COURS MIAS 301

Devoir Surveillé 1, Jeudi 23 Octobre 2003

Durée: 1 heure 20 mn

TEXTE (*en italiques*) + **CORRIGÉ** (en roman)

ALGÈBRE

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3, dans lequel on a choisi une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On considère l'opérateur T de E dans E tel que

$$\begin{aligned} T(\vec{e}_1) &= a\vec{e}_1 \\ T(\vec{e}_2) &= 2\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \\ T(\vec{e}_3) &= -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + c\vec{e}_3\,, \end{aligned}$$

où a, b, c sont trois paramètres complexes.

a. *Calculer en fonction de a, b, c le polynôme caractéristique de T ; exprimer en fonction de a, b, c la trace de T et le déterminant de T ; donner une relation linéaire simple entre les quatre opérateurs T, $T \circ T$, $T \circ T \circ T$, Id_E.*

La matrice de T dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de E est

$$\begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 0 & b & -2 \\ 0 & -2 & c \end{pmatrix} ;$$

le polynôme caractéristique (calculé dans cette base, mais ce polynôme est indépendant du choix de la base d'après le cours) est donc

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a-X & 2 & -1 \\ 0 & b-X & -2 \\ 0 & -2 & c-X \end{vmatrix} &= (a-X)\begin{vmatrix} b-X & -2 \\ -2 & c-X \end{vmatrix} \\ &= (a-X)(X^2 - (b+c)X + bc - 4)\,. \end{aligned}$$

Ce polynôme se développe en

$$P_T(X) = (-1)^3(X^3 - (a+b+c)X^2 + [a(b+c) + (bc-4)]X - a(bc-4))\,;$$

la trace de T vaut donc, par identification avec l'expression

$$P_T(X) = (-1)^3(X^3 - \mathrm{Tr}\,[T]X^2 + a_2X - \det[T])$$

du cours,

$$\mathrm{Tr}\,[T] = a + b + c$$

(on pouvait le voir tout de suite : c'est la somme des termes diagonaux de la matrice) et le déterminant vaut

$$\det[T] = a(bc - 4)$$

(c'est le déterminant de la matrice).

La relation simple entre T, $T^2 = T \circ T$, $T^3 = T \circ T \circ T$, Id_E est donnée par le théorème de Cayley-Hamilton : c'est la relation $P_T[T] = 0$, soit

$$T^3 - (a+b+c)T^2 + [a(b+c) + (bc-4)]T - a(bc-4)\mathrm{Id}_E = 0$$

(relation entre opérateurs).

b. *Que signifie le fait qu'un opérateur soit nilpotent ? Déterminer les triplets (a, b, c) pour lesquels l'opérateur T est un opérateur nilpotent. Cet opérateur peut-il être à la fois nilpotent et diagonalisable ?*

Un opérateur nilpotent N de E dans E est un opérateur dont un itéré N^k, avec $k \in \mathbb{N}^*$, est l'opérateur nul.

Pour que T soit nilpotent, il faut et il suffit que le polynôme caractéristique de T soit de $(-1)^3 X^3$. En effet, si c'est le cas, on a $T^3 = 0$ par Cayley-Hamilton, donc T est nilpotent ; réciproquement, si T est nilpotent, la seule valeur propre de T est $\lambda = 0$, donc le polynôme caractéristique de T est $(-1)^3 X^3$. Pour que ce soit le cas ici, il faut donc que $a = b + c = bc - 4 = 0$. Ceci est possible si et seulement si $(a, b, c) = (0, 2i, -2i)$ ou $(a, b, c) = (0, -2i, 2i)$ car les conditions $a = b + c = bc - 4 = 0$ sont équivalentes aux trois conditions $a = 0$, $b = -c$, $b^2 + 4 = 0$.

