercice 1.

Trouver les erreurs dans la démonstration suivante du fait que $2 = 1$ (indiquez quels sont les passages qui vous semblent corrects, et ceux qui vous semblent douteux ou faux). Hypothèse : on a l'égalité de nombres (rationnels) $x = y$; alors $x^2 \overset{(1)}{=} xy$; puis $x^2 - y^2 \overset{(2)}{=} xy - y^2$; donc $(x+y)(x-y) \overset{(3)}{=} y(x-y)$; ensuite $x + y \overset{(4)}{=} y$; enfin $2y \overset{(5)}{=} y$; et $2 \overset{(6)}{=} 1$!

Exercice 2.

On considère l'équation $29x - 11y = 1$, dans laquelle les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

a) Ecrire l'algorithme d'Euclide relatif aux nombres 29 et 11. En déduire une solution particulière de l'équation considérée, puis la solution générale.

b) On considère maintenant l'équation $29x - 11y = 5$. Déduire de ce qui précède une solution particulière de cette équation, puis la solution générale.

Exercice 3.

a) En utilisant la formule du binôme montrer que pour tout nombre (rationnel) $h > 0$ et pour tout entier naturel n, on a $(1+h)^n \geq 1 + nh$.
b) Montrer par une démonstration par récurrence, que la même inégalité est vraie dès que $h > -1$. (Indication : écrire ceci $1 + h > 0$.)

Exercice 4.

Montrer par l'absurde que l'on ne peut pas écrire des nombres en utilisant exactement une fois chacun des dix chiffres 0, 1, ... , 9, de manière à ce que leur somme donne 100. (Indications : voici un exemple de somme de tels nombres $19 + 28 + 30 + 7 + 6 + 5 + 4 = 99$; il s'agit de faire jouer un rôle privilégié au nombre d de dizaines dans la somme : noter que la somme des dix chiffres égale 45 et réduire le problème à montrer que l'équation $10d + (45 - d) = 100$ n'a pas de solution avec d entier.)

Exercice 5.

a) Soit p et q des propositions. Calculer les valeurs de vérité de la proposition $(p \wedge q) \Rightarrow p$.
b) En posant des quantificateurs contenant les variables x et y devant la fonction propositionnelle $x > y$ on peut obtenir diverses propositions, par exemple :

pour tous x et y, $x > y$
pour tout nombre x, il existe un nombre y tel que $x > y$.

Formulez toutes ces propositions (il y en a six en tout) et déterminez lesquelles sont vraies.

COURS MIS101

Devoir Surveillé 1, Série E

Durée : 1 heure 20 mn

Documents non autorisés

Exercice 1.

a. Écrire en langage mathématique que tout entier naturel est positif ou nul ;

b. Écrire la négation de **a)** ;

c. Écrire en français :

$$\forall n \in N,\ \forall m \in N\,, \quad n \leq m \Longrightarrow n^2 \leq m^2\,.$$

d Écrire en langage mathématique la négation de **c)**.

Exercice 2.

a. Soient R et S deux relations ; donner la définition de l'implication logique $R \Longrightarrow S$.

b. Démontrer la tautologie :

$$(R \Longrightarrow S) \Longleftrightarrow ((\text{non } S) \Longrightarrow (\text{non } R))\,.$$

c. Soient p et $q \in \mathbf{N}$ avec $q \neq 0$; montrer que :

$$x = \frac{p}{q} \Longrightarrow x \neq \sqrt{2}\,.$$

Exercice 3.

Montrer par récurrence que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Exercice 4.

Soient E un ensemble et A , B et C trois sous-ensembles. Montrer que :

$$(A \cup B = B \cup C = C \cup A) \text{ et } (A \cap B = B \cap C = C \cap A) \Longrightarrow A = B = C\,.$$

Exercice 5.

a. Soient X et Y deux ensembles non vides et

$$\begin{array}{rcl} f\ : X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

une relation. Écrire les définitions de :

- f application ;
- f injective ;
- f surjective ;
- f bijective .

b. En posant $X = Y = \mathbf{R}$ donner, en justifiant votre assertion, une fonction :

- qui n'est pas injective ;
- qui n'est pas surjective .

