

Analyse Harmonique Appliquée 1
Licence de Mathématiques et Ingénierie
Mathématiques

Alain Yger

11 juin 2004

Table des matières

1	La transformation de Fourier continue et discrète	1
1.1	La transformation de Fourier des signaux intégrables ou d'énergie finie	1
1.1.1	Le cas des signaux-fonction intégrables sur l'axe des temps . . .	1
1.1.2	La transformation de Fourier : une transformation physique ; conservation de l'énergie	4
1.1.3	Le principe d'incertitude "quantifié"	6
1.2	La transformation de Fourier discrète et son inversion	6
1.3	L'inversion de la transformation de Fourier	10
1.4	De l'importance de la convolution	12
1.4.1	Systèmes linéaires et filtres (approche heuristique)	12
1.4.2	Transformation de Fourier et convolution	14
1.5	La relation continu/discret	14
1.6	Rappels concernant l'analyse de Fourier des signaux périodiques . . .	16
1.7	Le problème du sous-échantillonnage des signaux analogiques et le théorème de Shannon	20
1.8	La formule sommatoire de Poisson	23
2	Le filtrage	25
2.1	Filtres digitaux ; réalisabilité, causalité, stationnarité	25
2.2	Le <i>design</i> d'un filtre digital stationnaire à partir de sa fonction de transfert	27
2.3	Notion de z -transformée d'un filtre digital	30
2.4	Quelques rappels d'algèbre concernant $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$	32
2.5	Filtres A.R, filtres A.R.M.A	34
2.6	Signaux stationnaires et <i>design</i> de filtres digitaux	35

Chapitre 1

La transformation de Fourier continue et discrète

1.1 La transformation de Fourier des signaux intégrables ou d'énergie finie

1.1.1 Le cas des signaux-fonction intégrables sur l'axe des temps

Étant donné un signal fonction s (à valeurs réelles ou complexes) correspondant à une classe \dot{s} de $L^1(\mathbb{R})$ (ceci signifie que la valeur ponctuelle de s n'a pas de sens, c'est concrètement la mesure à densité $s(t)dt$ qui est correctement définie), on appelle *spectre* du signal s le signal défini (lui pour tout $\omega \in \mathbb{R}$) par

$$\hat{s}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} s(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (1.1)$$

Le spectre de s peut être représenté par un signal continu (au sens mathématique du terme), défini par la formule valable pour toutes les valeurs du réel ω ; c'est le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre de Lebesgue qui assure la continuité de \hat{s} . Pour le mathématicien, la prise de spectre est communément appelée la *transformation de Fourier*.

Il est important de souligner que, si le signal et son spectre sont tous les deux définis sur \mathbb{R} , il s'agit en fait de signaux définis sur deux copies différentes de \mathbb{R} , l'une étant l'*espace des temps*, celui sur lequel est défini presque partout le signal s , l'autre étant l'*espace des fréquences*, espace sur lequel est défini (partout cette fois) le signal \hat{s} ; on peut voir (on le justifiera plus loin) l'espace des temps comme la droite réelle \mathbb{R} , l'espace des fréquences comme son espace dual \mathbb{R}^*).

Le nombre

$$\int_{\mathbb{R}} s(t)e^{-i\omega t} dt$$

représente intuitivement la *corrélation* de s avec le signal (correspondant à un phénomène oscillant périodique)

$$t \rightarrow \exp(i\omega t).$$

On ne peut pas tout-à-fait parler de corrélation ici car ni s ni $t \rightarrow \exp(i\omega t)$ n'appartiennent à l'espace de Hilbert naturel des signaux temporels, c'est à dire l'espace

$L^2(\mathbb{R})$ des signaux d'énergie finie, soit des signaux mesurables tels que

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt < \infty.$$

Cependant, cette notion de corrélation a un sens ici (puisque s est intégrable) et nous semble parlante pour introduire la prise de spectre.

Un peu de vocabulaire

Un signal oscillant élémentaire sur l'axe des temps sera pour nous une fonction

$$t \mapsto ae^{i\varphi} e^{i\omega t},$$

où a est un nombre strictement positif dit aussi *amplitude*, ω un nombre réel appelé *fréquence*, φ un nombre réel dont la classe modulo 2π est la *phase* du signal ; si $\omega \neq 0$, l'inverse du module de ω est la *période* du signal ; le nombre $\omega/(2\pi)$ est aussi appelé en physique *pulsation* du signal.

Si s est un signal intégrable, le spectre du signal $t \rightarrow s(t/a)$, où $a > 0$ est

$$\omega \rightarrow \int_{\mathbb{R}} s(t/a) e^{-i\omega t} dt = a \int_{\mathbb{R}} s(u) e^{-i\omega u} du = a\hat{s}(a\omega)$$

et l'on voit donc que, si $a \rightarrow 0_+$, auquel cas le signal $t \rightarrow s(t/a)$ est une *contraction* du signal originel s , alors son spectre est le signal $\omega \rightarrow a\hat{s}(a\omega)$ qui lui apparaît comme une version *dilatée* du spectre de s . On trouve ici les prémisses d'un principe clef soutendant l'analyse de Fourier, tant comme un avantage que comme un défaut incontournable : plus on localise une information, plus on diffuse son spectre. Ce principe est le *principe d'incertitude* d'Heisenberg et on en donnera une version quantitative plus loin.

Cette remarque soutend d'ailleurs l'idée de dualité mathématique entre l'espace des temps et l'espace de fréquences, dualité que la transformation de Fourier matérialise : en effet, si l'on choisit un vecteur unitaire \vec{e} de la droite réelle \mathbb{R} et que l'on note \vec{e}^* le vecteur de la base duale, alors, si $\vec{v} = \vec{e}/a$, on a $\vec{v}^* = a\vec{e}^*$, un changement d'échelle dans l'espace des temps induisant donc le changement d'échelle inverse (a remplacé $1/a$) dans l'espace \mathbb{R}^* des fréquences. On retrouvera cette remarque de manière plus parlante en dimension supérieure où l'on verra par exemple que la transformation de Fourier transforme un réseau de \mathbb{R}^2 de maille élémentaire contruite à partir d'une base $\{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)\}$ en le réseau construit à partir des deux vecteurs $\{(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)\}$, où

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}^{-1} \right]^t = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}^*.$$

On retrouve ce phénomène en toute dimension (par exemple en cristallographie en dimension 3).

L'effet de la translation dans le temps d'un signal intégrable est la *modulation d'amplitude* : en effet, le spectre de $t \rightarrow s(t - t_0)$ s'obtient (par changement de variable) comme le signal

$$\omega \rightarrow \int_{\mathbb{R}} s(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t_0} \int_{\mathbb{R}} s(u) e^{-i\omega u} du = e^{-i\omega t_0} \hat{s}(\omega),$$

ce qui signifie que le nouveau spectre s'obtient à partir du spectre originel par multiplication (on dit aussi *modulation*) par la fonction périodique

$$\omega \rightarrow e^{-i\omega t_0}$$

de fréquence t_0 , mais cette fois comme signal considéré sur l'espace des fréquences et non plus l'espace des temps.

Le spectre de la Gaussienne $t \rightarrow \exp(-t^2/2)$ est la fonction

$$\omega \rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$$

comme on le voit par exemple en formant l'équation différentielle dont cette fonction se présentant comme une intégrale dépendant d'un paramètre est solution. La fonction gaussienne $t \rightarrow e^{-t^2/2}$ apparaît donc comme un vecteur propre de la transformation de Fourier, correspondant, avec nos conventions de normalisation, à la valeur propre $\sqrt{2\pi}$.

Un espace particulièrement intéressant pour l'étude de l'action de la transformation de Fourier est l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz des fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R} dont les dérivées décroissent à l'infini plus rapidement que toute fonction du type $|t|^{-k}$ avec $k \in \mathbb{N}$; une fonction s de classe C^∞ sur \mathbb{R} est dans cet espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C(k, m) > 0$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left| \frac{d^m}{dt^m} [s](t) \right| \leq \frac{C(m, k)}{(1 + |t|)^k}.$$

Cet espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ contient les gaussiennes

$$t \rightarrow \exp(-a(t - b)^2), \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R},$$

les gaussiennes "modulées"

$$t \rightarrow \exp(-a(t - b)^2 + i\omega t), \quad a > 0, \quad b, \omega \in \mathbb{R},$$

les signaux dits *chirps gaussiens* du type

$$t \rightarrow \exp(-a(t - b)^2 + iP(t)), \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad P \in \mathbb{R}[X], \quad \deg P \leq 2.$$

On y trouve aussi les fonctions du type $t \rightarrow e^{-t^2/2} Q(t)$, où $Q \in \mathbb{C}[X]$ et, parmi elles, la suite de fonctions

$$\phi_n : t \rightarrow e^{-t^2/2} H_n(t),$$

où H_n désigne le polynôme de Hermite de degré n convenablement normalisé, à savoir

$$H_n(X) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{2^n \times n!}} (-1)^n e^{X^2} \left(\frac{d}{dX} \right)^n [e^{-X^2}].$$

On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'une topologie (d'ailleurs d'espace métrique) en décidant (c'est ce qui sera important pour nous du point de vue pratique) qu'une suite $(\varphi_n)_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si, pour tout $k, m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{(1 + |t|)^k} \left| \frac{\partial^m}{\partial t^m} [\varphi_n - \varphi] \right| \right)$$

tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Les formules d'intégration par parties montrent que, lorsque s est dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, le spectre de la dérivée m -ème de s est

$$\widehat{s^{(m)}}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} s^{(m)}(t) e^{-i\omega t} dt = (i\omega)^m \widehat{s}(\omega)$$

tandis que la dérivée m -ième du spectre de s est égale, en appliquant le théorème de dérivation de Lebesgue, à la fonction

$$\left(\frac{d}{d\omega}\right)^m [\hat{s}](\omega) = \int_{\mathbb{R}} [(-it)^m s(t)] e^{-i\omega t} dt,$$

c'est-à-dire correspond au spectre du signal $t \rightarrow (-it)^m s(t)$.

