Semestre 4, Année 2004-2005 SESSION 1

UE : MAT401

Date : 19 Mai 2005, 14h00- 17h00 Durée : 3h

TEXTE (en italiques) et CORRIGE (en roman)

Exercice 1 (séries numériques)

a. *Question de cours* **:** *Rappeler en quoi consiste la règle de Cauchy pour décider du comportement d'une série numérique à termes positifs ? Cette règle permet-elle de décider dans tous les cas ou bien laisse t-elle des situations indécidables ? Donner dans ce cas un exemple.*

La règle de Cauchy s'énonce ainsi : si $[u_n]_{n\geq n_0}$ est une série numérique à termes positifs, alors :

- si $\limsup_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n} < 1$, la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ converge ;
- si $\limsup_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n} > 1$, la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ diverge.

Cette règle laisse indécidable le cas où $\limsup_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n} = 1$. C'est par exemple ce qui se produit pour toutes les séries de Riemann $[n^{-x}]_{n\geq 1}$, $x \in \mathbb{R}$; or on sait (pour d'autres raisons) qu'une telle série converge si $x > 1$ et diverge si $x \leq 1$.

b. *Application du cours* **:** *Quelle est la nature (convergence ? divergence ? ni l'une ni l'autre ?) des séries numériques de terme général*

$$u_n := \Big(\frac{n^2+3n+1}{n^2+4n+2}\Big)^{n^2} \qquad v_n := \frac{\cos^2 n}{n} \quad ?$$

On énoncera les critères utilisés.

Pour la première série, on applique la règle de Cauchy (il s'agit en effet d'une série à termes positifs). On a

$$\begin{aligned}
u_n^{1/n} &= \exp\left[n\log\Big(\frac{n^2+3n+1}{n^2+4n+2}\Big)\right] \\
&= \exp\left[n\log\Big(\frac{1+3/n+1/n^2}{1+4/n+2/n^2}\Big)\right] \\
&= \exp\left[n\log\Big(1+3/n-4/n+o(1/n)\Big)\right] \\
&= \exp\left[n\log\Big(1-1/n+o(1/n)\Big)\right] = \exp(n(-1/n+o(1/n))
\end{aligned}$$

(puisque $\log(1+x) \sim x$ au voisinage de $x = 0$), d'où il résulte

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = 1/e < 1\,.$$

La série $[u_n]_{n\geq 0}$ est donc convergente d'après la règle de Cauchy.
On a

$$\cos^2 n = \frac{\cos(2n)+1}{2}\,,$$

d'où

$$v_n = \frac{1}{2n} + \frac{\cos(2n)}{2n}\,.$$

Les sommes partielles de la série $[\cos(2n)]_{n\geq 1}$ étant bornées et la suite numérique $(1/(2n))_{n\geq 1}$ convergeant en décroissant vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, le premier critère d'Abel permet d'affirmer que la série $[\cos(2n)/(2n)]_{n\geq 1}$ est convergente. Comme la série harmonique $[1/(2n)]_{n\geq 1}$ est divergente (critère de Riemann), il en est de même de la série numérique $[v_n]_{n\geq 1}$ (le terme général est la somme de celui d'une série divergente et de celui d'une série convergente).

Exercice 2 (séries de fonctions, analyse complexe)

<u>*Question* 1</u>

a. *Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $R > 1$. Calculer (en utilisant la formule des résidus) l'intégrale curviligne*

$$\int_{\gamma_R} \frac{d\zeta}{1+\zeta^n}\,,$$

où γ_R est le chemin paramétré correspondant au bord du domaine hachuré sur la figure ci-dessous, parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

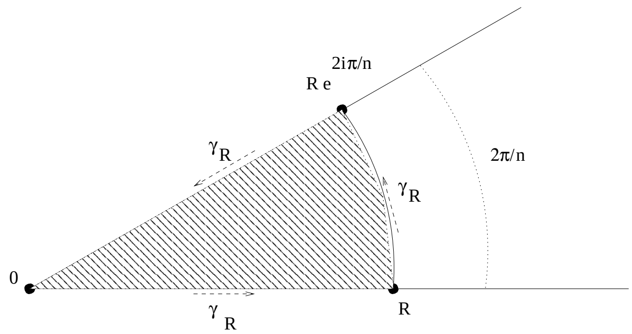

Figure 1: Le chemin γ_R (Exercice 2 (1.a))