Quatrième partie

Textes de DS2 (séries A,B,C,D,E)

COURS MIS101
Devoir Surveillé 2, Série A
Durée : 1 heure 20 mn
Documents et calculatrice non autorisés

Exercice 1.
Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe suivant :

$$\frac{-10-3i}{-9+4i}$$

Exercice 2.
Construire l'ensemble C des points d'affixe z vérifiant $|z-i| = |iz-i| = |z-iz|$.

Exercice 3.
Soit une suite infinie de nombres réels (u_n). Si on a

$$|u_n - 53| > 1/3 \text{ et } |u_n - 42| < 2/n \ \forall n > 7,$$

que peut-on dire sur sa convergence ?

Exercice 4.
Calculer :
a. $\lim_{x\to+\infty} \log^2(x)/x$
b. $\lim_{x\to+\infty} e^{2x}/x^4$
Une justification est exigée.

Exercice 5.
Dessiner un exemple de graphe de fonction non continue. Donner, à l'aide de quantificateurs, la définition de ce qu'est une fonction non continue en un point.

Exercice 6.
Soient deux fonctions dérivables f et g avec valeurs et dérivées montrées dans le tableau suivant.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-4	-6	6	-5	8	5	-8
f '(x)	-7	-11	-6	-11	3	10	-3
g(x)	3	0	3	-3	-2	1	-3
g'(x)	-11	-7	7	7	7	11	1

Soit h(x) = f(g(x)). Calculer la dérivée h'(-3).

Exercice 7.
Donner le domaine de définition de la fonction suivante, calculer la dérivée et donner le domaine de définition de la dérivée.

$$f(x) = \ln\left[(1+\sin(x))/(1-\sin(x))\right]$$

COURS MIS101
Devoir Surveillé 2, Série B
Durée : 1 heure 20 mn
Documents non autorisés

Problème 1. (1) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, trouver le pgcd de 4646 et 2415. *Indiquer toutes les étapes clairement.*

(2) Trouver une solution $(u, v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ de l'équation

$$4646u + 2415v = 46$$

(s'il en existe).

Problème 2. (1) [Cours] Rappeller la définition de e^z pour $z \in \mathbf{C}$.

(2) Calculer $\cos 4\theta$ en fonction de $(\sin\theta)^2$ et $(\sin\theta)^4$.

(3) Calculer $(\cos\theta)^4$ en fonction de $\cos\theta$, $\cos 2\theta$ et $\cos 4\theta$ (sans faire intervenir $(\cos\theta)^2$, $(\cos\theta)^3$ ou $\cos\theta)^4$!).

Problème 3. Résoudre l'équation

$$(1+i)z^2 - (13-5i)z + 12 - 34i = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbf{C}$. Placer les solutions sur un dessin.

Problème 4. Résoudre l'équation

$$z^5 = -32$$

d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ et placer les solutions sur un dessin.

Problème 5. Soit $a \neq 1$ un nombre complexe et $k \geq 1$ un entier. On note

$$T_k(a) = 1 + a + \cdots + a^k$$
$$S_k(a) = a + 2a^2 + \cdots + ka^k.$$

(1) Calculer $T_k(a)$.

(2) Montrer que $S_{k+1}(a) = a(T_k(a) + S_k(a))$ pour $k \geq 1$.

(3) Calculer $S_{k+1}(a) - S_k(a)$ et en déduire que

$$S_k(a) = \frac{a - (k+1)a^{k+1} + ka^{k+2}}{(1-a)^2}.$$

COURS MIS101

Devoir Surveillé 2, Série C

Durée : 1 heure 20 mn

Documents non autorisés

Questions de cours

a. Qu'appelle-t'on *borne supérieure* d'un sous-ensemble non vide majoré de $\mathbf{R}$? Quelle est la borne supérieure des ensembles

$$A = \{x \in \mathbf{Q}\,;\, x < \pi\}\,,\ B = \{x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\,;\, x < \pi\}$$

(justifier dans les deux cas la réponse) ?

b. Qu'appelle-t'on *écriture cartésienne* et *écriture trigonométrique* (ou *polaire*) d'un nombre complexe z ? Exprimer sous forme cartésienne et trigonométrique (ou polaire) les nombres complexes $z = 1 + i$ et $z = \frac{1}{1+i}$.

