Semestre 2, Année 2011-2012

UE N1M12011 : DS2 - Analyse 1

Date : 10 Avril 2012, 11h00-12h30 Durée : 1h30

Texte (en italiques) et corrigé (en roman).

Exercice I.

Questions de cours. *Énoncer le théorème des accroissements finis et l'inégalité des accroissements finis.*

Le théorème (ou « formule ») des accroissements finis concerne les fonctions à valeurs <u>réelles</u> et s'énonce ainsi : si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors :

$$\exists\, c \in]a,b[\quad \text{t.q.} \quad f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

(*cf.* le Corollaire 2.6 du polycopié de cours).

L'inégalité des accroissements finis concerne, elle, le cadre plus général des fonctions à valeurs <u>complexes</u> et s'énonce ainsi : si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors on a l'inégalité :

$$|f(b) - f(a)| \leq (b-a) \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|$$

(*cf.* le Théorème 2.8 du polycopié de cours).

Soit f une fonction complexe continue sur un intervalle ouvert $]a,b[$ telle que f' soit bornée.

1. *Montrer que f est uniformément continue sur $]a,b[$.*
2. *Montrer que f est bornée sur $]a,b[$.*
3. *La fonction f se prolonge-t-elle par continuité aux bornes a, b ?*

1. Pour tout x et y dans $]a,b[$, on a, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \times \sup_{t \in]x,y[} |f'(t)| \leq |x-y| \times \sup_{t \in]a,b[} |f'(t)|. \qquad (1)$$

Comme f' est ici supposée bornée sur $]a,b[$, on a

$$\sup_{t \in]a,b[} |f'(t)| = M \in [0, +\infty[.$$

Si $M = 0$, la fonction f est, d'après (1), constante sur $]a,b[$, et par conséquent uniformément continue sur cet intervalle ouvert. Si $M > 0$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a, toujours d'après (1),

$$\forall\, x, y \in]a,b[,$$
$$\Big(|x-y| < \eta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{M}\Big) \Longrightarrow \Big(|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{M} \times M = \epsilon\Big),$$

ce qui prouve encore que f est uniformément continue sur $]a,b[$ (*cf.* la Définition 2.9 du polycopié de cours).

2. Soit x_0 un point arbitraire de $]a,b[$ (on suppose que $]a,b[$ est non vide, sinon il n'y a rien à démontrer). Pour tout $x \in]a,b[$, on a, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \times \sup_{t\in]a,b[} |f'(t)| = M|x-x_0| \leq M(b-a), \quad (2)$$

où $M := \sup_{t\in]a,b[} |f'(t)|$. Comme $\big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leq |f(x) - f(x_0)|$ pour tout $x \in]a,b[$, on déduit de (2) que

$$\forall\, x \in]a,b[,\ |f(x)| \leq |f(x_0)| + M(b-a),$$

donc que f est bornée sur $]a,b[$.

3. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $]a,b[$ convergeant vers a, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (donc vérifie le critère de Cauchy). On en déduit, puisque

$$\forall\, n, p \in \mathbb{N},\ |f(x_n) - f(x_p)| \leq M|x_n - x_p|$$

(où $M := \sup_{t\in]a,b[} |f'(t)|$) d'après (1), que :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N},\ \Big(n \geq N(\epsilon) \text{ et } p \geq N(\epsilon)\Big)$$
$$\Longrightarrow \Big(|x_n - x_p| \leq \frac{\epsilon}{M}\Big) \Longrightarrow \Big(|f(x_n) - f(x_p)| \leq \epsilon\Big).$$

La suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ est donc une suite de nombres complexes vérifiant aussi le critère de Cauchy, donc convergeant (d'après le théorème de Cauchy) vers une limite $l[(f(x_n))_{n\geq 0}]$. Si $(\tilde{x}_n)_{n\geq 0}$ est une autre suite de points de $]a,b[$ convergeant aussi vers a, la suite $(x_n - \tilde{x}_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 ; il en est alors de même, toujours d'après le fait que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \leq M|x_n - \tilde{x}_n|$$

(*cf.* (1)), pour la suite $(f(x_n) - f(\tilde{x}_n))_{n\geq 0}$. Ceci montre que

$$l[(f(x_n))_{n\geq 0}] = l([(f(\tilde{x}_n))_{n\geq 0}]),$$

et, par conséquent, que le nombre complexe $l([(f(x_n))_{n\geq 0}])$ ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Si l'on pose donc

$$f(a) := l([(f(x_n))_{n\geq 0}]),$$

où $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite quelconque de points de $]a, b[$ convergeant vers a, on définit bien un prolongement par continuité de f sur l'intervalle $[a, b[$: en effet, la fonction ainsi prolongée est bien continue en a (si l'on invoque le critère séquentiel de la Définition 2.3 du polycopié de cours). Le même raisonnement s'applique concernant le moyen de prolonger f en une fonction continue sur $]a, b]$.

