COURS MIAS 301

Devoir Surveillé 2, Jeudi 6 Novembre 2003

Durée: 1 heure 20 mn

Texte (en roman) + Corrié *en italiques*

ALGÈBRE

Question de cours.

Énoncer, pour un opérateur trigonalisable T d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E dans lui-même, le théorème de décomposition de Dunford (en explicitant tous les termes impliqués dans sa formulation). En quoi ce théorème facilite-t'il le calcul des itérés T^n de l'opérateur T ?

Voici l'énoncé de Dunford : tout opérateur trigonalisable T d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie dans lui-même s'écrit sous la forme $T = D+S$, où D est diagonalisable (i.e. l'espace se décompose comme somme directe de sous-espaces propres associés à D), S est nilpotent (i.e il existe un entier strictement positif k tel que S^k soit l'opérateur nul), avec de plus $S \circ D = D \circ S$. On peut même affirmer (admis en cours) que pareille décomposition est unique.

Si l'on veut calculer T^n et si k est la période de S, on peut utiliser la formule du binôme (valable ici car S et D commutent) pour affirmer

$$T^n = (S+D)^n = \sum_{l=0}^{\min(n,k-1)} \frac{n!}{l!(n-l)!} S^l \circ D^{n-l}\,.$$

Les puissances de D sont immédiates à calculer car D est diagonalisable et il suffit donc de connaitre $S, ..., S^{k-1}$ pour connaitre toutes les puissances de T.

Exercice 1.

a. *Calculer (dans $\mathbb{C}$) les valeurs propres de la matrice*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -13 \\ 0 & 1/2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de l'opérateur de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$ représenté par cette matrice est

$$P(X) = (-1-X)\Big[(1-X)(-4-X) + 13/2\Big] = -(1+X)(X^2+3X+5/2)\,;$$

les racines sont $\lambda = -1$ et $\lambda = -1/2(3 \pm \sqrt{9-10}) = -1/2(3 \pm i)$. Ce sont les valeurs propres de l'opérateur (ces trois nombres sont, notons le, distincts).

b. *Sans chercher à résoudre complètement le système différentiel, montrer que si* z_1, z_2, z_3 *sont trois fonctions de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, telles que*

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= -z_1(t) - 2z_3(t) \\ \frac{dz_2}{dt} &= z_2(t) - 13z_3(t) \\ \frac{dz_3}{dt} &= \frac{z_2(t)}{2} - 4z_3(t)\,, \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{t\to+\infty} z_j(t) = 0$$

pour $j = 1, 2, 3$.

Comme les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -13 \\ 0 & 1/2 & -4 \end{pmatrix}.$$

sont distinctes, cette matrice est diagonalisable (comme matrice considérée à coefficients complexes) ; il existe donc une matrice P (à coefficients complexes) telle que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -13 \\ 0 & 1/2 & -4 \end{pmatrix} = P \bullet \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 + i/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 - i/2 \end{pmatrix} \bullet P^{-1}.$$

Si l'on pose

$$\begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ Z_3(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \bullet \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$$

(les Z_j sont *a priori* à coefficients complexes car la matrice P^{-1} l'est sûrement), on a

$$\begin{pmatrix} \frac{dZ_1}{dt} \\ \frac{dZ_2}{dt} \\ \frac{dZ_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 + i/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 - i/2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ Z_3(t) \end{pmatrix}.$$

Ce système différentiel se résout immédiatement en

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= C_1 e^{-t} \\ Z_2(t) &= C_2 e^{-3t/2} e^{it/2} \\ Z_3(t) &= C_3 e^{-3t/2} e^{-it/2}\,, \end{aligned}$$

où les constantes C_1, C_2, C_3 sont des constantes complexes arbitraires. On trouve les fonctions z_1, z_2, z_3 en posant

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = P \bullet \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ Z_3(t) \end{pmatrix} = P \bullet \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{-3t/2} e^{it/2} \\ C_3 e^{-3t/2} e^{-it/2} \end{pmatrix}.$$

Lorsque t tend vers $+\infty$, on a, poour $j = 1, 2, 3$,

$$\lim_{t \to +\infty} |Z_j(t)| = 0$$

car les parties réelles des trois valeurs propres sont strictement négatives (ces parties réelles valent -1, $-3/2$, $-3/2$). Comme chaque fonction z_j est une combinaison linéaire à coefficients constants de Z_1, Z_2, Z_3, on a aussi

$$\lim_{t \to +\infty} |z_j(t)| = 0$$

pour $j = 1, 2, 3$.