On voit d'ailleurs ainsi que la transformation de Fourier définit une action continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Les remarques ci-dessus permettent d'ailleurs de vérifier (on l'admettra car on ne l'utilisera pas) que chaque fonction ϕ_n , $n = 0, 1, \dots$ est un vecteur propre de la transformation de Fourier, correspondant à la valeur propre $\lambda_n = e^{-in\pi/2} \sqrt{2\pi}$. Ceci s'avère d'autant plus intéressant que les fonctions ϕ_n , $n \in \mathbb{N}$, forment un système orthonormé dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des signaux d'énergie finie sur \mathbb{R} (espace contenant l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ comme sous-espace dense et que l'on retrouvera à la sous-section suivante). Les fonction $(\phi_n)_n$ engendrant un sous-espace dense de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ définissent donc une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

1.1.2 La transformation de Fourier : une transformation physique ; conservation de l'énergie

La transformation de Fourier s'étend au cadre multi-dimensionnel ; en dimension 2 par exemple, le spectre d'une image intégrable dans le plan des images,

$$(x, y) \rightarrow I(x, y)$$

(il vaudrait mieux dire une *densité d'image* $I(x, y) dx dy$) est l'image définie cette fois sur une copie duale de \mathbb{R}^2 (dit *plan des fréquences*) par

$$\hat{I}(\omega_1, \omega_2) := \iint_{\mathbb{R}^2} I(x, y) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy;$$

c'est une image continue (au sens mathématique du terme) en vertu du théorème de continuité de Lebesgue.

C'est la *diffraction de Fraunhofer* qui réalise de manière optique la transformation de Fourier. Supposons qu'une onde sphérique monochromatique (λ),

$$(t, x, y, z) \mapsto a \exp\left(-i\omega t - ik \frac{x^2 + y^2}{2d}\right)$$

(avec un nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$), convergeant à la distance d du plan diffractant $\pi = xOy = \{z = 0\}$ (voir la figure 1.1), éclaire un objet qui se trouve dans le plan diffractant π et dont la transmittance en amplitude réalise une distribution d'image $(x, y) \mapsto I(x, y)$; alors (sous réserve que l'on puisse se placer dans le contexte où est valide la règle d'approximation dite "des petits angles"), l'amplitude diffractée dans le plan de convergence $\xi U \eta$ vaut

$$a_{\text{diff}}(\xi, \eta) = \frac{ka}{2\pi id} \exp\left(ikd - i\omega t + ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{2d}\right) \hat{I}(\xi k/d, \eta k/d). \quad (1.2)$$

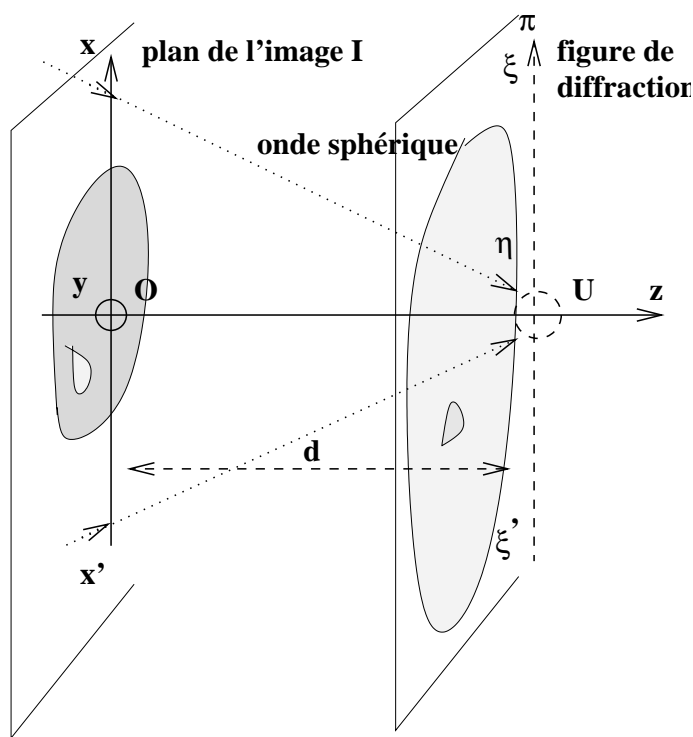


FIG. 1.1 – Réalisation de la FFT optique

Cette formule montre donc que le mécanisme de diffraction de Fraunhofer réalise optiquement la prise de spectre d'une image (à savoir ici l'image I dont le spectre comme sur la formule (1.2) à partir de l'amplitude lumineuse diffractée a_{diff}).

Comme toute transformation physique (ici réalisée optiquement), la transformation de Fourier obéit à la loi de conservation d'énergie; on peut d'ailleurs retrouver ce résultat en se souvenant que les fonctions ϕ_n , $n = 0, 1, \dots$, forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ et que ϕ_n est un vecteur propre de la transformation de Fourier, avec une valeur propre de module $\sqrt{2\pi}$. On a alors, pour tout $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la formule de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega, \quad (1.3)$$

formule qui se polarise en la formule de Parseval :

$$\int_{\mathbb{R}} s_1(t) \overline{s_2(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}_1(\omega) \overline{\widehat{s}_2(\omega)} d\omega \quad (1.4)$$

valable pour deux signaux s_1 et s_2 de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Le fait que la transformation de Fourier réalise une isométrie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (avec comme norme la racine carrée de l'énergie) permet d'étendre la prise de spectre à l'espace des fonctions d'énergie finie sur \mathbb{R} , le spectre de $s \in L^2(\mathbb{R})$ étant l'élément de $L^2(\mathbb{R})$ défini comme la limite, dans $L^2(\mathbb{R})$, de la suite de fonctions

$$D_{T_n}[s] : \omega \rightarrow \int_{-T_n}^{T_n} s(t) e^{-i\omega t} dt,$$

la suite $(T_n)_{n \geq 0}$ étant une suite strictement croissante arbitraire de nombres strictement positifs tendant vers $+\infty$. On a toujours, pour $s \in L^2(\mathbb{R})$ (resp. $s_1, s_2 \in L^2(\mathbb{R})$) la formule de Plancherel (resp. la formule de Parseval).

1.1.3 Le principe d'incertitude "quantifié"

Soit s un signal de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, normalisé de manière à avoir pour énergie 1, et que pour simplifier on suppose réel. Par intégration par parties, on a :

$$\int_{\mathbf{R}} ts(t)s'(t)dt = [ts^2(t)/2]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} s^2(t)dt = -1/2.$$

Le recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure

$$\int_{\mathbf{R}} t^2 s^2(t)dt \times \int_{\mathbf{R}} (s'(t))^2 dt \geq \frac{1}{4}$$

(avec égalité si et seulement si les fonctions $t \rightarrow s'(t)$ et $t \rightarrow ts(t)$ sont proportionnelles). La formule de Plancherel, plus le fait que le spectre de s' est la fonction $\omega \rightarrow i\omega\hat{s}(\omega)$, nous donne donc la contrainte :

$$\sqrt{\int_{\mathbf{R}} t^2 (s(t))^2 dt} \times \sqrt{\int_{\mathbf{R}} t^2 (\hat{s}(\omega))^2 d\omega} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ce qui peut s'interpréter en disant que le produit des moments d'inertie des répartition d'énergie de s et de son spectre est bornée inférieurement par la constante absolue $\pi/2$. Si le moment d'inertie de la répartition d'énergie de s est petit (concrètement, si s est bien localisée en termes de répartition d'énergie), alors le moment d'inertie de la répartition d'énergie du spectre de s est grand (concrètement, \hat{s} est mal localisé en termes de répartition d'énergie), et *vice versa*.

C'est là la matérialisation quantifiée du principe d'incertitude mentionné au paragraphe 1. Le meilleur compromis est d'ailleurs réalisé précisément lorsque l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité, soit lorsque s est solution de l'équation différentielle $s' = \lambda ts$, soit quand s est une gaussienne. Voilà pourquoi les gaussiennes sont le modèle naturel pour les particules en mécanique quantique : elle réalisent le compromis optimal relativement à l'incontournable principe d'incertitude d'Heisenberg.

1.2 La transformation de Fourier discrète et son inversion

Un signal digital (au sens de l'analyse) de longueur $N \in \mathbf{N}^*$ est par définition un vecteur $(s(1), \dots, s(N))$ (pour nous un vecteur ligne) de nombres complexes ; ce peut-être le résultat de la discrétisation d'un signal analogique, mais ceci n'est pas toujours le cas. On peut extraire des signaux digitaux depuis des signaux analogiques (pour donner un exemple, la mesure d'un pic au suivant dans par exemple un électrocardiogramme – qui lui est un signal analogique – est un exemple de signal digital).

Sur la figure 1.2, nous avons affiché deux signaux digitaux qui nous serviront de signaux-test dans ce cours : le premier est un signal d'école dont nous verrons plus loin comment l'analyse de Fourier permet d'analyser le contenu, le second est un signal audio correspondant à l'enregistrement par un locuteur d'une séquence de phonèmes (en l'occurrence ici PI-ER-RE).

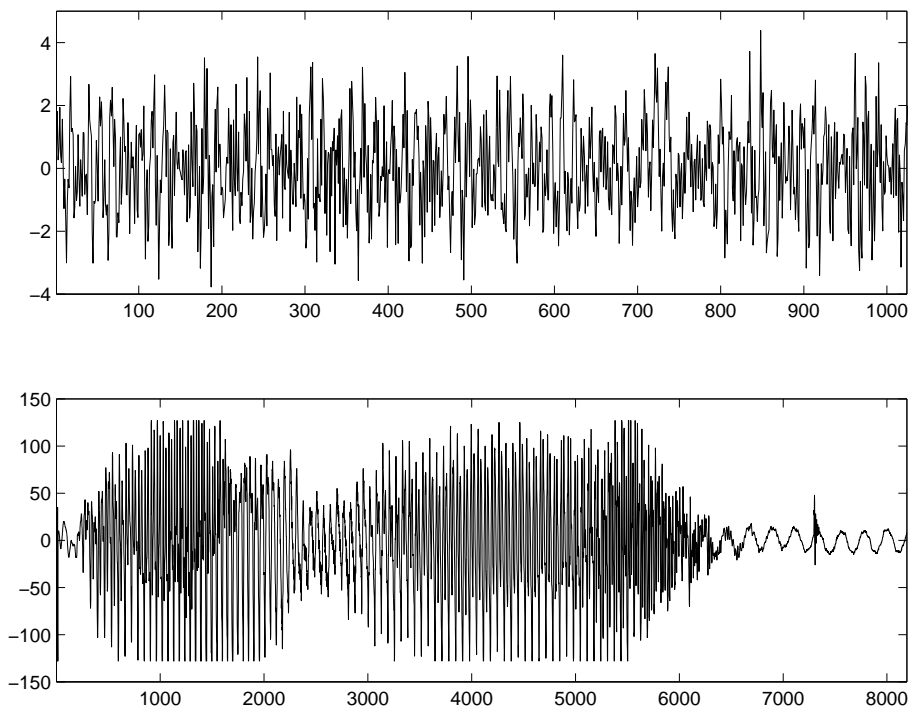


FIG. 1.2 – Deux exemples de signaux digitaux

Une image digitale (toujours au sens de l'analyse) de taille (N_1, N_2) avec $N_1, N_2 \in \mathbf{N}^*$, est par définition la donnée d'une matrice

$$[I(k_1, k_2)]_{\substack{1 \leq k_1 \leq N_1 \\ 1 \leq k_2 \leq N_2}}$$

(k_1 indice de ligne, k_2 indice de colonne, pour suivre la syntaxe d'un logiciel de calcul scientifique tel **MATLAB** ou **SciLab**).