Exercice II.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier la nature de la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sin(\ln n)$.

1. *Soit $n_k = \left[e^{2k\pi}\right] + 1$, où $[u]$ désigne la partie entière de u c'est-à-dire le plus grand entier p tel que $p \leq u$. En remarquant tout d'abord que $\sin\left(\ln\left(e^{2k\pi}\right)\right) = 0$, puis en appliquant l'inégalité des accroissements finis a la fonction $x \mapsto \sin x$ et ensuite à la fonction $x \mapsto \ln x$, montrer que*

$$|u_{n_k}| \leq \left|\ln(n_k) - \ln\left(e^{2k\pi}\right)\right| \leq e^{-2k\pi},$$

et conclure que 0 est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.

L'inégalité des accroissements finis, que l'on applique ici à la fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, couplée avec le fait que la fonction $\sin' = \cos$ est bornée sur $\mathbb{R}$ en valeur absolue par 1, implique :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |\sin x - \sin y| \leq |x - y| \times \sup_{t\in\mathbb{R}} |\cos t| \leq |x - y|. \quad (3)$$

En particulier, si $k \in \mathbb{N}$ et $x = \ln n_k$, $y = \ln(e^{2k\pi}) = 2k\pi$ (on observe que $n_k = \left[e^{2k\pi}\right] + 1 > e^{2k\pi}$, donc que $x > y$ du fait de la stricte croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$), on a :

$$|\sin(\ln n_k) - \sin(2k\pi)| = |\sin(\ln n_k)| = |u_{n_k}| \leq |\ln n_k - \ln(e^{2k\pi})|. \quad (4)$$

Sur l'intervalle $]e^{2k\pi}, n_k[$, la fonction ln est dérivable, de dérivée la fonction strictement décroissante $t \mapsto 1/t$, et l'on a :

$$\forall\, t \in]e^{2k\pi}, n_k[,\ |\ln'(t)| = |1/t| \leq \frac{1}{e^{2k\pi}} = e^{-2k\pi}.$$

L'inégalité des accroissements finis, appliquée cette fois à la fonction ln sur $[e^{2k\pi}, n_k]$, implique :

$$\begin{aligned} &|\ln n_k - \ln(e^{2k\pi})| \leq |n_k - e^{2k\pi}| \times \sup_{t\in]e^{2k\pi}, n_k[} |\ln'(t)| \\ &\leq e^{-2k\pi}\,|n_k - e^{2k\pi}| \leq e^{-2k\pi} \end{aligned} \tag{5}$$

puisque

$$|n_k - e^{2k\pi}| = n_k - e^{2k\pi} = \left[e^{2k\pi}\right] + 1 - e^{2k\pi} \in]0,1]$$

(du fait de la définition de $\left[e^{2k\pi}\right]$). En reportant l'inégalité (5) au second membre de l'inégalité (4), on obtient bien l'inégalité demandée. Comme la suite $(e^{-2k\pi})_{k\geq 0}$ tend vers 0, la suite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ (qui est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$) tend vers 0. Ainsi 0 est limite d'une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, et est donc bien valeur d'adhérence de cette suite (*cf.* la Définition 1.14 du polycopié de cours).

2. *Refaire le raisonnement précédent avec la suite* $m_k = \left[e^{2k\pi+\pi/2}\right] + 1$ *et en déduire que* 1 *est valeur d'adhérence de la suite* $(u_n)_n$*. Conclure.*

On applique comme dans la question précédente l'inégalité des accroissements finis pour la fonction sin (inégalité (3)), mais cette fois avec $x = \ln m_k$ et $y = \ln(e^{2k\pi+\pi/2}) = 2k\pi + \pi/2$ (on observe ici encore que $y < x$ du fait de la définition de $m_k = \left[e^{2k\pi+\pi/2]}\right] + 1$ et de la stricte croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$). On en déduit :

$$\begin{aligned} &|\sin(\ln m_k) - \sin(2k\pi + \pi/2)| = |\sin(\ln m_k) - 1| = |u_{m_k} - 1| \\ &\leq |\ln m_k - \ln(e^{2k\pi+\pi/2})|. \end{aligned} \tag{6}$$