Exercice 2.

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes en une variable de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels ; on rappelle que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 dont une base est $\mathcal{B}_0 := \{1, X, X^2\}$.

a. *Soit L l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$L(P) = P'(1) - \int_0^1 P(t)dt\,;$$

montrer que L est un élément de E^* et calculer les coordonnées de L dans la base $\mathcal{B}_0^*$ (duale de la base $\mathcal{B}_0$).

Si P et Q sont deux polynômes et λ et μ deux nombres réels, on a

$$\begin{aligned} (\lambda P + \mu Q)'(1) &= \lambda P'(1) + \mu Q'(1) \\ \int_0^1 (\lambda P(t) + \mu Q(t))dt &= \lambda \int_0^1 P(t)dt + \mu \int_0^1 Q(t)dt \end{aligned}$$

d'après la linéarité de l'intégrale. L'application L est donc bien une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, donc un élément de E^*.

On a

$$\begin{aligned} L(1) &= 0 - \int_0^1 dt = -1 \\ L(X) &= 1 - \int_0^1 tdt = 1 - 1/2 = 1/2 \\ L(X^2) &= 2 - \int_0^1 t^2 dt = 2 - 1/3 = 5/3\,. \end{aligned}$$

Si (e_0^*, e_1^*, e_2^*) est la base duale de $\{1, X, X^2\}$, on a, d'après la formule clef du cours,

$$L = L(1)e_0^* + L(X)e_1^* + L(X^2)e_2^* = -e_0^* + (1/2)e_1^* + (5/3)e_2^*\,;$$

les coordonnées de L dans la base $\mathcal{B}_0^*$ sont donc $(-1, 1/2, 5/3)$.

b. *Montrer que pour tout* $a \in \mathbb{R}$*, les polynômes* 1*,* $X-a$*,* $(X-a)^2$ *constituent une base* $\mathcal{B}$ *de* E *; exprimer la matrice de passage de la base* $\mathcal{B}$ *à la base* $\mathcal{B}_0$*, puis la matrice de passage de la base duale* $\mathcal{B}^*$ *à la base* $\mathcal{B}_0^*$ *(on rappelle que la matrice de passage* $[\mathcal{B} \to \widetilde{\mathcal{B}}]$ *d'une base* $\mathcal{B}$ *à une base* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *est la matrice que l'on obtient en exprimant en colonne les coordonnées des vecteurs de* $\mathcal{B}$ *dans la base* $\widetilde{\mathcal{B}}$*).*

Les coordonnées des polynômes $1, X-a, (X-a)^2$ dans la base $\mathcal{B}_0$ sont respectivement $(1,0,0)$, $(-a,1,0)$, $(a^2,-2a,1)$ puisque

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ X-a &= -a \times 1 + 1 \times X \\ (X-a)^2 &= a^2 \times 1 - 2a \times X + 1 \times X^2\,. \end{aligned}$$

Comme la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(dont les colonnes correspondent aux coordonnées de $1, X-a, (X-a)^2$ dans la base $\mathcal{B}_0$) est inversible, ces trois polynômes $1, X-a, (X-a)^2$ forment encore une base $\mathcal{B}$. D'ailleurs, on a

$$[\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0] = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}^*$ à la base $\mathcal{B}_0^*$ s'obtient en transposant l'inverse de la matrice $[\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0]$ (d'après le cours). Comme

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \times 1 \\ X &= a \times 1 + 1 \times (X-a) \\ X^2 &= a^2 \times 1 + 2a \times (X-a) + 1 \times (X-a)^2\,, \end{aligned}$$

on a

$$[\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0]^{-1} = [\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}] = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$[\mathcal{B}^* \to \mathcal{B}_0^*] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 \end{pmatrix} .$$

ANALYSE

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes et $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs telle que que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty .$$

a. *On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que la série numérique $[a_n e^{-\lambda_n t_0}]_{n\geq 0}$ soit absolument convergente. Montrer que pour tout $t \geq t_0$, la série de terme général $[a_n e^{-\lambda_n t}]_{n\geq 0}$ est convergente.*

Si $t \geq t_0$, on a

$$|a_n e^{-\lambda_n t}| = |a_n| \times e^{-\lambda_n t} \leq |a_n| \times e^{-\lambda_n t_0}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ car les nombres λ_n sont tous strictement positifs ; comme la série $[a_n e^{-\lambda_n t_0}]_{n\geq 0}$ est supposée absolument convergente, la série numérique à termes positifs $[|a_n| e^{-\lambda_n t_0}]_{n\geq 0}$ est convergente et, d'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série

$$[|a_n e^{-\lambda_n t}]_{n\geq 0} = [|a_n| e^{-\lambda_n t}]_{n\geq 0}$$

l'est aussi. La série numérique $[a_n e^{-\lambda_n t}]_{n\geq 0}$ est donc bien absolument convergente pour tout $t \geq t_0$.