Dans une image digitale, le nombre $I(k_1, k_2)$ peut représenter une quantité scalaire (entière, rationnelle, réelle ou complexe) ou alors (comme c'est le cas le plus souvent) un code de couleurs. Dans le cas où $I(k_1, k_2)$ représente une quantité scalaire (par exemple un nombre réel), on peut visualiser l'image I par un graphique en trois dimensions. On peut aussi transcrire ce graphique en un code de couleurs; voici par exemple (figure 1.3) une image digitale 256×256 codée en gris et qui nous servira d'image test dans ce cours.

Si N est fixé, soit $W_N := \exp(-2i\pi/N)$; si N_1 et N_2 sont fixés, on considère de même $W_{N_1} := \exp(-2i\pi/N_1)$ et $W_{N_2} := \exp(-2i\pi/N_2)$.

La transformation de Fourier (monodimensionnelle) discrète d'ordre N (dite aussi DFT_N pour "*Discrete Fourier Transform*" d'ordre N) transforme le signal de longueur N qu'est $s = (s(1), \dots, s(N))$ en le signal digital (aussi de longueur N) \hat{s} défini par

$$\hat{s}(k+1) = \sum_{l=0}^{N-1} s(l+1)W_N^{kl}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

On note cet opérateur (de \mathbf{C}^N dans \mathbf{C}^N) DFT_N .

La transformation de Fourier (bidimensionnelle) discrète d'ordre (N_1, N_2) (dite aussi DFT_{2N_1, N_2} pour "*Discrete Fourier Transform 2-dimensional*" de bi-ordre (N_1, N_2))



FIG. 1.3 – Une image digitale codée dans une gamme de gris

transforme l'image digitale de taille (N_1, N_2)

$$I := \left[I(k_1, k_2) \right]_{\substack{1 \leq k_1 \leq N_1 \\ 1 \leq k_2 \leq N_2}}$$

en l'image digitale (aussi de taille (N_1, N_2)) \hat{I} définie par

$$\hat{I}(k_1 + 1, k_2 + 1) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} I(l_1 + 1, l_2 + 1) W_{N_1}^{k_1 l_1} W_{N_2}^{k_2 l_2}$$

$$k_1 = 0, \dots, N_1 - 1, \quad k_2 = 0, \dots, N_2 - 1;$$

cette transformation bidimensionnelle s'opère en deux temps via une transformation monodimensionnelle d'ordre N_1 appliquée sur les colonnes de la matrice I , puis ensuite une seconde transformation monodimensionnelle d'ordre N_2 , cette fois sur les lignes de la matrice transformée.

Comme la matrice

$$\mathcal{W}_N = \left[W_N^{(k-1)(l-1)} \right]_{1 \leq k, l \leq N}$$

vérifie

$$\mathcal{W}_N \bullet \overline{\mathcal{W}_N} = N \mathbf{I}_N,$$

où \mathbf{I}_N est la matrice identité d'ordre N , on a les formules d'inversion à la fois pour les transformées mono ou bi-dimensionnelles.

- dans le cas monodimensionnel, on récupère s en appliquant à \hat{s} la transformation de Fourier discrète inverse d'ordre N (IDFT $_N$ pour "Inverse Discrete

Fourier Transform” d’ordre N) qui transforme le signal digital \hat{s} de taille N en le signal s (aussi de taille N) donné par

$$s(k+1) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{s}(l+1) \overline{W_N^{kl}}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

- dans le cas bidimensionnel, on récupère I en appliquant à \hat{I} la transformation de Fourier discrète inverse de bi-ordre (N_1, N_2) (IDFT2 $_{N_1, N_2}$ pour “Inverse Discrete Fourier Transform 2-dimensional” de bi-ordre (N_1, N_2)) qui transforme l’image digitale \hat{I} de taille (N_1, N_2) en l’image digitale I (aussi de taille (N_1, N_2)) donnée par

$$I(k_1+1, k_2+1) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \hat{I}(l_1+1, l_2+1) \overline{W_{N_1}^{k_1 l_1}} \overline{W_{N_2}^{k_2 l_2}}$$

$$k_1 = 0, \dots, N_1-1, \quad k_2 = 0, \dots, N_2-1.$$

Ces transformations discrètes s’étendent, au delà du traitement des signaux ou des images digitales, au cas de la dimension quelconque.

Le fait que l’inverse de la matrice $[W_N^{(k-1)(l-1)}]_{1 \leq k, l \leq N-1}$ soit $1/N$ fois sa conjuguée implique que l’opérateur $(1/\sqrt{N}) \text{DFT}_N$ est un opérateur unitaire ; en fait, on remarque que, pour $k = 0, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} s(l+1) W_N^{-kl} &= \sum_{l=0}^{N-1} s(l+1) W_N^{k(N-l)} \\ &= s(1) + \sum_{l'=1}^{N-1} s(N-l'+1) W_N^{kl'}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{\text{DFT}_N}{\sqrt{N}} \circ \frac{\text{DFT}_N}{\sqrt{N}} \bullet \begin{pmatrix} s(1) \\ s(2) \\ \vdots \\ s(N-1) \\ s(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(1) \\ s(N) \\ \vdots \\ s(3) \\ s(2) \end{pmatrix},$$

d’où il résulte que

$$\frac{\text{DFT}_N}{\sqrt{N}} \circ \frac{\text{DFT}_N}{\sqrt{N}} \circ \frac{\text{DFT}_N}{\sqrt{N}} \circ \frac{\text{DFT}_N}{\sqrt{N}} = \text{Id}$$

et donc que les quatre valeurs propres de la transformation de Fourier discrète d’ordre N sont les quatre racines de N^2 , soient \sqrt{N} , $-\sqrt{N}$, $i\sqrt{N}$, $-i\sqrt{N}$.

C’est en 1966, avec l’algorithme de Cooley-Tuckey, que l’on sut implémenter le calcul rapide de transformation de Fourier discrète lorsque $N = 2^k$ de manière (en enchaînant les calculs pour $N = 2$, où la matrice \mathcal{W}_N est la matrice dite “*matrice papillon*” $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$) de manière à réaliser la transformation de Fourier au prix de $N \times k$ multiplications au lieu des N^2 multiplications que demande en principe l’opération de multiplication par une matrice $N \times N$.

L'algorithme de Cooley-Tuckey initia ce qui allait devenir la *révolution numérique*. Un bon exemple par exemple est de penser que les idées théoriques et géométriques élaborées par exemple par J. Radon dès 1917 pour inverser la transformation aux rayons X (sans que l'on dispose à l'époque de l'outil informatique, ce qui rendait numériquement irréalisable ces outils basés sur le passage obligé *via* la prise de spectre) allaient, dans la décennie des années 1970-1980, trouver toute leur efficacité au service de l'imagerie médicale et du CaT-Scanner (comme le confirme le prix Nobel de Médecine attribué en 1979 à Cormack et Hounsfield).

1.3 L'inversion de la transformation de Fourier

Le spectre d'un signal intégrable est, on l'a vu, une fonction continue. On peut même affirmer que c'est une fonction tendant vers 0 à l'infini : en effet, ceci est vrai lorsque le signal est dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et tout élément de $L^1(\mathbb{R})$ s'approche, en norme L^1 , par une suite d'éléments de cet espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Le spectre d'un signal intégrable n'est par contre pas intégrable en général : par exemple, le spectre de la fonction caractéristique de $[-T/2, T/2]$ est le signal

$$\omega \rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = 2 \frac{\sin \frac{T\omega}{2}}{\omega}.$$

Par contre, si s est un signal intégrable sur \mathbb{R} , dont le spectre est aussi intégrable sur \mathbb{R} , alors on a la formule d'inversion suivante (suggérée par la transformation de Fourier discrète) :

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{presque partout.} \quad (1.5)$$

Dans le cas 2-dimensionnel, si I est une image intégrable et de spectre intégrable

$$I(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \widehat{I}(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2,$$

et ainsi de suite en dimension supérieure.

On admettra ici cette formule (voir le cours d'Analyse de Fourier et d'Espaces de Hilbert). Notons cependant que, une fois que l'on sait que la collection $\{\phi_n; n = 0, 1, \dots\}$ est une suite de fonctions propres (avec valeurs propres correspondantes $\sqrt{2\pi} e^{-in\pi/2}$, $n = 0, 1, \dots$), cette formule d'inversion devient (au moins formellement) évidente. Cette formule, base de la théorie initiée par Joseph Fourier au début du XIX-ème siècle, soutend la possibilité de décomposer tout phénomène physique intégrable comme un empilement de phénomènes oscillants. Notons ici un paradoxe tout de même : aucun composant n'est intégrable (un signal périodique ne saurait l'être !) tandis que la somme l'est, ce qui signifie que se produisent des phénomènes de compensation subtils et diffus dans le temps !

La formule d'inversion passe au cadre L^2 , plus naturel du point de vue de la physique : si $s \in L^2(\mathbb{R})$ est un signal d'énergie finie et de spectre \widehat{s} , on peut reconstituer s à partir de son spectre *via* la formule d'inversion suivante :

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\Omega_n}^{\Omega_n} \widehat{s}(\omega) e^{i\omega(\cdot)} d\omega, \quad (1.6)$$

$(\Omega_n)_n$ étant une suite arbitraire strictement croissante de nombres strictement positifs tendant vers $+\infty$.

Calculer le spectre d'un signal d'énergie finie, c'est donc tenter de le confronter au dictionnaire des signaux oscillants élémentaires $t \rightarrow e^{i\omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$ (de tels signaux sont aussi dits *harmoniques*) et de le reconstituer comme un empilement d'atomes de ce dictionnaire. Il est par conséquent intuitivement évident que si le signal ne se présente pas de manière naturelle exprimé comme somme de composants appartenant au dictionnaire, l'écriture de la décomposition sera difficile à gérer. Tel est le cas par exemple si s est un signal comme sur la figure 1.4, faisant apparaître deux fréquences consécutives.