En déduire la formule

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}\,.$$

La fonction

$$f\ : z \longmapsto \frac{1}{1+z^n}$$

est une fonction rationnelle de la variable complexe z ; cette fonction définit donc une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. Les points singuliers de cette fonction méromorphe sont les zéros complexes du polynôme $X^n+1=0$, soit les n points distincts $z=\exp(i\pi/n+2ik\pi/n)$, $k=0,...,n-1$. Pour $R>1$, le contour γ_R enserre un et un seul de ces points, le point $z_0:=\exp(i\pi/n)$. D'après la formule de résidus, on a donc

$$\int_{\gamma_R} \frac{d\zeta}{1+\zeta^n} = 2i\pi \mathrm{Res}_{z_0}\Big(\frac{d\zeta}{1+\zeta^n}\Big) = \frac{1}{nz_0^{n-1}} = -\frac{2i\pi e^{i\pi/n}}{n} \qquad (*)$$

(on applique aussi la formule donnant le résidu en un pôle simple, soit $\mathrm{Res}_z((g/h)d\zeta)=g(z)/h'(z)$).

Avant de faire tendre R vers l'infini dans la formule (*), on subdivise le contour γ_R en trois parties (le parcours sur l'axe réel, le parcours sur le cercle de rayon R, le parcours sur la droite de pente $\tan(2\theta/n)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} \frac{d\zeta}{1+\zeta^n} &= \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_0^{\pi/4} \frac{Rie^{i\theta}}{1+R^ne^{ni\theta}}\,d\theta - e^{2i\pi/n}\int_0^R \frac{dr}{1+r^n} \\ &= (1-e^{2i\pi/n})\int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + Ri\int_0^{\pi/4} \frac{e^{i\theta}}{1+R^ne^{ni\theta}}\,d\theta\,.\end{aligned}$$

On constate que

$$\left|Ri\int_0^{\pi/4} \frac{e^{i\theta}}{1+R^ne^{ni\theta}}\,d\theta\right| \leq \frac{\pi R}{4(R^n-1)} = o(1)$$

lorsque R tend vers l'infini (on a $|a\pm b|\geq ||a|-|b||$ pour deux nombres complexes a et b, ce qui permet de minorer le module du dénominateur du terme sous l'intégrale) puisque $n>1$; en faisant tendre R vers l'infini dans (*), il vient donc

$$-\frac{2i\pi e^{i\pi/n}}{n} = (1-e^{2i\pi/n})\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{dt}{1+t^n}\,,$$

ce qui donne

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{dt}{1+t^n} = \frac{-2i\pi}{n(e^{-i\pi/n}-e^{i\pi/n})} = \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}\,.$$

Comme la fonction $t\mapsto 1/(1+t^n)$ est positive sur $[0,+\infty[$, ceci prouve à la fois la convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}$$

et donne sa valeur

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi}{\sin(\pi/n)}\,.$$

b. *Calculer*

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}\Big)\,.$$

Comme $\sin x \simeq x$ au voisinage de $x=0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{\pi}{n\pi/n}\Big) = 1\,.$$

<u>*Question 2*</u>

a. *Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$, où*

$$f_n \ :\ t\in[0,+\infty[\longmapsto \frac{1}{1+t^n}$$

converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f que l'on calculera. La convergence est-elle uniforme ?