Sur l'intervalle ouvert $]e^{2k\pi+\pi/2}, m_k[$, la fonction ln est dérivable, de dérivée $t \mapsto 1/t$, strictement décroissante sur cet intervalle. On a donc, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln sur le segment $[e^{2k\pi+\pi/2}, m_k]$:

$$\begin{aligned} &|\ln m_k - \ln(e^{2k\pi+\pi/2})| \leq |m_k - e^{2k\pi+\pi/2}| \times \sup_{t\in]e^{2k\pi+\pi/2}, m_k[} |\ln'(t)| \\ &\leq e^{-2k\pi-\pi/2}\,|m_k - e^{2k\pi+\pi/2}| \leq e^{-2k\pi-\pi/2} \end{aligned} \tag{7}$$

puisque

$$|m_k - e^{2k\pi+\pi/2}| = m_k - e^{2k\pi+\pi/2} = \left[e^{2k\pi+\pi/2}\right] + 1 - e^{2k\pi+\pi/2} \in]0,1]$$

(du fait de la définition de $\left[e^{2k\pi+\pi/2}\right]$). En reportant l'inégalité (7) au second membre de l'inégalité (6), on obtient

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ |u_{m_k} - 1| \leq e^{-2k\pi-\pi/2}.$$

Comme la suite $(e^{-2k\pi-\pi/2})_{k\geq 0}$ tend vers 0, la suite $(u_{m_k})_{k\geq 0}$ (qui est encore une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$) tend vers 1. Ainsi 1 est limite d'une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, et est donc bien valeur d'adhérence de cette suite. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes (0 et 1) et ne peut donc converger. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite divergente.

3. *Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* $(u_n)_n$ *?* Indication *: pour* $\vartheta \in [0, 2\pi]$*, considérer la suite d'entiers* $n_k^\vartheta = \left[e^{2k\pi+\vartheta}\right] + 1$.

   En répétant mot pour mot le raisonnement fait dans la question précédente (mais avec cette fois θ au lieu de $\pi/2$ et donc $n_k^\theta = \left[e^{2k\pi+\theta}\right] + 1$ à la place de $m_k = \left[e^{2k\pi+\pi/2}\right] + 1$ [1]), on montre que

$$\forall\, k \geq 0,\ |u_{n_k^\theta} - \sin(\ln(e^{2k\pi+\theta}))| = |u_{n_k^\theta} - \sin\theta| \leq e^{-2k\pi-\theta}.$$

   On en déduit que $\sin\theta$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ (car il existe une suite extraite de cette suite, en l'occurrence la suite $(u_{n_k^\theta})_{k\geq 0}$ convergeant vers $\sin\theta$, du fait que la suite $(e^{-2k\pi-\theta})_{k\geq 0}$ converge vers 0 quelque soit θ dans $[0, 2\pi]$). L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ contient donc tout le segment $[-1, 1]$, image de $\mathbb{R}$ par l'application sin. Comme $|u_n| \leq 1$ pour tout n (puisque u_n est un sinus), l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est exactement égal à $[-1, 1]$.

Exercice III.

1. Question de cours. *Énoncer le théorème de Rolle.*

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(a) = f(b)$ et que f soit dérivable sur $]a, b[$. Alors :

$$\exists\, c \in]a, b[\quad \text{t.q.} \quad f'(c) = 0$$

(*cf.* le Théorème 2.5 du polycopié de cours).

Soit $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$*,* $a < b$*, une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur le segment* $[a, b]$ *telle que* f'' *soit dérivable sur* $]a, b[$*. Soient* $x_0 < x_1 < x_2$*, 3 points distincts du segment* $[a, b]$*.*

2. *Montrer qu'il existe un polynôme* P *de degré* 2 *tel que*

$$P(x_j) = f(x_j),\ j = 0, 1, 2.$$

Indication *: chercher* P *sous la forme*

$$P(x) = a\,(x - x_0)\,(x - x_1) + b\,(x - x_0)\,(x - x_2) + c\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

1. Notons ainsi que $n_k^0 = n_k$ et que $n_k^{\pi/2} = m_k$.

Si l'on pose

$$a = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \quad b = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad c = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

on observe immédiatement que le polynôme P ainsi construit satisfait les conditions exigées. Ces valeurs de a, b, c s'obtiennent en substistant respectivement x_2, x_1, x_0 à l'inconnue x dans :

$$f(x) = P(x) = a\,(x - x_0)\,(x - x_1) + b\,(x - x_0)\,(x - x_2) + c\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

(on observe chaque fois que deux des trois produits figurant dans l'expression de P telle qu'elle est proposée induisent 0 après cette substitution).

Dans toute la suite, P est fixé comme ci-dessus et, de plus, on fixe un point $x \in [a, b]$, distinct des trois nombres x_0, x_1, x_2.

3. *Comment faut-il choisir le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la fonction :*

$$g\ : t \in [a, b] \longmapsto f(t) - P(t) - \alpha\,(t - x_0)\,(t - x_1)\,(t - x_2)$$

s'annule en x ?

Il faut choisir α tel que

$$f(x) - P(x) - \alpha(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

soit

$$\alpha = \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}. \tag{8}$$

On choisit partir de maintenant α comme à la question ci-dessus, de sorte que g s'annule en quatre points distincts.