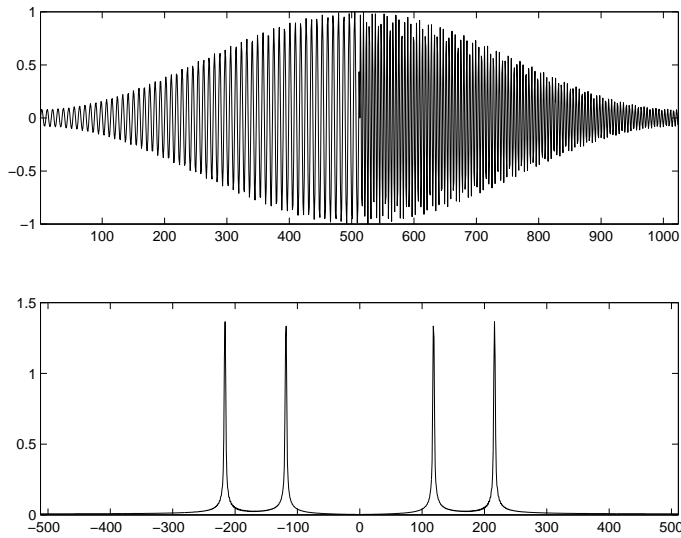


FIG. 1.4 – spectre d'un signal présentant deux fréquences consécutives

Au contraire de ce signal, le signal présentant une seule de ces deux fréquences a un spectre bien mieux localisé, comme le montre la figure 1.5 :

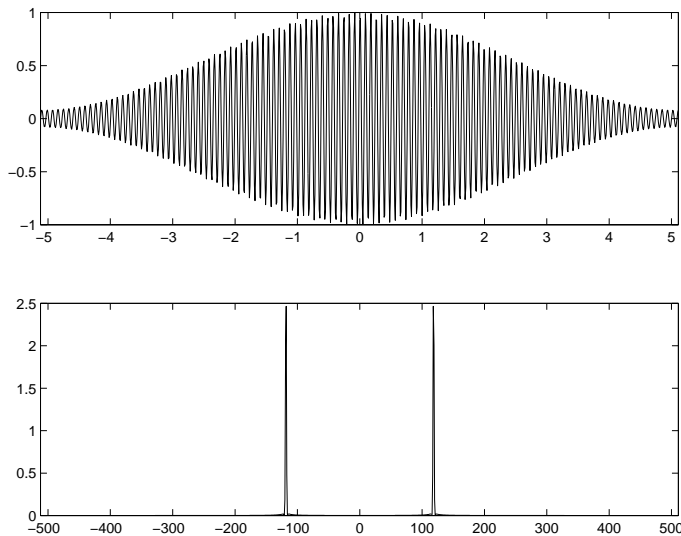


FIG. 1.5 – spectre d'un signal présentant une seule fréquence

En fait, l'analyse de Fourier traduit une analyse *statistique* du contenu fréquentiel ; pour avoir une complète analyse de l'information (et voir de manière concrète comment ce contenu fréquentiel évolue au cours du temps), on sait depuis bien avant Fourier qu'il est nécessaire de coder l'information avec deux paramètres, que sont le temps d'une part, la fréquence de l'autre, ce que l'on représente graphiquement dans le plan temps-fréquences $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Ce codage est par exemple celui de l'écriture musicale.

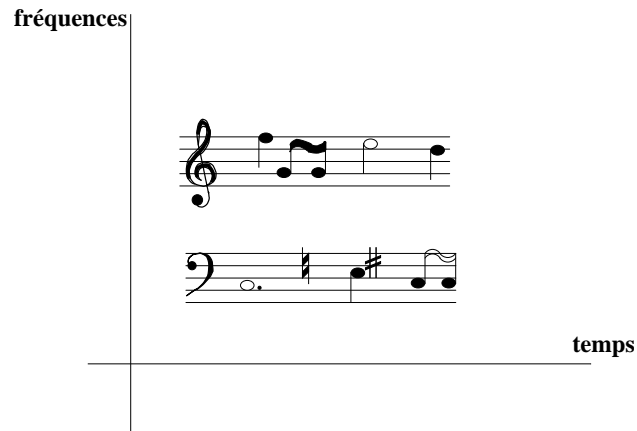


FIG. 1.6 – Le codage temps-fréquences

1.4 De l'importance de la convolution

1.4.1 Systèmes linéaires et filtres (approche heuristique)

Un *système* est un ensemble de mécanismes physiques couplés entre eux aux fins de réaliser un objectif. Un système opère sur une famille de données d'entrée (“*input data*”) pour les transformer en un système de données de sortie (“*output data*”).

Exemple 1.1

1. Par exemple, le système acoustique constitué de la glotte d'un individu, de ses cordes vocales, de l'orgue acoustique que constitue la cavité buccale, et enfin du micro-enregistreur posé en face de lui, constitue un système : les données d'entrée sont ici les chaînes d'impulsions glottales, les données de sortie sont les signaux enregistrés (dans un système d'unités donné) sur la piste de la bande magnétique.

2. Un autre exemple (qui constituera, on le verra plus tard, un modèle de système élémentaire) est fourni par la cellule électrique de la figure 1.7 ci dessous. Selon la loi d'Ohm, si u_{AB} et u_{CD} désignent respectivement les différences de potentiel $u_A - u_B$ et $u_C - u_D$, A, B, C, D, désignant les quatre sommets de la cellule et si le condensateur c est supposé non chargé à l'instant $t = 0$, on a, pour tout $t > 0$,

$$U_{AB}(t) = RI(t) + \frac{1}{c} \int_0^t I(\xi) d\xi = RI(t) + U_{CD}(t) = RcU'_{CD}(t) + U_{CD}(t),$$

où R et c désignent respectivement la résistance et la capacité du condensateur, et I l'intensité (comptée algébriquement) du courant circulant dans la cellule de E vers F .

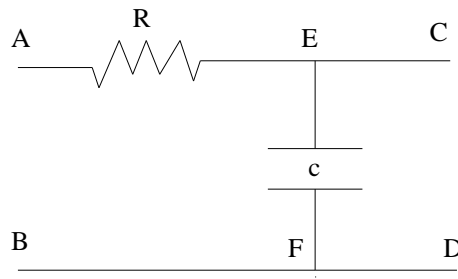


FIG. 1.7 – Cellule RC du premier ordre

De la même manière que nous avons classifié les signaux en signaux continus (ou analogiques) et signaux discrets (ou digitaux), on peut classifer les systèmes en *systèmes continus* et *systèmes discrets*. Les premiers agissent sur des entrées supposées délivrer une information à chaque instant t du laps de temps auquel on se restreint ou à chaque position (x, y) du domaine des images étudiées; le système y répond alors par une sortie délivrant un paramètre physique (mesuré dans un système d'unités adéquat) à chaque instant t du même intervalle ou à chaque point du domaine où elle est définie. Les seconds transforment une suite $(e(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ en une suite $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ (ou un tableau d'entrées $(e(n_1, n_2))$ en un tableau de sorties $(s(n_1, n_2))$).

Les systèmes que nous étudierons seront des systèmes (qu'ils soient continus ou discrets) ayant deux propriétés majeures, *linéarité* et *invariance par translation*; la propriété d'invariance par translation traduit le fait que les paramètres du système sont considérés comme immuables dans le temps (ou dans l'espace s'il s'agit d'un appareil traitant les images). On impose de plus à l'appareil des propriétés de continuité que nous préciserons (dépendant des espaces fonctionnels où l'on prend respectivement les entrées et les sorties). Un tel appareil est appelé *boîte noire* ou *filtre*.

Plaçons nous dans le cadre discret en dimension 1 : si l'on fait entrer dans un tel appareil l'impulsion à l'origine, c'est-à-dire la suite $(\delta_0^n)_n$ avec $\delta_0^n = 1$ si $n = 0$ et $\delta_0^n = 0$ si $n \neq 0$, il y répond donc par une suite $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ que l'on appelle *réponse impulsionnelle* de l'appareil. Du fait de l'invariance par translation, l'appareil répond à l'entrée (δ_k^n) (décalée dans le temps de k unités par rapport à l'impulsion $(\delta_0^n)_{n \in \mathbb{Z}}$) par la sortie de terme général $(h(n - k))_{n \in \mathbb{Z}}$ (la réponse impulsionnelle, mais décalée du même laps de temps) et l'on voit donc que si $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un signal d'entrée dont tous les coefficients sauf un nombre fini sont nuls, le signal par lequel l'appareil répond est le signal de sortie $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, où

$$s_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k h(n - k).$$

L'opération qui à $(e_n)_n$ associe $(s_n)_n$ est l'opération de *convolution discrète* et on la note

$$(s_n)_n = (e_n)_n * (h_n)_n.$$

Dans le cas continu, l'opération de convolution par un signal temporel h est formellement l'opération qui à un signal temporel s associe le signal

$$S : t \rightarrow \int_{\mathbb{R}} s(u)h(t - u)du.$$

Si $h \in L^1(\mathbb{R})$, l'opération $s \rightarrow S$ est une opération continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans lui-même ; si $h \in L^2(\mathbb{R})$, c'est une opération continue de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

1.4.2 Transformation de Fourier et convolution

Si s_1 et s_2 sont deux signaux intégrables, la convolution de s_1 et s_2 a pour spectre le produit des spectres de s_1 et s_2 . Cette conséquence du théorème de Fubini est fondamentale et justifie le rôle opérationnel de la transformation de Fourier, qui échange donc une opération de maniement difficile (la convolution) et une opération de maniement simple (la multiplication).

Un cas important de convolution est celle correspondant au fait que l'on tronque le spectre au delà d'un certain seuil de fréquence Ω . Si s est un signal de $L^2(\mathbb{R})$, le signal ayant pour spectre $\hat{s} \times \chi_{[-\Omega, \Omega]}$ est le signal

$$t \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} s(u) \frac{\sin \Omega(t-u)}{t-u} du$$

qui correspond à la convolution de deux signaux d'énergie finie, donc à un élément de $L^\infty(\mathbb{R})$. Couper le spectre de s revient donc à convoluer s avec un noyau D_Ω qui n'est pas sans nous rappeler le *noyau de Dirichlet* que nous retrouverons lorsque nous rappellerons la théorie des signaux périodiques (section 1.7).