Si un opérateur nilpotent est diagonalisable, il admet une base de vecteurs propres ; mais comme la seule valeur propre est $\lambda = 0$, la matrice de l'opérateur dans cette base de vecteurs popres est automatiquemnt la matrice nulle. L'opérateur serait l'opérateur nul, ce qui n'est jamais le cas de T quelque soient les valeurs de a, b, c. Il est donc impossible que T soit à la fois nilpotent et diagonalisable.

c. *On suppose $a = 0, b = 2i, c = -2i$; calculer le polynôme caractéristique, puis le polynôme minimal, de T.*

Le polynôme caractéristique de T vaut $(-1)^3 X^3$ dans ce cas (T est d'ailleurs nilpotent). Le polynôme minimal doit diviser le polynôme caractéristique ; ce peut donc être X, X^2, ou X^3. Ce n'est pas X car T n'est pas l'opérateur nul ; ce n'est pas non plus X^2 car la matrice de T^2 dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & -2 & -2i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2+4i & -4+2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui n'est pas la matrice nulle. Le polynôme minimal de T est donc $Q_T(X) = X^3$ dans ce cas.

d. *On suppose $a = 1$, $b = c = 0$; montrer que T est diagonalisable, calculer une base de vecteurs propres, puis la matrice de T^n (exprimée dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$) lorsque n est un entier naturel strictement positif donné.*

Le polynôme caractéristique de T est dans ce cas $P_T(X) = (1-X)(X^2-4)$; les trois racines de ce polynôme sont $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = -2$; ces racines sont distinctes et T est donc bien diagonalisable.

Le vecteur $\vec{e}_1$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 1$ (on le voit tout de suite car $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ par définition de T. Pour que $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ soit un vecteur propre pour $\lambda = 2$, il faut et il suffit que

$$-x + 2y - z = y + z = 0\,;$$

un vecteur propre pour $\lambda = 2$ est donc par exemple $(3, 1, -1)$. Pour que $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ soit un vecteur propre pour $\lambda = -2$, il faut et il suffit que

$$3x + 2y - z = y - z = 0\,;$$

un vecteur propre pour $\lambda = 2$ est donc par exemple $(-1, 3, 3)$. Si P est la matrice

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

la matrice de T dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = P \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \bullet P^{-1}\,.$$

La matrice de T^n dans cette même base s'écrit donc

$$P \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \bullet P^{-1}\,.$$

La matrice P^{-1} se calcule en exprimant les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ dans la base formée des trois vecteurs propres

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 &= 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3\,. \end{aligned}$$

On a donc

$$\vec{f_1} = \vec{e}_1$$

et

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 - \vec{e}_3 &= \vec{f_2} - 3\vec{f_1} \\ 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 &= \vec{f_3} + \vec{f_1}\,, \end{aligned}$$

système que l'on résout comme le système de Cramer en $\vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 - \vec{e}_3 &= \vec{f_2} - 3\vec{f_1} \\ \vec{e}_2 + \vec{e}_3 &= \frac{\vec{f_1} + \vec{f_3}}{3}\,, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 &= \frac{1}{6}(-8\vec{f_1} + 3\vec{f_2} + \vec{f_3}) \\ \vec{e}_3 &= \frac{1}{6}(10\vec{f_1} - 3\vec{f_2} + \vec{f_3})\,, \end{aligned}$$

d'où l'expression de P^{-1} :

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -8 & 10 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(on aurait pu aussi calculer la transposée de la matrice des cofacteurs de P et diviser par le déterminant de P égal à 6, ce qui aurait donné l'expression de P^{-1}). Tous calculs faits, la matrice de T^n dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -8 + 2^n(9 - (-1)^n) & 10 - 2^n(9 + (-1)^n) \\ 0 & 3 \times 2^n(1 + (-1)^n) & -3 \times 2^n(1 - (-1)^n) \\ 0 & -3 \times 2^n(1 - (-1)^n) & 3 \times 2^n(1 + (-1)^n) \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien la matrice de T si $n = 1$.

e. *On considère maintenant $a, b, c \in \mathbb{R}$ et T (défini toujours comme dans l'en-tête de l'exercice) comme un opérateur du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E_{\mathbb{R}}$ de dimension 3 (défini par $E_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\vec{e}_1 + \mathbb{R}\vec{e}_2 + \mathbb{R}\vec{e}_3$) dans lui-même. Montrer que T est trigonalisable (comme opérateur de $E_{\mathbb{R}}$ dans $E_{\mathbb{R}}$).*

Le polynôme caractéristique de T est toujours (dans ce nouveau cadre)

$$P_T(X) = (a - X)(X^2 - (b + c)X + bc - 4)\,;$$

le discriminant du trinôme $X^2 - (b+c)X + bc - 4$ vaut

$$\Delta = (b+c)^2 - 4(bc-4) = (b-c)^2 + 16 > 0\,;$$

le polynôme caractéristique de T se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme

$$P_T(X) = (a-X)\Big(X - \frac{b+c+\sqrt{\Delta}}{2}\Big)\Big(X - \frac{b+c-\sqrt{\Delta}}{2}\Big).$$

Il est donc scindé en facteurs du premier degré dans $\mathbb{R}[X]$, ce qui implique que T est trigonalisable comme opérateur de $E_{\mathbb{R}}$ dans $E_{\mathbb{R}}$.