4. *Vérifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et que g'' est dérivable sur $]a, b[$.*

La fonction polynomiale

$$Q : t \in \mathbb{R} \longmapsto P(t) + \alpha\,(t - x_0)\,(t - x_1)\,(t - x_2)$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. La fonction g, qui s'écrit comme différence de la fonction f (de classe C^2 sur $[a, b]$ et telle que f'' est dérivable sur $]a, b[$) et de cette fonction polynomiale Q, est donc (comme f) de classe C^2 sur $[a, b]$, avec de plus g'' dérivable sur $]a, b[$.

– *Montrer que g' s'annule en trois points distincts de* $]a,b[$.

La fonction g s'annule aux trois points x_0, x_1, x_2 (puisque $f(x_j) = P(x_j)$ pour $j = 0,1,2$, par construction même du polynôme P *via* le choix des trois coefficients a, b, c à la question **2**) et s'annule aussi au point x (supposé distinct de ces trois points) de par le choix du paramètre α à la question **3**. Cette fonction g s'annule donc en (au moins) quatre points distincts de $[a,b]$, en l'occurrence x_0, x_1, x_2, x. D'après le théorème de Rolle, entre deux quelconques (mais consécutifs) de ces quatre points, la fonction g' admet au moins un zéro. Comme quatre points (dans $\mathbb{R}$) délimitent trois intervalles ouverts contigus (deux-à-deux disjoints) I_{11}, I_{12}, I_{13} (chacun ayant pour extrémités deux de ces quatre points), la fonction g' s'annule en au moins trois points distincts de $]a,b[$. On applique pour justifier cela le théorème de Rolle à chacun des trois intervalles ouverts contigus I_{1j}, $j = 1,2,3$, délimités par les quatre points x_0, x_1, x_2, x ; la fonction g' admet ainsi au moins un zéro dans chacun de ces trois intervalles ouverts contigus (donc deux-à-deux disjoints) I_{11}, I_{12}, I_{13}.

– *Montrer que g'' s'annule en deux points distincts de* $]a,b[$.

La fonction g' (continue sur $[a,b]$) s'annule en trois points distincts de $]a,b[$ (établi au point précédent). Ces trois points distincts délimitent deux intervalles contigus disjoints I_{21} et I_{22} (inclus dans $]a,b[$). D'après le théorème de Rolle, appliqué cette fois à la fonction g' continue sur $[a,b]$ (donc sur les segments $\overline{I_{21}}$ et $\overline{I_{22}}$), dérivable sur chacun des deux intervalles ouverts contigus I_{21}, I_{22}, et nulle aux bornes de chacun d'eux. La fonction g'' s'annule au moins une fois dans chacun de ces deux intervalles ouverts, ce qui implique, puisque I_{21} et I_{22} sont disjoints (car contigus), que g'' s'annule en au moins deux points de $]a,b[$ (un dans I_{21}, un dans I_{22}).

5. *En déduire qu'il existe $c_x \in]a,b[$ tel que*

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{6}\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\; f^{(3)}(c_x).$$

Si x est l'un des trois points x_0, x_1, x_2, les deux fonctions

$$t \mapsto f(t) - P(t)$$

et

$$t \mapsto \frac{1}{6}\,(t - x_0)\,(t - x_1)\,(t - x_2)$$

s'annulent en x et l'on peut prendre pour c_x n'importe quel point de $]a,b[$ pour obtenir la relation demandée. On peut donc supposer que x est différent de x_0, x_1, x_2, ce qui nous met dans les conditions des questions **3** et **4**. Si g est précisément la fonction construite à la question **3**, on a établi à la question **4** que g était (comme f) de classe C^2 sur $[a,b]$, avec g'' dérivable sur $]a,b[$ et s'annulant en au moins deux points distincts de $]a,b[$, que nous noterons α et β. Le théorème de Rolle est encore applicable (à $g''\ : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ cette fois) et assure que $g^{(3)}$ s'annule en au moins un point de $]\alpha,\beta[$, donc de $]a,b[$. Mais on observe que

$$\forall\, t \in]a,b[,\ g^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - 6\,\alpha$$

(car la dérivée troisième d'une fonction polynomiale de degré 2 est identiquement nulle tandis que la dérivée troisième de $t \to t^3$ vaut la fonction constante partout égale à 6). On peut donc affirmer :

$$\exists c = c_x \in]a,b[, \quad \text{t.q.} \quad \alpha = \frac{f^{(3)}(c_x)}{6}.$$

En reportant l'expression de α donnée en (8), on obtient bien encore la relation :

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{6}\,(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\ f^{(3)}(c_x).$$

exigée.

FIN