b. *On suppose toujours qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que la série $[a_n e^{-\lambda_n t_0}]_{n\geq 0}$ soit absolument convergente. On considère la série de fonctions $[a_n e^{-\lambda_n z}]_{n\geq 0}$, considérée comme une série de fonctions sur $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z \geq t_0\}$. Montrer que cette série de fonctions converge normalement sur $\mathcal{D}$. Cette série de fonctions converge-t-elle aussi uniformément sur $\mathcal{D}$?*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout z dans $\mathcal{D}$, on a

$$|a_n e^{-\lambda_n z}| = |a_n| \times e^{-\lambda_n \mathrm{Re}\, z} \leq |a_n| \times e^{-\lambda_n t_0} = |a_n e^{-\lambda_n t_0}| .$$

On a donc

$$\sup_{n\in\mathcal{D}} |a_n e^{-\lambda_n z}| \leq w_n = |a_n e^{-\lambda_n t_0}| .$$

Comme la série $[w_n]_{n\geq 0}$ est convergente (car la série $[a_n^{-\lambda_n t_0}]_{n\geq 0}$ est supposée absolument convergente), la série de fonctions $[a_n e^{-\lambda_n z}]_{n\geq 0}$ est bien normalement convergente dans $\mathcal{D}$ (il suffit de reprendre la définition de la convergence normale d'une série de fonctions sur un sous ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}$ vue dans le cours).

Un théorème du cours assure que la convergence normale d'une série de fonctions implique la convergence uniforme ; la série de fonctions $[a_n e^{-\lambda_n z}]_{n\geq 0}$ converge donc uniformément sur $\mathcal{D}$.

c. *On suppose maintenant qu'il existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tel que la série numérique $[a_n e^{-\lambda_n t_1}]_{n\geq 0}$ converge. En exploitant les identités*

$$e^{-\lambda_n t} = e^{-\lambda_n t_1} \times e^{-\lambda_n (t-t_1)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

et en vous référant à un critère que l'on énoncera soigneusement, montrer la convergence de la série numérique $[a_n e^{-\lambda_n t}]_{n\geq 0}$ pour tout $t > t_1$ (elle converge aussi pour $t = t_1$ par hypothèses).

La suite $(e^{-\lambda_n (t-t_1)})_{n\geq 0}$ tend vers 0 en décroissant si $t - t_1 > 0$ car la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ est supposée tendre vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme la série numérique $[a_n e^{-\lambda_n t_1}]_{n\geq 0}$ est supposée convergente, la suite des sommes partielles de cette série est bornée. La série

$$[a_n e^{-\lambda_n t}]_{n\geq 0} = [a_n e^{-\lambda_n t_1} \times e^{-\lambda_n (t-t_1)}]_{n\geq 0}$$

à étudier est une série de terme général $u_n v_n$, où la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 en décroissant et les sommes partielles de la série $[v_n]_{n\geq 0}$ sont bornées. On est dans les conditions d'application du premier critère d'Abel vu en cours. La série $[a_n e^{-\lambda_n t}]_{n\geq 0}$ est donc bien convergente si $t > t_1$ (elle l'est aussi d'ailleurs par hypothèses si $t = t_1$).

d. *On reprend les hypothèses de la question* **(c)** *; en utilisant un résultat du cours que l'on citera avec précision (en disant comment on l'applique), prouver, pour tout $t \geq t_1$, la convergence de la série de terme général*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} \frac{e^{-\lambda_{n-k}\, t}}{k^2}$$

La série de Riemann $[1/n^2]_{n\geq 1}$ est absolument convergente, tandis que, pour tout $t \geq t_1$, la série $[a_n e^{-\lambda_n t}]_{n\geq 0}$ est convergente. D'autre part

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} \frac{e^{-\lambda_{n-k}\, t}}{k^2}$$

est le terme général de la série produit de Cauchy des deux séries $[1/n^2]_{n\geq 1}$ et $[a_n e^{-\lambda_n t}]_{n\geq 0}$. D'après le théorème de Mertens (une série produit de Cauchy de deux séries convergentes dont l'une au moins est absolument convergente est convergente), cette série produit de Cauchy est bien convergente.