ANALYSE

Question de cours. *Les affirmations ci-dessous sont-elles correctes ou non ? (une affirmation est fausse, on donnera un exemple le justifiant)*

- *toute série numérique convergente est absolument convergente ;*
- *une série à termes positifs $[u_n]_{n\geq n_0}$ converge si et seulement si le terme général u_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$;*
- *toute série numérique absolument convergente est convergente.*

1. Non ! Il existe des séries convegentes non absolument convergentes : par exemple, si $v_n = (-1)^n/n$, $n \geq 1$, la série “télescopique” $[v_{n+1} - v_n]_{n\geq 1}$ et convergente (de somme $-v_1 = 1$) tandis que la série $[|v_{n+1} - v_n|]_{n\geq 1}$ diverge car

$$v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1}\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\Big)$$

qui, en module, équivaut à $2/n$, terme général d'une série de Riemann divergente.

2. Non ! Si la série converge, le terme général tend vers 0. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la série divergente $[1/n]_{n\geq 1}$ dont le terme général $1/n$ tend bien vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

3. Oui ! Une série numérique absolument convergente est toujours convergente (cela se voit par exemple en utilisant le critère de Cauchy pour les séries numériques).

Exercice 1.

a. *Étudier le comportement asymptotique de la série* $\Big[\frac{1}{n\log n}\Big]_{n\geq 2}$.

La fonction $f : t \to \frac{1}{t\log t}$ est une fonction de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, décroissante (le dénominateur est produit de deux fonctions croissantes) ; cette fonction admet pour primitive sur $]1, +\infty[$ la fonction $F\ : t \to \log[\log t]$. La suite $[f(n)]_{n\geq 2}$ est, d'après le cours (comparaison séries/intégrales) une série divergente car $\lim_{t\to\infty} F(t) = +\infty$.

b. *Donner au voisinage de $+\infty$ un équivalent simple (en fonction de n) de*

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log k}\,.$$

Toujours d'après le résultat du cours (comparaison série/intégrale), dans le cas où $[f(n)]_{n\geq 2}$ diverge (f étant décroissante sur $]1, +\infty[$ et de primitive F tendant vers $+\infty$ à l'infini), on a

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log k} \sim F(n) = \log[\log n]$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.

a. *Montrer que, pour tout nombre complexe z de partie réelle strictement supérieure à 1, les séries numériques*

$$[1/n^z]_{n\geq 1}\,, \quad [(-1)^{n-1}/n^z]_{n\geq 1}$$

sont des séries convergentes (on rappelle que $n^z = \exp(z \log n)$).

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re},z}}\,.$$

Comme $\mathrm{Re}\, z > 1$, la série de Riemann $\left[\frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, z}}\right]_{n\geq 1}$ est convergente. Donc les deux séries numériques

$$[1/n^z]_{n\geq 1}\,, \quad [(-1)^{n-1}/n^z]_{n\geq 1}$$

sont absolument convegentes, donc convergentes, si $\mathrm{Re}\, z > 1$.

b. *Montrer que pour tout nombre x réel strictement positif la série numérique $[(-1)^{n-1}/n^x]_{n\geq 1}$ est une série convergente.*

On peut appliquer le critère des séries alternées car la suite $(1/n^x)_{n\geq 1}$ tend en décroissant vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Comme la série $[(-1)^{n-1}/n^x]_{n\geq 1}$ est alternée, le critère des séries alternées s'applique ici et la série converge.

c. *Pour* $x > 1$, *on note*

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \\ \eta(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}. \end{aligned}$$

Montrer que l'on a, pour tout $x > 1$, *la relation*

$$\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)\,.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^x} \\ &= \zeta(x) - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^x} \\ &= \zeta(x) - \frac{2}{2^x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \\ &= (1 - 2^{1-x})\zeta(x) \end{aligned}$$

en distinguant dans les sommes donnant η et ζ les contributions à la somme des indices pairs et des indices impairs.