COURS MIAS 301

Devoir Surveillé 3, Jeudi 27 Novembre 2003

Durée: 1 heure 20 mn

Texte (en roman) + Corrié *en italiques*

ALGÈBRE

Question de cours.

Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, E^* son dual, comment est défini (dans E^*) l'orthogonal $A^\perp$ d'un sous-ensemble A de E ? Si E est de dimension finie n et si A est un sous-espace de E, justifier pourquoi $A^\perp$ est un sous-espace de E^*. Quelle relation relie alors les dimensions de A, de $A^\perp$, et l'entier n ?

L'orthogonal d'un sous-ensemble A d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est le sous-ensemble de l'espace vectoriel dual E^* défini par

$$A^\perp := \{e^* \in E^* \text{ t.q } \quad \forall \vec{V} \in A\,,\ e^*(\vec{V}) = 0\}\,.$$

Supposons E de dimension finie et soit A un sous-espace vectoriel de E. Si e_1^* et e_2^* sont dans $A^\perp$ et si $\vec{V}$ est un vecteur quelconque de A, alors, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{K}$,

$$(\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^*)(\vec{V}) = \lambda_1 e_1^*(\vec{V}) + \lambda_2 e_2^*(\vec{V}) = 0\,,$$

ce qui montre que $\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^*$ appartient encore à $A^\perp$; ainsi $A^\perp$ est-il bien un sous-espace vectoriel de A (ceci est vrai d'ailleurs que E soit de dimension finie ou non, que A soit un sous-espace vectoriel ou non).

Si E est de dimension finie n et si A est un sous-espace vectoriel de E, les dimensions de A et $A^\perp$ sont liées par la relation

$$\dim A + \dim A^\perp = \dim E = n$$

(si $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k$ est une base de A complétée par $\vec{e}_{k+1}, ..., \vec{e}_n$ en une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ de E, alors les formes $e_{k+1}^*, ..., e_n^*$ de $\mathcal{B}^*$ forment une base de $A^\perp$).

Exercice.

On considère la forme quadratique Q dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$Q(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 2xy - 8yz + 6xz\,.$$

a. *Quelle est, exprimée dans la base canonique*

$$\mathcal{B}_0 := \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}\,,$$

la matrice de la forme bilinéaire Θ polarisée de Q ?
La forme polarisée s'obtient immédiatement par "dédoublement" des termes, ce qui donne :

$$\Theta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) =$$
$$x_1x_2 + 2y_1y_2 + 9z_1z_2 - (x_1y_2 + x_2y_1) - 4(y_1z_2 + y_2z_1) + 3(x_1z_2 + x_2z_1)\,.$$

La matrice de Θ dans la base $\mathcal{B}_0$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

b. *En utilisant le procédé de réduction de Gauss vu en cours, déterminer une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs $\vec{e}_j$ tels que $\Theta(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ pour toute paire (i, j) d'indices distincts dans $\{1, 2, 3\}$ (on exprimera les vecteurs $\vec{e}_j$, $j = 1, 2, 3$, dans la base $\mathcal{B}_0$).*
On suit la démarche du cours pour trouver la réduction de Gauss de Q. On a donc

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= [x^2 - 2xy + 6xz] + 2y^2 - 8yz + 9z^2 \\ &= [x^2 + 2x(3z - y)] + 2y^2 - 8yz + 9z^2 \\ &= (x - y + 3z)^2 - (3z - y)^2 + 2y^2 + 9z^2 - 8yz \\ &= (x - y + 3z)^2 - (9z^2 + y^2 - 6yz) + 2y^2 + 9z^2 - 8yz \\ &= (x - y + 3z)^2 + y^2 - 2yz \\ &= (x - y + 3z)^2 + (y - z)^2 - z^2\,. \end{aligned}$$

Considérons le changement de coordonnées

$$\begin{aligned} X &= x - y + 3z \\ Y &= y - z \\ Z &= z \end{aligned}$$

Le vecteur de coordonnées $(X = 1, Y = 0, Z = 0)$ est le vecteur $\vec{e}_1$ de coordonnées $(x = 1, y = 0, z = 0)$ dans la base $\mathcal{B}_0$; le vecteur de coordonnées $(X = 0, Y = 1, Z = 0)$ est le vecteur $\vec{e}_2$ de coordonnées $(x = 1, y = 1, z = 0)$ dans la base $\mathcal{B}_0$; le vecteur de coordonnées $(X = 0, Y = 0, Z = 1)$ est le vecteur $\vec{e}_3$ de coordonnées $(x = -2, y = 1, z = 1)$ dans la base $\mathcal{B}_0$; les trois vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ forment bien une base $\mathcal{B}$ et ils sont orthogonaux deux à deux relativement à la forme bilinéaire Θ puisque l'expression de Q dans cette base est

$$Q(X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3) = X^2 + Y^2 - Z^2 .$$

c. *La forme bilinéaire Θ est-elle dégénérée ?*

La matrice de Θ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible (c'est la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $1, 1, -1$) ; la forme Θ est donc de rang 2, donc non dégénérée.