Exercice 1

Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général

$$u_n := \frac{n^2 - 3n + 1}{(n - \log(n+1))^2 + 1}\,.$$

Exercice 2

a. Combien l'équation $z^5 = 1$ admet-elle de solutions dans $\mathbf{C}$? Donner sous la forme trigonométrique (ou polaire) toutes les solutions de l'équation $z^5 = 1$ dans le corps des nombres complexes.

b. Soit z une solution de l'équation $z^5 = 1$ dans $\mathbf{C}$; montrer que $\overline{z} = 1/z$.

c. Soit z une solution de l'équation $z^5 = 1$ dans $\mathbf{C}$; montrer que si $z \neq 1$, on a

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$

puis en déduire

$$z^2 + \overline{z}^2 + z + \overline{z} + 1 = 0\,.$$

d. Si $z = e^{i\theta}$, vérifier que

$$z^2 + \overline{z}^2 + z + \overline{z} + 1 = 4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1\,;$$

en déduire que le nombre $\cos(2\pi/5)$ s'écrit $x + y\sqrt{5}$ où x et y sont deux nombres rationnels que l'on calculera.

Exercice 3

On définit une suite de nombres réels $(u_n)_{n\geq 0}$ de proche en proche en posant $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}\,,\ u_{n+1} = u_n + \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}\,.$$

(log désigne le logarithme népérien noté aussi ln ou Log).

a. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n)$.

b. En utilisant le fait que la fonction $x \longmapsto \log x$ est une fonction croissante sur $]0, +\infty[$, montrer que si $v_p = u_{2p}$, $p = 0, 1, ...$, la suite $(v_p)_{p\geq 0}$ est une suite de nombres réels croissante et que si $w_p = u_{2p+1}$, $p = 0, 1, ...$, la suite $(w_p)_{p\geq 0}$ est une suite de nombres réels décroissante.

c. En utilisant un résultat du cours que l'on énoncera soigneusement et en justifiant que ce résultat s'applique, montrer que les deux suites $(v_p)_{p\geq 0}$ et $(w_p)_{p\geq 0}$ sont toutes les deux convergentes vers la même limite l appartenant à l'intervalle fermé $[1, 1 + 1/\log 2]$.

d. Qu'en déduit-on pour la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?

COURS MIS101
Devoir Surveillé 2, Série D
Durée : 1 heure 20 mn
Documents non autorisés

Exercice 1.

a) Soit A et B des sous-ensembles d'un ensemble X. Vérifier l'identité suivante : $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$.

b) Ecrire tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$. (Combien d'éléments contient-il ?)

Exercice 2.

Soit E et F des ensembles et $f : E \to F$ une fonction. Montrer que l'application f est injective si et seulement si il existe une application $\widetilde{f} : F \to E$ telle que $\widetilde{f} \circ f = Id_E$.

Exercice 3.

a) Dans les réels, multiplier l'inverse multiplicatif de $0,25$ par $1,08\overline{3}$. Comparer le résultat à $13/3$. (Attention, la calculette peut vous jouer des tours !)

b) Un livre qui vient de sortir prétend que π vaut exactement $3,125$ (voir www.correctpi.com). Comment convaincre l'auteur de ce livre qu'il a tort ?

Exercice 4.

a) Trouver la borne supérieure des ensembles suivants (justifiez vos réponses) : $E = \{1\} \cup \{x \in \mathbf{R} : \exists n \in \mathbf{N}\ x = -1/n\}$; $F = E \setminus \{1\}$; $G = F \cup \{0\}$; $H = F \cap [-1/2, -1/36]$; $I = F \cap [-1/2, -1/36[$.

b) Expliquer pourquoi pour tout réel positif r il existe un entier naturel N tel que $1/10^N < r$.

Exercice 5.

a) Calculer les parties réelle et imaginaire du nombre complexe $(2 + 3i)(5 - 7i)$.

b) Soit $z = (-1 - \sqrt{-3})/2$. Vérifier l'égalité

$$z^3 + (1 - i)z^2 + \frac{2}{1+i} z - i = 0 .$$

c) Soit n un entier naturel. Montrer que (l'affixe de) un nombre complexe z tel que $z^n = 1$ a module égale à 1.