Pour $t\in[0,1[$, la suite géométrique $(t^n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 ; pour $t=1$, cette suite est constante égale à 1 ; pour $t\in[1,+\infty[$, elle tend vers $+\infty$. Par conséquent la <u>suite</u> (et non série !) de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction

$$f \ : t \longrightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } t\in[0,1[\\ 1/2 \text{ si } t=1 \\ 0 \text{ si } t\in]1,+\infty[\,. \end{cases}$$

Comme la fonction f n'est pas continue sur $[0,+\infty[$ (au contraire des f_n, $n\geq 2$), le fait que la prise de limite uniforme préserve la continuité implique que la convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ ici ne saurait être uniforme sur $[0,+\infty[$.

b. *Montrer*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n} = 1$$

(on majorera la quantité $1-\int_0^1 dt/(1+t^n)$*).*

On a

$$\begin{aligned} 1-\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n} &= \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t^n}\right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n\,dt}{1+t^n} \leq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}\,. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}\right) = 0\,,$$

soit

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n} = 1\,.$$

c. *Montrer que*

$$\forall n \geq 2\,,\ \forall t \geq 1\,,\ \ |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2}\,.$$

Pour $n \geq 2$ et $t \geq 1$, on a $t^n \geq t^2$, d'où la majoration de f_n.

d. *Montrer que l'intégrale impropre*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

est convergente.

On applique le critère de comparaison pour les intégrales impropres des fonctions positives. Le problème de convergence se pose uniquement en $t=+\infty$ et l'on a

$$\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$$

au voisinage de $+\infty$. Comme $\int^{+\infty} dt/t^2$ converge (critère de Riemann), il en est de même de notre intégrale impropre ici. On aurait tout aussi bien remarquer qu'une primitive de $t \longmapsto 1/(1+t^2)$ est la fonction $t \longmapsto \operatorname{Arctan} t$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{Arctan}\mathrm{t}$ existe et vaut $\pi/2$, ce qui est un autre moyen de justifier la convergence de l'intégrale impropre en question.

e. *Enoncer le théorème de convergence dominée pour des intégrales impropres et retrouver à l'aide de ce théorème (on expliquera pourquoi il s'applique bien ici) le résultat obtenu au (b) de la question 1.*

Soit (a,b) un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de (a,b) dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toutes continues par morceaux sur tout segment $[\alpha,\beta]$ de (a,b). On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur (a,b) vers une fonction f elle aussi continue par morceaux sur tout segment de (a,b) et qu'il existe une fonction positive $w\ :(a,b)\to[0,+\infty[$, continue par morceaux sur tout segment de (a,b), d'intégrale impropre convergente sur (a,b), et telle que

$$\forall t\in(a,b)\,,\ \forall n\geq 0\,,\ |f_n(t)|\leq w(t) \qquad \textit{(clause de domination)}\,;$$

alors toutes les fonctions f_n, ainsi que f, ont des intégrales impropres convergentes sur (a,b), et de plus :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Ici le résultat s'applique avec $(a,b)=[1,+\infty[$ et $w(t)=1/(1+t^2)$ pour donner

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} f_n(t)dt=\int_1^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt=0\,,$$

soit

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}=0\,.$$

En combinant avec le résultat établi en **2.b** et la relation de Chasles, on retrouve bien le résultat établi au **1.b**. On aurait d'ailleurs pu court-circuiter le recours à **2.b**, utiliser $(a,b)=[0,+\infty[$ et

$$w(t)=\begin{cases}1 \text{ si } t\in[0,1]\\ \frac{1}{1+t^2} \text{ si } t\in[1,+\infty[\end{cases}$$

pour obtenir à partir du théorème de convergence dominée directement le résultat du **1.b**, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt=\int_0^1 dt=1\,.$$

Exercice 3 (séries de fonctions, séries de Fourier)

Soit x un nombre réel n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$.

a. *Calculer, pour $n\in\mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier complexe $c_n(f_x)$ de la fonction 2π-périodique f_x définie par*

$$\forall t\in[-\pi,\pi[\,,\, f_x(t)=\cos(xt)\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
c_n(f_x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_x(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_x(t) e^{-int}\, dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^{i(x-n)t} + e^{i(-x-n)t})\, dt \\
&= \frac{1}{4i\pi}\left(\frac{2i\sin\pi(x-n)}{x-n} + \frac{2i\sin\pi(x+n)}{x+n}\right) \\
&= \frac{x}{2\pi(x^2-n^2)} \times (\sin(\pi(x-n)) + \sin(\pi(x+n))) \\
&= \frac{x\sin(\pi x)\cos(n\pi)}{\pi(x^2-n^2)} = \frac{(-1)^n x \sin(\pi x)}{\pi(x^2-n^2)}\,.
\end{aligned}$$

b. *Enoncer le théorème de Dirichlet ; s'applique-t'il bien en un point quelconque $t_0 \in \mathbb{R}$ pour la fonction f_x ?*