1.5 La relation continu/discret

Si s est un signal continu (ou tout au moins intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle $[-T, T]$ de \mathbb{R}), le calcul numérique du spectre de T n'est envisageable que si le signal est tronqué (disons par exemple entre $[-T, T]$).

Le calcul approché de $\hat{s}(\omega)$ en un point $\omega \in \mathbb{R}$ se fait par le biais du calcul des sommes de Riemann. On se donne la suite des échantillons de t , disons une suite $(\tilde{s}(0), \dots, \tilde{s}(N-1))$, $\tilde{s}(l)$ correspondant à la moyenne de s dans l'intervalle $[-T + 2lT/N, -T + 2(l+1)T/N]$. Une valeur approchée de $\hat{s}(\omega)$ pour $\omega \in \mathbb{R}$ est alors :

$$\hat{s}(\omega) \simeq \frac{2T}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{s}(l) e^{-i\omega(-T+2lT/N)}.$$

L'évaluation de cette expression en $\omega = k\pi/T$, $k = 0, \dots, N-1$, donne, si $N = 2M$,

$$\begin{aligned} \hat{s}(k\pi/T) &\simeq \frac{2T}{N} e^{ik\pi} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{s}(l) e^{-2kli\pi/N} \\ &= \frac{2T}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{s}(l) e^{-2i(l-N/2)k\pi/N} \\ &= \frac{T}{M} W_{2M}^{kM} \sum_{l=0}^{2M-1} \tilde{s}(l) W_{2M}^{kl}, \quad k = 0, \dots, 2M-1, \end{aligned}$$

ce qui correspond donc au calcul d'une transformée de Fourier discrète, avec de plus modification de signe ; le programme réalisant cette variante de la transformation de Fourier discrète est donc

```

>function u=fftt(s);
    N=size(s);
    k=0:N-1;
    w=cos(k*pi);
    u=w.*fft(s);

```

Remarquons maintenant que le signal

$$\omega \mapsto \frac{T}{M} e^{i\omega T} \left(\sum_{l=0}^{2M-1} \tilde{s}(l) e^{-i\omega l T/M} \right)$$

est un signal périodique de période $2M\pi/T$, qu'il suffit de connaître sur l'intervalle $[0, 2M\pi/T]$ (ce qui est le cas, au moins du point de vue numérique lorsque l'on connaît les valeurs aux points $0, \pi/T, \dots, (2M-1)\pi/T$ lorsque T est grand) pour le connaître partout. Si $s_{T,M}$ est le signal discret de longueur $2M$ donné comme $(\tilde{s}(0), \dots, \tilde{s}(2M-1))$, le signal obtenu via l'algorithme (répertorié sous l'étiquette **spectre**)

```

>>shat=fftt(s);
>>shat1=shat(1:M);
>>shat2=shat(M+1:2M);
>>shat=[shat2,shat1];

```

représente une approximation du spectre de $s\chi_{[-T,T]}$ sur l'intervalle $[-\pi/\tau, \pi/\tau]$, où $\tau = T/M$ est le pas d'échantillonnage du signal s , par la méthode des rectangles.

Remarquons que si le pas d'échantillonnage du signal temporel est $2T/N = T/M$, les valeurs du spectre sont connues entre $-M\pi/T$ et $(M-1)\pi/T$ avec un pas cette fois de π/T ; plus T augmente, plus la résolution au niveau de l'espace des fréquences est meilleure. Par contre, une meilleure résolution temporelle (N grand) ne fait qu'augmenter le champ où l'on dispose des valeurs du spectre (mais n'a aucun effet sur le pas auquel est échantillonné le spectre).

On retrouve là (sous un angle numérique) le principe d'incertitude d'Heisenberg : *plus s est localisé, plus le spectre est diffus*. Le fait que la matrice de la DFT $_N$ soit une matrice carrée nous oblige à ne pouvoir récupérer que N valeurs du spectre à partir de N échantillons du signal. Plus grand sera l'intervalle où le signal est connu dans l'espace des temps, meilleure sera la résolution fréquentielle du spectre (le pas auquel celui-ci est échantillonné est d'autant plus petit que T est grand).

On verra aussi plus loin que la suite de nombres $\hat{s}(k\pi/T)$, $k = -M, \dots, M-1$, que l'on calcule à partir d'un échantillonnage de s au pas $T/N = 2T/2M$ sur $[-T, T]$ peut aussi s'interpréter comme la suite $(2T\tilde{c}_k(f_T))_{k=-M, \dots, M-1}$, où les $\tilde{c}_k(f_T)$ sont les valeurs approchées des coefficients de Fourier (voir la section suivante) de la fonction $2T$ -périodique obtenue en périodisant le motif que constitue le graphe de s sur $[-T, T]$. Le calcul numérique de spectre *via* la DFT nous ramène donc vers l'analyse de Fourier dans le cadre des fonctions périodiques (et non plus intégrables ou d'énergie finie), théorie dont nous allons rappeler ici les principaux éléments.

1.6 Rappels concernant l'analyse de Fourier des signaux périodiques

Si s est un signal T -périodique et d'énergie finie sur un intervalle de longueur sa période, ce qui signifie que s vérifie

$$\int_0^T |s(t)|^2 dt < \infty,$$

on peut associer à s son *spectre* (en tant que signal T périodique) ; ce spectre est par définition la collection des nombres complexes

$$c_{T,n}[s] := \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-2i\frac{n\pi}{T}t} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

indexée par \mathbb{Z} , dits *coefficients de Fourier complexes* de s . Le signal s se reconstitue à partir de son spectre suivant la formule qu'un ingénieur écrira formellement

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{T,n}[s] e^{2i\pi n t/T},$$

mais que le mathématicien se doit de lire

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |s(t) - \sum_{-A_N}^{B_N} c_{T,n}[s] e^{2i\pi n t/T}|^2 dt = 0$$

lorsque $(A_N)_N$ et $(B_N)_N$ sont deux suites arbitraires strictement croissantes d'entiers positifs tendant vers $+\infty$.

La formule de Plancherel (qui se polarise en formule de Parseval) traduit une fois encore dans ce nouveau contexte le principe de conservation d'énergie :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_{T,n}[s]|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt$$

et, si s_1 et s_2 sont deux signaux T -périodiques et d'énergie finie sur $[0, T]$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{T,n}[s_1] \overline{c_{T,n}[s_2]} = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) \overline{s_2(t)} dt$$

(formule de Parseval).

Pour simplifier, on normalisera les choses en prenant $T = 2\pi$.

Puisque la connaissance de tout le spectre est illusoire (\mathbb{Z} étant infini), tronquer le spectre d'un signal 2π -périodique en éliminant les harmoniques $t \rightarrow e^{int}$ pour $|n| > N$ est une opération cruciale. On peut la faire "brutalement" en décidant de remplacer le signal s par sa N -ème *somme de Fourier*

$$S_N[s] : t \rightarrow \sum_{-N}^N c_n[s] e^{int} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})(t-u)}{\sin \frac{t-u}{2}} s(u) du,$$

ou on peut le faire "en douceur" en décidant de remplacer le signal s par sa N -ème *somme de Féjer*

$$T_N[s] : t \rightarrow \sum_{-N}^N c_n[s] \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{int} = \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{N(t-u)}{2}}{\sin \frac{t-u}{2}}\right)^2 s(u) du.$$

Si s a pour représentant une fonction 2π -périodique de classe C^1 par morceaux, alors on sait d'après le théorème de Dirichlet que, pour tout instant t_0 ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N[s](t_0) = \frac{1}{2}(s(t_0^-) + s(t_0^+));$$

si s a pour représentant une fonction 2π -périodique réglée, on a toujours, pour tout instant t_0 ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N[s](t_0) = \frac{1}{2}(s(t_0^-) + s(t_0^+))$$

(que le représentant soit C^1 par morceaux ou non).

Tentons l'opération à partir d'un signal très simple, de période 2π , valant 1 sur $[\pi/2, 3\pi/2]$ et 0 sur $[0, \pi/2[\cup]3\pi/2, 2\pi[$ (c'est un signal "créneau"). On calcule le spectre de ce signal (disons par exemple que l'on calcule les coefficients de Fourier entre -1024 et 1023), puis on ne retient que les coefficients de Fourier d'indice entre -512 et 511 , avant de reconstituer la somme partielle $S_{512}[s]$; sur la figure 1.8, on a représenté le graphe de s et le graphe de $S_{512}[s]$ au voisinage de la discontinuité $t_0 = \pi/2$.

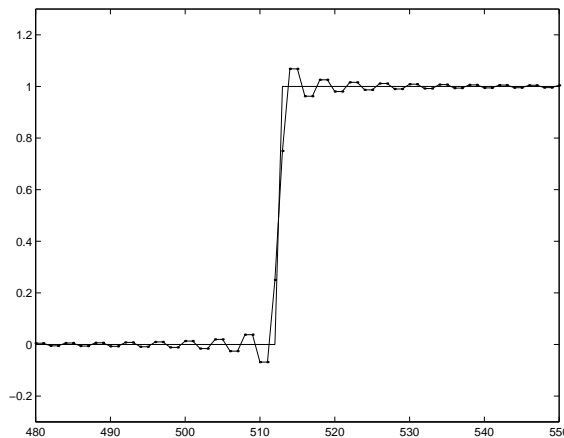


FIG. 1.8 – Phénomène de Gibbs

On constate un phénomène d'affaiblissement (resp. de rehaussement) du signal avant (resp. après) la singularité. Si l'on coupe le spectre de plus en plus loin, ce phénomène dit d'*aliasing* ne s'estompe pas et vient entacher la restitution du signal : c'est le *phénomène de Gibbs*, inhérent au fait que la fonction

$$t \rightarrow D_N(t) := \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})(t - u)}{\sin \frac{t-u}{2}}$$

(dit *noyau de Dirichlet*) n'est pas une fonction positive (même si elle reste d'intégrale 1 sur $[0, 2\pi]$). Pareil phénomène ne se produit pas avec la restitution approchée de s via les $T_N[s]$ car la fonction

$$t \rightarrow \frac{1}{2\pi N} \left(\frac{\sin \frac{N(t-u)}{2}}{\sin \frac{t-u}{2}} \right)^2$$

(dit *noyau de Féjer*) est, elle, une fonction positive.