COURS MIS101

Devoir Surveillé 2, Série E

Durée : 1 heure 20 mn

Documents non autorisés

Exercice 1.

Soient X et Y deux ensembles, A et B deux parties de Y et $f\ : X \longrightarrow Y$ une application. Vérifier : $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Exercice 2.

Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il possède un plus petit ou un plus grand élément, une borne supérieure ou inférieure. Si oui, préciser la valeur :

a. $\left\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right\}$;

b. $\left\{x \in \mathbf{R}\,;\, x^2 + x + 1 \geq 0\right\}$;

c. $\left\{x \in \mathbf{R}\,;\, x < 0 \text{ et } x^2 + x - 1 < 0\right\}$.

Exercice 3.

Calculer dans $\mathbf{C}$ les racines quatrièmes de $z = 4$.

Exercice 4.

Étudier les limites suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{a}. & \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{4}{(n+1)^2}\,(n^2 - n - 2)\ ; \\
\textbf{b}. & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^3 - 2x^2 - 2}{x^3 - x^2}\ ; \\
\textbf{c}. & \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x^2 - 9}\ ; \\
\textbf{d}. & \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{2x - \sqrt{4x^2+1}}\ .
\end{array}
$$

Exercice 5.

Soit f une fonction numérique continue ; on suppose que f est périodique de période $p > 0$ (c'est-à-dire $f(x+p) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbf{R}$).

Montrer que si f admet une limite (finie) quand x tend vers $+\infty$, alors f est constante.

Exercice 6.

Soit f une fonction numérique.

Démontrer l'équivalence

$$
f \text{ continue en } x_0 \iff \begin{cases} \forall\,(x_n)_n \text{ telle que } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \\ \\ \quad \text{alors } \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0) \end{cases}
$$

Cinquième partie

Textes de DS3 (séries A,B,C,D,E)

COURS MIS101
Devoir Surveillé 3, Série A

Durée : 1 heure 20 mn

Documents non autorisés

Exercice 1.

Soit p un entier naturel non nul. On pose

$$I_p = \int_1^e x^2 (\ln x)^p \, dx$$

a. Calculer I_1 (on pourra faire une intégration par parties).

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul

$$I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3} I_p$$

Exercice 2.

Soit

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer $A = U\,L$.

b. Résoudre $U\,y = b$.

c. En déduire la solution de $A\,x = b$.

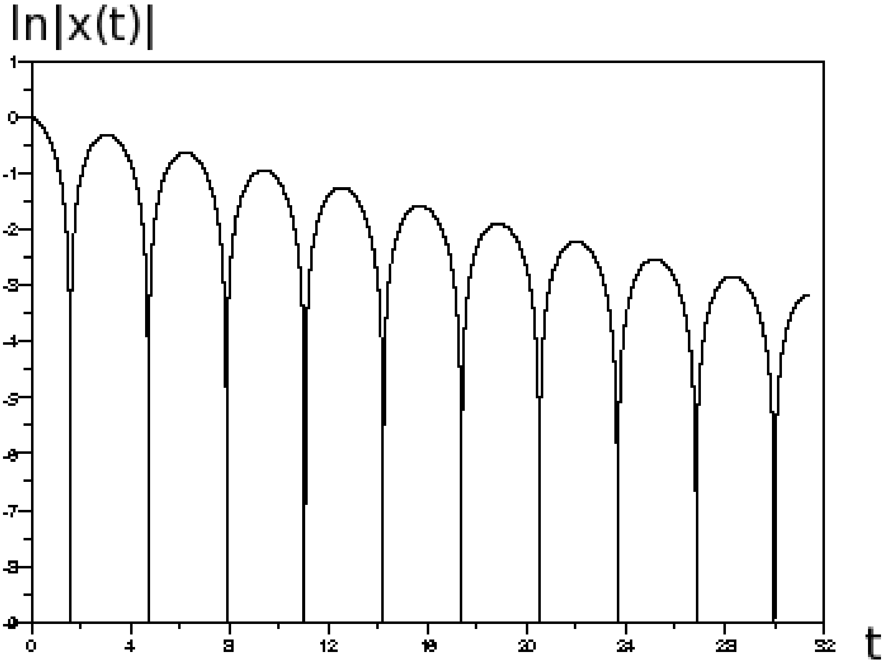
Exercice 3.