d. *Trouver (en modifiant la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ que vous avez trouvé au* **(b)***) une base $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que, pour tout (X, Y, Z) dans $\mathbb{R}^3$,*

$$Q(X\vec{f}_1 + Y\vec{f}_2 + Z\vec{f}_3) = X^2 + Y^2 - Z^2$$

(on exprimera simplement les vecteurs $\vec{f}_j$ à partir des $\vec{e}_j$).

Il n'y a rien à faire ici puisque la réduction de Gauss nous a conduit à une base qui convenait ; on peut prendre $\vec{f}_j = \vec{e}_j$, $j = 1, 2, 3$.

e. *La forme quadratique Q admet-elle des vecteurs isotropes ? Si oui, préciser quel type d'ensemble (du point de vue géométrique) forment les points M de $\mathbb{R}^3$ tels que le vecteur $\vec{0M}$ soit isotrope.*

Il y a des vecteurs isotropes. Ce sont les vecteurs $X\vec{f}_1 + Y\vec{f}_2 + Z\vec{f}_3$ tels que $Z^2 = X^2 + Y^2$. Les points M tels que $\vec{OM}$ est isotrope forment un cône de $\mathbb{R}^3$ (le sommet étant exclus) ; ce cône est un cône de d'axe la droite dirigée par $\vec{f}_3$ et passant par l'origine.

ANALYSE

Exercice 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$u_n := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+k)^3} .$$

En remarquant que

$$n^3 u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^3} ,$$

montrer que

$$u_n \simeq \frac{3}{8n^2}$$

lorsque n tend vers l'infini.

La fonction

$$t \to \frac{1}{(1+t)^3}$$

est une fonction continue sur $[0,1]$, limite uniforme de la suite de fonctions en escalier f_n définies par

$$f_n(t) = \left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)^3 \quad \text{si} \quad t \in [k/n,(k+1)/n[\,,\ k = 0,...,n-1,$$

et $f_n(1) = 1/8$. On a donc

$$\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^3}\ n \overset{\to}{\to} \infty \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^3}dt = \Big[-\frac{1}{2(1+t)^2}\Big]_0^1 = \frac{3}{8}$$

(c'est l'approximation de l'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction continue par ses sommes de Riemann). Ceci implique

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \frac{3}{8}\,,$$

d'où

$$u_n \sim \frac{3}{8n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. *On considère deux nombres réels α et β et, pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_{n,\alpha,\beta}$ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f_{n,\alpha,\beta} := n^\alpha e^{-n^\beta t}\sin(nt)\,.$$

a. *Montrer que si α et β sont deux nombres réels tels que $\beta \leq 0$ et $\alpha < -2$, la série de fonctions $[f_{\alpha,\beta,n}]_{n\geq 1}$, considérée comme une série de fonctions sur $\mathbb{R}$, est une série de fonctions convergente sur $\mathbb{R}$ dont la somme $S_{\alpha,\beta}$ définit une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (on citera soigneusement le théorème du cours que l'on utilise).*

Pour tout $A > 0$ et tout $t \in]-A,+\infty[$, on a

$$|f_{n,\alpha,\beta}(t)| \leq n^\alpha e^{n^\beta A} \leq n^\alpha e^A\,.$$

Comme $\alpha < -2$, la série de fonctions $[f_{n,\alpha,\beta}]_{n\geq 1}$ converge normalement sur $]-A,+\infty[$, la somme étant donc une fonction $S_{\alpha,\beta}$ continue sur $]-A,+\infty[$ (la convergence normale implique la convergence uniforme). Chaque fonction $f_{n,\alpha,\beta}$, $n \geq 1$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme produit de fonctions dérivables), de dérivée

$$\frac{df_{n,\alpha,\beta}}{dt} = -n^{\alpha+\beta}e^{-n^\beta t}\sin(nt) + n^{\alpha+1}e^{-n^\beta t}\cos(nt)\,.$$