Sur les figures 1.9 et 1.10, on a représenté, pour la même valeur de N , les graphes des noyaux de Dirichlet et de Féjer ; outre que la positivité est en défaut pour le noyau de Dirichlet, on constate que le lobe central du noyau de Féjer est plus “enflé” que ne l’est le lobe central du noyau de Dirichlet (à valeurs de N égales). Sur la figure 1.11, on a représenté les graphes des fonctions $S_N[s]$ et $T_N[s]$ au voisinage de $\pi/2$, s étant le signal “créneau” valant 1 sur $[\pi/2, 3\pi/2]$ et 0 sur $[0, \pi/2[\cup]3\pi/2, 2\pi[$.

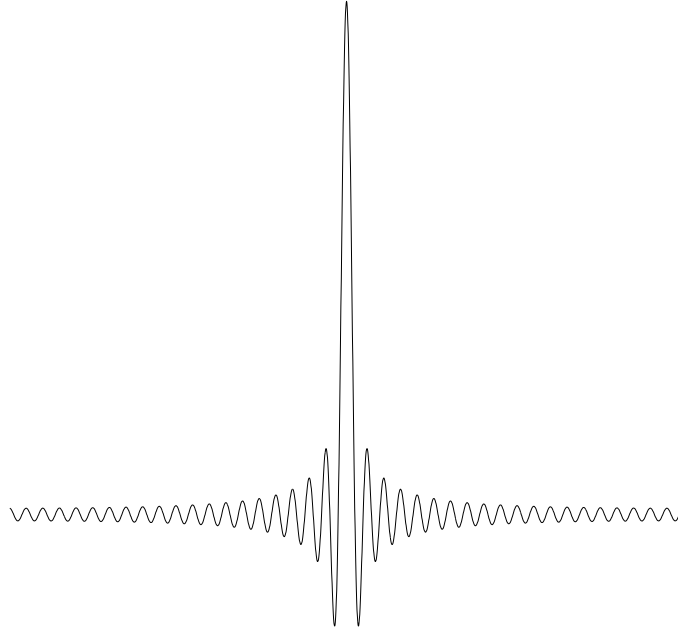


FIG. 1.9 – Noyau de Dirichlet

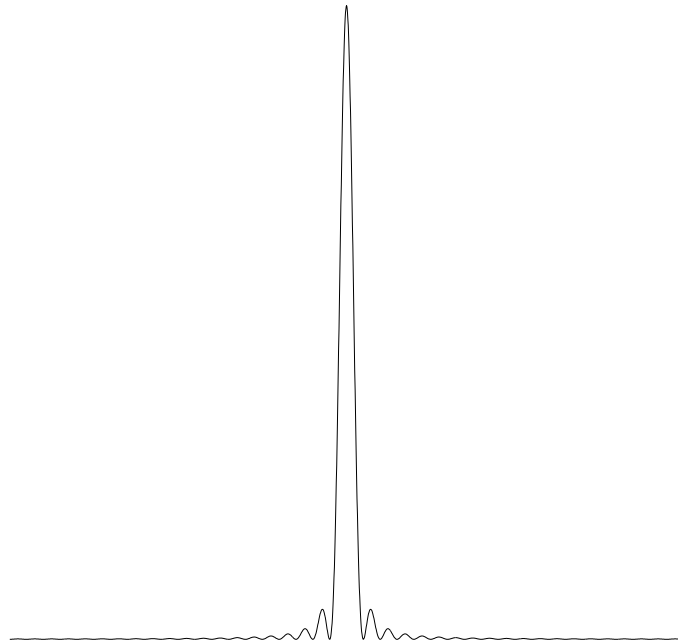


FIG. 1.10 – Noyau de Féjer

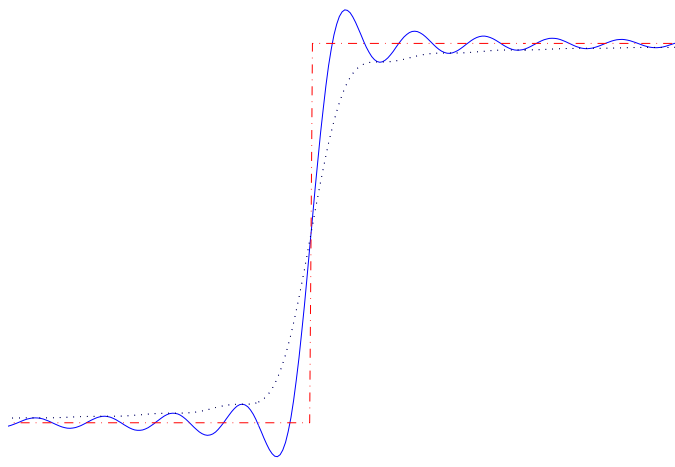


FIG. 1.11 – Comparaison Dirichlet/Féjer

Le noyau de Dirichlet présente un inconvénient, sa *non positivité*, responsable du phénomène de Gibbs; le noyau de Féjer ne présente, lui, plus cet inconvénient, mais on voit que le rendu d'un signal après tronquature “en douceur” de son spectre rend moins compte de la brutalité des irrégularités de ce signal (figure 1.11). Comme le fait de couper le spectre des signaux sera une opération cruciale (à la base de ce que l'on appelle le *filtrage*), il s'avère important de trouver un compromis.

Pour ce faire, on peut imaginer prendre une combinaison barycentrique de D_N et de ses translatés d'un lobe à gauche et à droite, soit

$$H_{\alpha,N}(t) = \alpha D_N(t) + (1 - \alpha) \left(D_N\left(t - \frac{2\pi}{2N+1}\right) + D_N\left(t + \frac{2\pi}{2N+1}\right) \right)$$

avec $\alpha \in [0, 1]$; le choix optimal de α (pour répondre à nos exigences pratiques) est celui qui assure que le quotient entre l'aire du nouveau lobe latéral sur le nouveau lobe central est minimale; ce choix correspond à $\alpha \simeq 0.54$ et le noyau H_N correspondant est dit *noyau de Hamming*. Le choix plus grossier de $\alpha = 0.5$ correspond, lui, au noyau de Hanning. Utiliser un de ces noyaux revient à couper le spectre de s en le multipliant par la fonction

$$k \in \mathbb{Z} \rightarrow \left(\alpha + (1 - \alpha) \cos \frac{2k\pi}{2N+1} \right) \chi_{[-N,N]}(k),$$

que l'on appelle *fenêtre de Hamming* (ou *fenêtre de Hanning* suivant la valeur de α) de longueur $2N + 1$ (il s'agit d'un signal digital de longueur $2N + 1$).

Le fenêtrage dans l'espace des temps ou l'espace des fréquences est une opération essentielle en traitement du signal (soit en effet on veut isoler une zone temporelle, soit on veut isoler une zone dans l'espace des fréquences), ce bien sûr à cause de l'incertournable principe d'incertitude d'Heisenberg. On effectuera donc cette opération de manière à détériorer le moins possible l'information contenue dans le signal (souvent par exemple, on souhaite éliminer les fréquences dans une plage donnée, par exemple éliminer du bruit, mais garder le contenu essentiel du signal et en particulier ses irrégularités, donc en tout cas atténuer le phénomène de Gibbs); pour ce faire, on utilisera le fenêtrage du type fenêtrage de Hamming (ou Hanning). Sur la figure

1.12 par exemple, on a représenté $H_N[s]$ pour le même signal créneau que sur la figure 1.11 (où l'on avait affiché les graphes de $S_N[s]$ et $T_N[s]$).

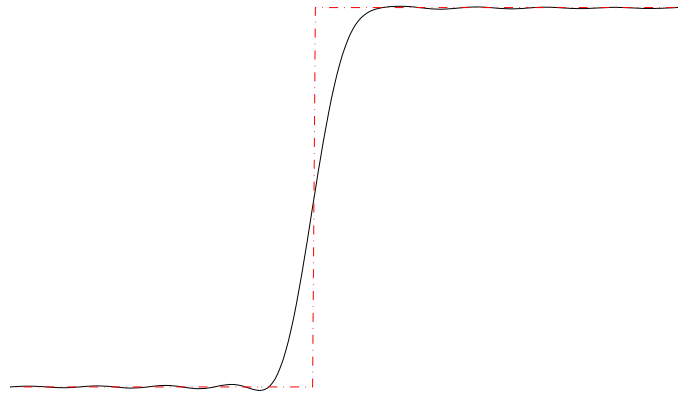


FIG. 1.12 – Troncature du spectre avec le fenêtrage de Hamming

1.7 Le problème du sous-échantillonnage des signaux analogiques et le théorème de Shannon

Il est intuitivement clair (voir la figure 1.13) que si un signal analogique présente des oscillations trop rapides, l'échantillonnage de ce signal avec un pas d'échantillonnage trop grand ne saura pas rendre compte du comportement en temps de ce signal analogique. On dit alors que le signal est *sous-échantillonné* et les problèmes soulevés par une telle opération d'échantillonnage (indispensable lorsque l'on prétend passer du cadre continu au cadre discret, ce qui est indispensable pour travailler numériquement) constitueront, avec le principe d'incertitude, une difficulté incontournable en traitement de l'information.

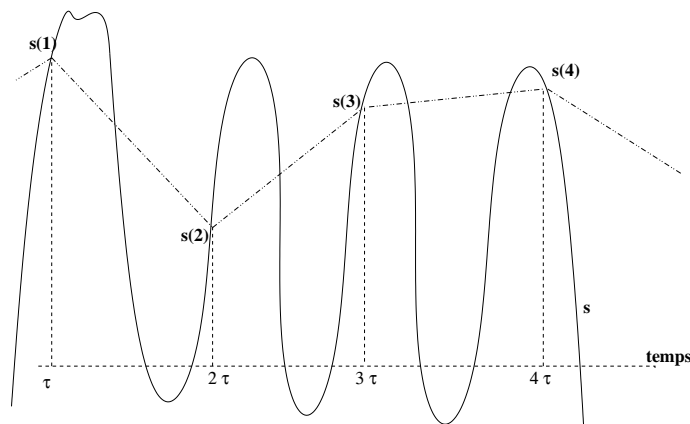


FIG. 1.13 – Le problème de l'échantillonnage

Si s est un signal d'énergie finie et de spectre borné (ce qui signifie que \hat{s} est presque partout nul sur $[-\Omega, \Omega]$, ce qui du point de vue pratique est utopique car tout signal est entaché de bruits hautes-fréquences), le signal s est nécessairement "régulier"

(ceci est intuitif, il n'y a pas de composantes hautes-fréquences) et la formule d'inversion de Fourier

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

montre que la définition de $s(n\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$ se fait sans ambiguïté pour chaque valeur de n ; dans la pratique bien sûr, cette valeur ponctuelle est enregistrée comme une moyenne de s près de $n\tau$ mais la régularité de s fait que cette moyenne ne diffère que peu de la valeur exacte. En fait, un tel signal s est bien plus que régulier! En effet, la fonction

$$z \in \mathbb{C} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(\omega) e^{i\omega z} d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(\omega) (i\omega)^n d\omega \right) \frac{z^n}{n!}$$

est la somme (dans le plan complexe) d'une série entière de rayon de convergence infini; un signal s d'énergie finie et de spectre borné admet donc un représentant qui est la restriction à l'axe des temps de la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = \infty$. Il résulte de cela qu'en théorie du moins, si s est connu sur un intervalle temporel aussi petit soit-il, s est connue sur l'axe réel tout entier (comme les polynômes, les séries entières de rayon de convergence $R = \infty$ constituent en analyse un cadre très "rigide", presque algébrique, par rapport au cadre "souple" des êtres C^∞).