Soient β, $\omega \in \mathbf{R}$ tels que $\Delta = \beta^2 - \omega^2 < 0$.

a. Donner l'expression de $x(t)$ qui satisfait

$$x''(t) + 2\beta x'(t) + \omega^2\, x(t) = 0 \text{ et } x(0) = 1,\ x'(0) = 0$$

b. On suppose que β et ω sont choisis de sorte que le graphe de $\ln|x(t)|$ soit celui ci-dessous. En déduire une estimation pour β et ω.



Exercice 4.

On désigne par T un nombre réel > 0, et par a une fonction définie sur $\mathbf{R}$, réelle, continue et périodique de période T (c'est à dire que T est le plus petit réel > 0 tel que $\forall t \in \mathbf{R},\ a(t) = a(t+T)$). On pose

$$A = \int_0^T a(t)\,dt$$

a. Démontrer que

$$\forall c \in \mathbf{R} \text{ on a } \int_c^{c+T} a(t)\,dt = A$$

b. Donner l'expression, sous forme d'une intégrale, de $x(t)$ qui satisfait

$$x'(t) = a(t)\,x(t) \text{ et } x(0) = x_0$$

c. Dire pour quelle(s) valeur(s) de A l'équation différentielle ci-dessus admet des solutions périodiques de période T non identiquement nulles.

COURS MIS101
Devoir Surveillé 3, Série B
Durée : 1 heure 20 mn
Documents non autorisés

Problème 1. (1) [Cours] Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction. Écrire la définition à l'aide d'une limite du fait que f est dérivable en $x_0 = \frac{1}{2}$ avec dérivée égale à $p \in \mathbf{R}$.

(2) Calculer la limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{2})}{x - 2}$$

Problème 2. Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x < 0 \\ \sin(x) + x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
(2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R} - \{0\}$.
(3) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$ en utilisant la définition.
(4) Montrer que la fonction $g = f'$ est dérivable sur $\mathbf{R} - \{0\}$ et que g admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en 0, mais que g n'est pas dérivable en 0.

Problème 3. Soit

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

pour $x > -1$.
(1) Montrer que f est une fonction $f :]-1, +\infty[\to]0, +\infty[$ qui est décroissante.
(2) On pose $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que (x_n) est définie pour tout n. Calculer x_1, x_2, ..., x_5.
(3) Soit $y_n = x_{2n}$, $z_n = x_{2n+1}$. Montrer que (y_n) est décroissante et que (z_n) est croissante.
(4) Montrer que $0 \leq z_n \leq y_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ par récurrence sur n.
(5) Montrer que les suites (y_n) et (z_n) convergent. Si $\alpha = \lim y_n$ et $\beta = \lim z_n$, montrer que

$$f(f(\alpha)) = \alpha \text{ et } f(f(\beta)) = \beta.$$

(6) En résolvant l'équation $f(f(x)) = x$, en déduire que $\alpha = \beta$ et déterminer cette valeur commune.
(7) Montrer que pour tout n on a

$$x_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

où (a_n) est la suite d'entiers définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

(8) En déduire la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

COURS MIS101

Devoir Surveillé 3, Série C

Durée : 1 heure 20 mn

Documents non autorisés

Exercice 1.

1. Déterminer les trois nombres réels a, b, c tels que

$$\forall t \in \mathbf{R} \setminus \{+1\}\,,\ \frac{1}{t^3-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1}\,.$$

2. À l'aide des fonctions classiques (fractions rationnelles, logarithme néperien, Arctan), trouver toutes les primitives de la fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{t^3-1}$$

sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.

3. Exprimer le nombre

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^3-1}$$

à l'aide des fonctions classiques.

4. Rappeler que vaut la dérivée de la fonction $x \longmapsto \tan x$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$. À l'aide des fonctions classiques (fractions rationnelles, logarithme népérien, Arctan, tan), trouver toutes les primitives de la fonction

$$x \longmapsto \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x - 1}$$

sur $]-\pi/2, \pi/4[$.