Voici l'énoncé du théorème de Dirichlet : si f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique et que t_0 est un point où f admet des dérivées à gauche et à droite en un point t_0 de $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{it_0} = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}\,.$$

Ici, la fonction $t \to \cos(xt)$ est continue et dérivable sur $]-\pi, \pi[$; le théorème de Dirichlet s'applique donc bien pour f_x en tout point de l'ensemble

$$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Comme $\cos(\pi x) = \cos(-\pi x)$, la fonction f_x est en fait continue sur $\mathbb{R}$; elle admet aussi une dérivée à gauche et à droite aux points $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Le théorème de Dirichlet s'applique en tout point t_0 de $\mathbb{R}$.

c. *Vérifier la formule*

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2-k^2}\,. \tag{$*$}$$

Si l'on applique le théorème de Dirichlet en $t_0 = 0$, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{x(-1)^k \sin(\pi x)}{x^2-k^2} e^{it_0} = \frac{\sin(\pi x)}{x} + 2 \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x(-1)^k \sin(\pi x)}{x^2-k^2} = \pi\,.$$

En divisant par $\sin(\pi x)$, on obtient exactement la formule voulue.

d. *On considère sur* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ *les séries de fonctions* $[u_n]_{n\geq 1}$ *et* $[v_n]_{n\geq 1}$ *de termes généraux respectivement les fonctions*

$$\begin{aligned} u_n \quad &: \quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \longmapsto \frac{(-1)^n z}{z^2-n^2} \\ v_n \quad &: \quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \longmapsto \frac{(-1)^{n+1}(z^2+n^2)}{(z^2-n^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Montrer que ces séries de fonctions convergent simplement sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

Pour z fixé dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, les séries à termes positifs $[|z^2-n^2]^{-1}]_{n\geq 1}$ et $[|z^2+n^2|\times|z^2-n^2|^{-2}]_{n\geq 1}$ sont convergentes en vertu de la règle des équivalents puisque leur terme général est dans les deux cas équivalent à n^{-2} (terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann). Comme l'absolue convergence d'une série de nombres complexes implique sa convergence, les séries de fonctions $[u_n]_{n\geq 1}$ et $[v_n]_{n\geq 1}$ sont convergentes simplement sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

e. *Rappeler ce que signifie le fait qu'une série de fonctions converge normalement sur un sous-ensemble de* $\mathbb{C}$.

La série de fonctions $[u_n]_{n\geq n_0}$ (toutes les fonctions étant définies au moins sur un sous-ensemble donné D de $\mathbb{C}$) converge normalement sur D s'il existe une série numérique à termes positifs convergente $[w_n]_{n\geq n_1}$ telle que, pour tout $z\in D$, pour tout $n\geq \max(n_0,n_1)$,

$$|u_n(z)|\leq w_n\,.$$

f. *Montrer que les séries de fonctions* $[u_n]_{n\geq 1}$ *et* $[v_n]_{n\geq 1}$ *convergent normalement sur tout sous-ensemble fermé et borné de* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

Soit K un sous-ensemble fermé borné de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Il existe $M\in\mathbb{N}$ tel que $K\subset D(0,M)$. Si $n\geq M$, on a, pour tout z dans K,

$$|z^2-n^2|\geq n^2-M^2\,.$$

Comme la série $[(n^2-M^2)^{-1}]_{n\geq M+1}$ est convergente et que

$$|u_n(z)|=\frac{1}{|z^2-n^2|}\leq\frac{1}{n^2-M^2}$$

pour tout $z\in K$ et tout $n\geq M+1$, la série $[u_n]_{n\geq 1}$ converge bien normalement sur K (on prend $n_1=M+1$ dans la définition proposée au **(e)**). De même, on a, pour tout $z\in K$ et tout $n\geq M+1$,

$$|v_n(z)|\leq\frac{n^2+M^2}{(n^2-M^2)^2}\,.$$

Comme la série
$$\left[\frac{n^2+M^2}{(n^2-M^2)^2}\right]_{n\geq M+1}$$
est convergente, la série $[v_n]_{n\geq 1}$ converge aussi normalement sur K.