Si le pas d'échantillonnage τ est assez petit ($\tau \leq \pi/\Omega$), la restitution de s à partir de ses échantillons se fait parfaitement par la formule

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k\tau) \operatorname{sinc} \frac{2(t - k\tau)}{\tau}, \quad (*)$$

où la fonction sinc dont le graphe figure sur la figure 1.14 ci-dessous est la fonction $t \rightarrow \sin(\pi t/2)/(\pi t/2)$, correspondant à la transformée de Fourier de la fonction "créneau" $t \rightarrow \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}/\pi$ valant $1/\pi$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et 0 ailleurs. La convergence de la série dans la formule (*) ci-dessus se fait d'ailleurs uniformément sur \mathbb{R} , ce qui montre que l'on approche s uniformément avec une erreur uniforme aussi petite que l'on veut en tronquant la série ci-dessus entre $-N$ et N par exemple (pour N assez grand en fonction de l'erreur uniforme que l'on tolère). La fonction sinc est implémentée sous MATLAB en

```
>t=-T:pas:T
>f=sinc (t)
```

On a représenté son graphe sur la figure 1.14 (on remarquera l'analogie évidente avec le graphe du noyau de Dirichlet pour N grand, voir la figure 1.9).

La fréquence seuil $\tau = \pi/\Omega$ tolérable pour échantillonner les signaux d'énergie finie sur \mathbb{R} et de spectre habitant dans $[-\Omega, \Omega]$ est dite *fréquence de Nyquist*; si s est un signal d'énergie finie et de spectre vivant dans $[-\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}]$, l'erreur (uniforme) que l'on commet en assimilant s au signal

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k\tau) \operatorname{sinc} \frac{2(t - k\tau)}{\tau}$$

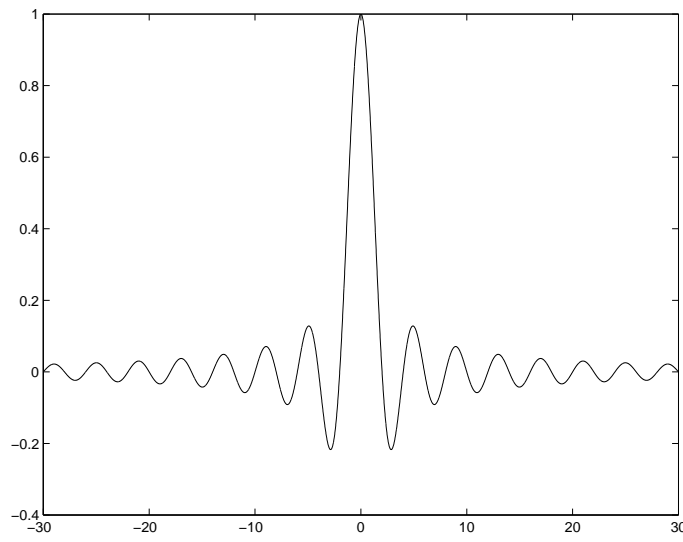


FIG. 1.14 – fonction sinus-cardinal $t \rightarrow \sin(\pi t/2)/(\pi t/2)$

avec $\tau = \pi/\Omega$ et $\Omega \leq \tilde{\Omega}$ se trouve de fait majorée par

$$\text{erreur} \leq \frac{1}{\pi} \int_{\Omega \leq |\omega| \leq \tilde{\Omega}} |\hat{s}(\omega)| d\omega.$$

Esquisse de preuve de la formule (*). Il existe une preuve directe du résultat de Shannon, preuve résultant facilement de la formule de Plancherel. Supposons $s \in L^2(\mathbb{R})$ de spectre inclus dans $[-\Omega, \Omega]$, prenons $\tilde{\Omega} \geq \Omega$ et posons $\tau = \pi/\tilde{\Omega}$. Il s'agit de prouver la formule (*); on remarque pour cela que la formule d'inversion de Fourier nous donne

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tilde{\Omega}}^{\tilde{\Omega}} \hat{s}(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

soit, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$s(k\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tilde{\Omega}}^{\tilde{\Omega}} \hat{s}(-\omega) e^{-2\pi i k \omega / (2\tilde{\Omega})} d\omega = \frac{\tilde{\Omega}}{\pi} \left(\frac{1}{2\tilde{\Omega}} \int_{-\tilde{\Omega}}^{\tilde{\Omega}} \hat{s}(-\omega) e^{-2\pi i k \omega / (2\tilde{\Omega})} d\omega \right),$$

ce qui signifie que la suite des nombres $(\pi s(k\tau)/\tilde{\Omega})_k$ s'interprète comme la suite des coefficients de Fourier du signal $\omega \rightarrow \hat{s}(-\omega)$, considéré sur $[-\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}]$, puis prolongé par périodicité en un signal $2\tilde{\Omega}$ -périodique. Les nombres

$$2\pi \text{sinc}(\pi(t - k\tau)/\tau), \quad k \in \mathbb{Z},$$

s'interprètent aussi comme la suite des coefficients de Fourier de la fonction $t \in [-\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}] \rightarrow e^{-i\omega t}$, prolongée en une fonction $2\tilde{\Omega}$ périodique. On conclut alors en appliquant la formule de Plancherel pour les signaux $2\tilde{\Omega}$ périodiques.

Le fait que la série dans (*) converge uniformément résulte des deux faits suivants :

- d'une part, la suite $(s(k\tau))_{k \in \mathbb{Z}}$ est une suite de $l^2(\mathbb{Z})$ (on vient de le voir);
- d'autre part, le signal

$$t \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\text{sinc} \pi \frac{t - k\tau}{\tau} \right)^2$$

est un signal périodique et continu (au sens mathématique du terme) sur l'axe des temps, c'est par conséquent un signal borné par une constante M (on verra plus loin qu'il s'agit de fait d'un signal constant)

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous assure alors que

$$\sum_{|k| \geq N} |s(k\tau)| \left| \operatorname{sinc} \pi \frac{t - k\tau}{\tau} \right| \leq \sqrt{M} \left(\sum_{|k| \geq N} |s(k\tau)|^2 \right)^{1/2} = o(1)$$

lorsque N tend vers $+\infty$. Ceci montre que le critère de Cauchy uniforme est satisfait et conclut à la convergence uniforme de la série figurant au second membre de (*). L'estimation d'erreur se fait en utilisant un argument analogue; on la laisse en exercice.

1.8 La formule sommatoire de Poisson

Le théorème de Shannon est intimement lié à une formule importante tant en analyse qu'en théorie des nombres, la *formule sommatoire de Poisson*; cette formule est bien connue des physiciens : si μ est la mesure sur \mathbb{R} définie comme le *peigne de Dirac*

$$\mu := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - k\tau),$$

où δ désigne la masse de Dirac, on peut définir son spectre en remarquant que si φ est un signal de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors, on a la formule

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2k\pi/\tau);$$

on laisse ici en exercice la preuve de cette formule sommatoire mais on en retient sa traduction physique qui est simplement l'affirmation (modulo la formule d'inversion de Fourier) selon laquelle le spectre du peigne de Dirac est le peigne "dual"

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - k\tau) \right)^\wedge = \frac{2\pi}{\tau} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - 2k\pi/\tau).$$

Plus généralement dans \mathbb{R}^n , le spectre d'un réseau

$$\Lambda := \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z} \vec{e}_j$$

(où $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ est une base de \mathbb{R}^n) est le réseau dual

$$\Lambda^* = \frac{(2\pi)^n}{\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \delta(x - 2\pi k_1 \vec{e}_1^* - \dots - 2\pi k_n \vec{e}_n^*),$$

où $(\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_n^*)$ sont les vecteurs colonnes de la matrice A^* , A désignant la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. En dimension $n = 3$ par exemple, ce fait est bien connu en cristallographie : par diffraction, un réseau cristallin est transformé en le réseau dual.

Voici maintenant une preuve du théorème de Shannon (au moins heuristique) à partir de la formule sommatoire de Poisson, exploitant le fait que la transformation de Fourier échange convolution et

multiplication. On part encore d'un signal s d'énergie finie et de spectre dans $[-\Omega, \Omega]$. Si $\tilde{\Omega} \geq \Omega$, on peut écrire, si χ_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $A \subset \mathbf{R}$,

$$\hat{s}(\omega) = \hat{s}(\omega) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi_{[-\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}]}(\omega - 2k\tilde{\Omega}) = \hat{s}(\omega) [\chi_{[-\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}]} * \delta_{\tilde{\Lambda}}(\omega)],$$

où $\tilde{\Lambda}$ est le réseau $\tilde{\Lambda} = 2\tilde{\Omega}\mathbf{Z}$. Le spectre du signal $\chi_{[-\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}]} * \delta_{\tilde{\Lambda}}$ est, compte-tenu de la formule sommatoire de Poisson, le signal $2\pi (\text{sinc}(\omega\tilde{\Omega})) \delta_{\tilde{\Lambda}^*}$, où $\tilde{\Lambda}^*$ est le réseau dual de $\tilde{\Lambda}$, soit le réseau $\tilde{\Lambda}^* = \frac{\pi}{\tilde{\Omega}}\mathbf{Z}$. Il résulte de la formule d'inversion de Fourier que le signal $\chi_{[-\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}]} * \delta_{\tilde{\Lambda}}$ est le spectre de $t \mapsto (\text{sinc}(\tilde{\Omega}t)) \delta_{\tilde{\Lambda}^*}(t)$. Une nouvelle application de la formule de Poisson (couplée avec le fait que la prise de spectre transforme convolution en multiplication) nous assure que

$$\omega \mapsto \hat{s}(\omega) [\chi_{[-\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}]} * \delta_{\tilde{\Lambda}}(\omega)]$$

est le spectre de la mesure $s * [(\text{sinc}(\tilde{\Omega}(\cdot))) \delta_{\tilde{\Lambda}^*}]$ (on a ici remplacé s par son représentant C^∞ donné par

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega .$$

On a donc $s = s * [(\text{sinc}(\tilde{\Omega}(\cdot))) \delta_{\tilde{\Lambda}^*}]$, ce qui est la formule (*) voulue si l'on prend $\tilde{\Omega} = \pi/\tau$, ce qui est licite au vu de l'hypothèse faite sur τ .