Pour tout $t \in]-A, +\infty[$, on peut majorer

$$\left|\frac{df_{n,\alpha,\beta}}{dt}\right| \leq (n^{\alpha+\beta} + n^{\alpha+1})e^{n^\beta A} \leq (n^{\alpha+\beta} + n^{\alpha+1})e^{A}\,;$$

comme $\alpha < -2$ et $\beta \leq 0$, on a $\alpha+\beta < -2$ et $\alpha + 1 < -1$; la série

$$\Big[(n^{\alpha+\beta} + n^{\alpha+1})e^{A}\Big]_{n\geq 1}$$

est convergente, et l'on a donc la convergence normale de la série de fonctions $[f'_{n,\alpha,\beta}]_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$. Les hypothèses du théorème d'intervertion sommation/dérivation sont remplies et l'on peut affirmer que la fonction $S_{\alpha,\beta}$ est dérivable sur $]-A, +\infty[$, de dérivée

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_{n,\alpha,\beta}}{dt}\,;$$

comme la série au second membre converge normalement donc uniformément, la somme est continue sur $]-A,+\infty[$ (une limite uniforme de fonctions continues est continue). La fonction $S_{\alpha,\beta}$ est donc bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque le choix de A est arbitraire.

b. *On considère toujours $\beta \leq 0$ et $\alpha < -2$; montrer que si $a < b$ sont deux nombres réels, on a*

$$\int_a^b S_{\alpha,\beta}(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \int_a^b e^{-n^\beta t} \sin(nt)\,dt$$

(on citera ici encore soigneusement le théorème du cours que l'on utilise).

La série $[f_{n,\alpha,\beta}]_{n\geq 1}$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$, donc sur $[a,b]$. Les hypothèses du théorème d'intervertion sommation/intégration continue sont donc remplies et l'on peut affirmer

$$\int_a^b S_{\alpha,\beta}(t)dt = \int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha,\beta}(t)\Big)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_{n,\alpha,\beta}(t)\,dt\,.$$

c. *Montrer que la série de fonctions $[n^2 e^{-n^3 t}\sin(nt)]_{n\geq 0}$, considérée cette fois comme une série de fonctions sur $]0,+\infty[$, est une série de fonctions convergente sur cet intervalle, dont la somme*

$$S(t) := \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-n^3 t} \sin(nt)\,,\ \ t > 0\,,$$

définit une fonction C^∞ sur cet intervalle. Soit $p \in \mathbb{N}^*$; exprimer sous la forme de la somme d'une série de fonctions la p-ème dérivée $S^{(p)}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ (on citera toujours soigneusement le théorème du cours que l'on utilise).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$t \to g_n(t) := n^2 e^{-n^3 t} \sin(nt) dt$$

est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, que l'on peut aussi écrire, en utilisant les nombres complexes,

$$t \to \frac{n^2}{2i}\Big(e^{-(n^3-in)t} - e^{-(n^3+in)t}\Big) ;$$

la dérivée p-ème de cette fonction ($p \geq 1$) vaut

$$\frac{(-1)^p n^2}{2i}\Big[(n^3-in)^p e^{int} - (n^3+in)^p e^{-int}\Big] e^{-n^3 t}$$
$$= (-1)^p n^2 e^{-n^3 t} \operatorname{Im}\left[(n^3-in)^p e^{int}\right].$$

Pour tout $p \geq 1$, pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a donc

$$\left|\frac{d^p g_n}{dt^p}\right| \leq n^2 |n^3 - in|^p e^{-n^3 t} = n^{p+2}\Big(n^4+1\Big)^{p/2} e^{-n^3 t}.$$

Si $a > 0$, on a donc, pour tout $p \in N^*$, pour tout $t \geq a$,

$$\left|\frac{d^p g_n}{dt^p}\right| \leq n^{p+2}\Big(n^4+1\Big)^{p/2} e^{-n^3 a} ;$$

comme toutes les séries de terme général

$$n^{p+2}\Big(n^4+1\Big)^{p/2} e^{-n^3 a}, \ p \geq 1,$$

sont convergentes (du fait que l'exponentielle e^{-an^3} impose sa limite à toute fonction puissance du type $n \to n^\gamma$ avec $\gamma \geq 0$), toutes les séries $[g_n^{(p)}]_{n\geq 0}$, $p \in \mathbb{N}^*$, sont normalement convergentes sur $[a,+\infty[$. On peut appliquer de manière inductive le théorème d'intervertion sommation/dérivation (comme au **(a)**) et conclure que

$$t \to \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$$

est une fonctin C^∞ sur $]a,+\infty[$, la dérivée p-ème étant la fonction

$$t \to \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^p n^2 e^{-n^3 t} \operatorname{Im}\left[(n^3-in)^p e^{int}\right];$$

comme ceci est vrai pour tout $a > 0$ et que la dérivabilité est une propriété locale des fonctions, le résultat est encore vrai sur $]0,+\infty[$.