g. *Justifier l'identité suivante :*
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\,,\, \frac{\pi^2 \text{cotan }(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x^2} - 2\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$$

On constate que pour $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $v_n(x) = u_n'(x)$. D'autre part, d'après la formule (*) :
$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} = 2\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\,.$$
Comme la série $[u_n']_{n\geq 1}$ converge normalement sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ (voir le résultat établi au **(f)**), on peut appliquer le théorème de dérivation terme-à-terme des séries de fonctions pour affirmer que, sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big[\frac{\pi}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x}\Big] &= -\frac{\pi^2 \text{cotan }(\pi x)}{\sin(\pi x)} + \frac{1}{x^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)\\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\,.\end{aligned}$$

La formule à démontrer en résulte immédiatement.

Exercice 4 (séries entières, séries de Fourier)

Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière de rayon $R>0$ et S sa somme.

a. *Pour $r \in [0,R[$, exprimer en fonction des coefficients a_n et de r les coefficients de Fourier complexes de la fonction $\theta \in \mathbb{R} \longmapsto S(re^{i\theta})$. En citant proprement un théorème du cours, vérifier, pour tout $r\in[0,R[$, la formule :*
$$2\pi\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2 r^{2k} = \int_0^{2\pi} |S(re^{i\theta})|^2\,d\theta\,.$$
En déduire, pour tout $r\in[0,R[$, pour tout $k\in\mathbb{N}$,
$$|a_k| r^k \leq \max_{|\zeta|=r} |S(\zeta)|\,.$$

La série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ converge normalement (donc uniformément) sur le cercle de centre l'origine et de rayon r. Si $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, est le point courant de ce cercle, on a

$$S(re^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta}\,,$$

la convergence étant uniforme en θ. Du fait que l'intégration commute avec la prise de limite uniforme, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k r^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,d\theta\,.$$

Comme

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,d\theta = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ 2\pi \text{ si } n = k \end{cases}$$

le n-ème coefficient de Fourier complexe c_n de $\theta \longmapsto S(re^{i\theta})$ vaut 0 si $n < 0$ et $a_n r^n$ si $n \geq 0$. Il résulte alors de la formule de Plancherel (applicable ici car $\theta \longmapsto S(re^{i\theta})$ est une fonction continue 2π-périodique) que

$$\int_0^{2\pi} |S(re^{i\theta}|^2\,d\theta = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}\,.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc

$$|a_k|^2 r^{2k} \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(re^{i\theta})|^2\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \times 2\pi(\max_{|\zeta|=r} |S(\zeta)|)^2\,.$$

L'inégalité voulue en résulte (en prenant les racines carrées des deux membres).

b. *On suppose que $R = +\infty$ et qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et des constantes $A \geq 0$ et $B \geq 0$ telles que la fonction S vérifie*

$$|S(z)| \leq A|z|^m + B$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que l'on a pour tout $r > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_k| r^k \leq A r^m + B\,;$$

en déduire $a_k = 0$ pour $k > m$. Que peut-on alors dire de la fonction S ?

On a, pour tout $r > 0$,

$$\max_{|\zeta|=r} |S(\zeta)| \leq A r^m + B\,,$$

d'où, en utilisant le dernier point établi au **(a)**,

$$|a_k| r^k \leq A r^m + B$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $r > 0$. Si $r > 0$, on a donc

$$|a_k| \leq A r^{m-k} + B r^{-k}\,.$$

Si $k > m$ (donc nécessairement $k \geq 1$), on trouve en faisant tendre r vers $+\infty$ (ce qui est possible ici car la seule contrainte est $r < R$ et que $R = +\infty$) que ceci implique (pour $k > m$)

$$a_k = 0\,.$$

Les coefficients a_k sont tous nuls si $k > m$ et S est dans ce cas une fonction polynomiale

$$S(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$$

de degré au plus m.