Exercice 2.

1. Soit F la primitive sur $]1, +\infty[$ de la fonction

$$t \in]1, +\infty[\longrightarrow \frac{1}{t\,\log t}$$

qui s'annule en $t = e$ ($e \simeq 2,7183\cdots$ étant le nombre strictement positif défini par la relation $\log e = 1$). Exprimer la fonction F à partir de fonctions connues.

2. Trouver la fonction y dérivable sur $]1, +\infty[$ et solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} y'(t) - \frac{y(t)}{t\,\log t} &= \frac{1}{t}\,,\ \forall t \in]1, +\infty[\\ y(e) &= 1\,. \end{aligned}$$

3. Calculer

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{\log t}\,.$$

Exercice 3.
Soit $y \ : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) &= 0\,, \ \forall t \in \mathbf{R} \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1\,. \end{aligned}$$

Calculer $y(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ et la limite de $t \longmapsto y(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

COURS MIS101
Devoir Surveillé 3, Série D
Durée : 1 heure 20 mn
Documents non autorisés

Exercice 1.
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que pour α réel $\lim_{x\to 0} f(x)/x = \alpha$ (par exemple $f = \sin$ et $\alpha = 1$).

a) Calculer $\lim_{x\to 1} f(x^2 - 1)/(x - 1)$. (Indication : se souvenir de l'égalité $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ et travailler avec $u = x - 1$.)

b) Calculer $\lim_{x\to 0} x^2(3 + f(x))/(x + f(x))^2$.

Exercice 2.
Soient f et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout x dans $\mathbf{Q}$ on a $f(x) = g(x)$. Montrer que $f = g$ (une brève explication en mots de l'idée de la démonstration sera suffisante, en particulier il faudra expliquer en quoi la continuité permet de conclure).

Exercice 3.
Soient a et b des nombres réels ($a \neq b$). Calculer la valeur en $x = 0$ de la dérivée de

$$\frac{1}{b^2 - a^2} \exp(ax)\sin(bx) - \frac{1}{b^2 - a^2} \exp(ax)\cos(bx)\ .$$

Exercice 4.
Lesquelles de ces affirmations sont justes ? Justifier votre réponse.

a) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ pour $|x| \leq 1$.

b) $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout réel x.

Exercice 5.
a) Trouver r_1 et r_2 tels que la fonction $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ soit solution de l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = 0\ .$$

b) Déterminer A et B tels que la fonction y vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 6.
Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & - & y & - & 2z & = & 2 \\ -3x & + & y & & & = & 3 \end{array} \right.$$

COURS MIS101

Devoir Surveillé 3, Série E

Durée : 1 heure 20 mn

Documents non autorisés

Exercice 1.

Soit $(u_n)_n$ une suite croissante majorée.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 2.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $f\ : I \longmapsto \mathbf{R}$ une fonction numérique. Montrer que si f est dérivable en $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0.

Exercice 3.

Pour les fonctions numériques suivantes, donner le domaine de définition et étudier les limites aux bornes du domaine de définition sans oublier $-\infty$ et $+\infty$ s'il y a lieu :

- **a.** $f_1(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$;
- **b.** $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x^3 - 8}$;
- **c.** $f_3(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 4}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Exercice 4.

Soit f la fonction numérique définie sur $I =]-2, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+2) & -2 < x < -1 \\ x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ e^x & 0 < x \end{cases}$$

- **a.** Étudier les limites en -2 et $+\infty$;
- **b.** Montrer que f est continue sur I ;
- **c.** Montrer que f est dérivable sur I ;
- **d.** Étudier les variations de f et tracer son graphe.

Exercice 5.

Soit $\beta \in \mathbf{R}$; on considère le problème de Cauchy :

$$(C_\beta) \begin{cases} \beta y'' - 2y' + y = xe^x \\ \\ y(0) = 1\,,\ \beta y'(0) = \beta\,. \end{cases}$$

- **a.** Trouver la solution du problème de Cauchy (C_0) où $\beta = 0$.
- **b.** Trouver la solution du problème de Cauchy (C_1) où $\beta = 1$.