Chapitre 2

Le filtrage

2.1 Filtres digitaux ; réalisabilité, causalité, stationnarité

Un *filtre digital* est par définition un opérateur linéaire de l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ des suites $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes dont tous les termes, sauf au plus un nombre fini, sont nuls, à valeurs dans l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ des suites $(s(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes, tel que \mathcal{L} commute avec l'opérateur de translation dans le temps, dit aussi *shift*, $(u(k))_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow (u(k-1))_{k \in \mathbb{Z}}$.

Concrètement, un filtre digital correspond à l'action d'un appareil (on dit aussi une *boîte noire*) agissant de manière linéaire sur l'espace des signaux digitaux d'entrée et dont les paramètres restent immuables dans le temps. Tel est le cas par exemple des cellules électriques ou mécaniques, dont nous verrons plus loin des versions analogiques (l'espace des temps étant pensé continu et non plus discret).

Soit \mathcal{L} un tel filtre digital. La suite $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ définie comme la réponse de \mathcal{L} à la suite $(\delta_0^k)_{k \in \mathbb{Z}}$, où $\delta_0^k = 0$ si $k \neq 0$ et $\delta_0^0 = 1$ est dite *réponse impulsionnelle* du filtre. Cette réponse impulsionnelle permet d'exprimer le signal de sortie $\mathcal{L}[e]$ à partir du signal d'entrée suivant la liste de relations :

$$s(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)e(n-k), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (\dagger)$$

traduisant le fait que l'action d'un filtre discret se matérialise par l'opération de convolution.

Pour que les relations (\dagger) soient exploitables concrètement, il faut qu'il existe un entier $M \in \mathbb{N}$ tel que tous les $h(k)$ soient nuls pour $k \leq -M$; si en effet ce n'est pas le cas, il s'avère indispensable de disposer, étant donné un instant n , d'une infinité de valeurs du *futur* de l'entrée (c'est-à-dire des valeurs $e(n+k)$ pour une infinité de $k > 0$) pour pouvoir calculer la sortie $s(n)$ à cet instant n . Un filtre digital dont le support de la réponse impulsionnelle est borné à gauche est dit *filtre réalisable* (ou encore à *capacité de mémoire finie*, ce qui exprime bien ce que cela veut dire, à savoir qu'il suffit de connaître le passé-présent de l'entrée, ainsi que son futur proche (sur un laps de temps fini, futur à mémoriser donc) pour être à même de calculer la sortie ; si ce n'est pas le cas, il est dit *irréalisable*. On doit constamment garder à l'esprit le souci de ne concevoir, pour transposer la théorie à la pratique, que des filtres réalisables (quand bien même les filtres théoriques que l'on proposerait ne le

seraient pas, mais il conviendra à ce moment de les “corriger”, ce qui, on le verra, n’ira pas sans difficulté!).

Si la réponse impulsionnelle est de support dans \mathbb{N} ($h(k) = 0$ si $k < 0$), le passé-présent de l’entrée suffisent à la restitution de la sortie et le filtre est dit *causal*.

Reste un dernier concept, plus délicat, celui de *stationnarité*. Un filtre digital est dit *stationnaire* si et seulement si il se prolonge en un opérateur continu de l’espace

$$l^2(\mathbb{Z}) := \{(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}; \sum_{k \in \mathbb{Z}} |e(k)|^2 < \infty\}$$

des signaux digitaux d’énergie finie dans lui-même, ce qui signifie qu’il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (e(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{L}[e](k)|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |e(k)|^2.$$

L’espace de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$ est en correspondance isométrique *via* la transformation de Fourier \mathcal{F} des signaux 2π -périodiques avec l’espace $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ des signaux 2π -périodiques d’énergie finie sur $[0, 2\pi]$, équipé de la norme

$$\|f\|_{\mathbb{T}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

On rappelle que la transformation de Fourier \mathcal{F} (ou encore la prise de spectre des signaux périodiques) est l’application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ qui à un signal f associe la liste de ses coefficients de Fourier

$$c_n[f] := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

l’inverse étant l’application qui à une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ associe la série de Fourier

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$$

(la convergence ayant lieu dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$).

Si \mathcal{L} est un filtre digital stationnaire, l’opérateur $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{F}$ est un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ dans lui-même; comme la transformation de Fourier échange les opérations de convolution et de multiplication, cet opérateur $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{F}$ est l’opérateur de multiplication par la fonction de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ définie comme la transformée de Fourier inverse de la réponse impulsionnelle $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ (dont on sait qu’elle appartient à $l^2(\mathbb{Z})$), c’est-à-dire la fonction

$$\omega \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{ik\omega}$$

(la convergence de la série ayant lieu dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$). La fonction

$$H : \omega \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{ik\omega}$$

est dite *fonction de transfert* (ou encore *impédance*, voire *admittance*) du filtre digital stationnaire \mathcal{L} et l'action de ce filtre se lit encore, après transformation de Fourier :

$$\mathcal{F}[\mathcal{L}[e]] = H \times \mathcal{F}[e]$$

si $e = (e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est un signal digital d'entrée appartenant à $l^2(\mathbb{Z})$. La continuité de \mathcal{L} impose à la fonction H d'être une fonction essentiellement bornée, la quantité $\|H\|_\infty$ étant alors la norme de l'opérateur $\mathcal{L} : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$. La *transformée de Fourier* du filtre digital stationnaire \mathcal{L} de réponse impulsionnelle $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est par définition la fonction

$$\omega \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-ik\omega}$$

(elle aussi essentiellement bornée). On appelle *spectre d'énergie* de \mathcal{L} la fonction 2π -périodique essentiellement bornée

$$|H|^2 : \omega \rightarrow \left| \omega \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{ik\omega} \right|^2$$

et *distorsion d'amplitude* la fonction 2π -périodique essentiellement bornée

$$|H| : \omega \rightarrow \left| \omega \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{ik\omega} \right|,$$

cette dernière terminologie se trouvant justifiée par la formule :

$$|\mathcal{F}[\mathcal{L}[e]]| = |H| \times |\mathcal{F}[e]|.$$

2.2 Le *design* d'un filtre digital stationnaire à partir de sa fonction de transfert

Supposons que l'on veuille réaliser un filtre digital dont l'effet, lorsque le filtre agit sur une entrée $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, est de couper les fréquences dans le domaine $\{\omega ; \omega_{c,1} \leq |\omega| \leq \omega_{c,2}\}$ de $[-\pi, \pi]$ (on rappelle que, d'après le théorème de Shannon, $[-\pi, \pi]$ est l'intervalle fréquentiel utile). La fonction de transfert du filtre digital idéal devrait être la fonction :

$$\omega \rightarrow H(\omega) = \chi_{[-\omega_{c,2}, -\omega_{c,1}]} + \chi_{[\omega_{c,1}, \omega_{c,2}]} ;$$

or il s'avère que la suite des coefficients de Fourier d'une telle fonction est une suite $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ correspondant à la réponse impulsionnelle d'un filtre irréalisable ; en effet, le support de cette réponse impulsionnelle n'est pas limité à gauche. Pour réaliser un filtre digital à capacité de mémoire finie visant à un objectif s'approchant de celui du filtre digital idéal (mais non réalisable !) $\mathcal{L}_{\omega_{c,1}, \omega_{c,2}}$, il convient donc de remplacer la réponse impulsionnelle $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ par sa version tronquée $(h(l)w_{N/2}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, où

$$k \rightarrow w_{N/2}(k)$$

désigne une fonction "fenêtre" de longueur $N+1$ adaptée à l'intervalle $[-N/2 : N/2]$; cette fonction fenêtre est à choisir intelligemment de manière à esquisser au mieux le phénomène de Gibbs, par exemple en utilisant le fenêtrage de Hamming ou de

Hanning; la suite (de longueur $N + 1$) des coefficients $[h(-N/2), \dots, h(N/2)]$ correspond à la suite $[\tilde{h}_N(0), \dots, \tilde{h}_N(N)]$ des coefficients de la réponse impulsionnelle d'un filtre digital causal (dont la réponse impulsionnelle est à support dans $\{0, \dots, N\}$). La fonction de transfert d'un tel filtre approche $H \times \exp(i\omega p)$, où p est la partie entière de $N/2$; en remplaçant H par la fonction de transfert $\omega \rightarrow \tilde{H}(\omega) \exp(-ip\omega)H(\omega)$ et en raisonnant avec \tilde{H} au lieu de H comme ci-dessus, on construit, N (donc p) étant fixé, un filtre causal dont la fonction de transfert approche la fonction H . La construction d'un tel filtre est générée sous **MATLAB** par la commande

```
>>f=fir1(N,[omega_(c,1),omega_(c,2)],window);
```

Une fois la suite de ces coefficients calculée, l'action du filtre digital ainsi construit sur un vecteur d'entrées $e = (e(1), \dots, e(N))$ est donnée par la routine

```
>>s=filter(f,1,e);
```

La sortie est ici calculée à partir d'un vecteur d'entrées initial $(e(-N), \dots, e(0))$ égal au vecteur nul; le vecteur de sortie est un vecteur de même longueur que le vecteur d'entrée; si l'on introduit la routine

```
>>[s,final]=filter(f,1,e);
```

on construit le vecteur [final] des dernières N valeurs calculables du vecteur de sortie, vecteur que l'on verra ultérieurement comment prendre en compte dans un enchaînement de filtres.

Traitons par exemple le cas si signal suivant

```
>>t=0:01:10.24;
>>s=sin(22.457*t)+cos(35.21*t.*(t-8.7235)+ sin(56.865*t)
```

qui est la somme de deux signaux sinusoidaux et d'un signal à évolution linéaire de fréquences. On a affiché ce signal sur la figure 2.1 ci-dessous :

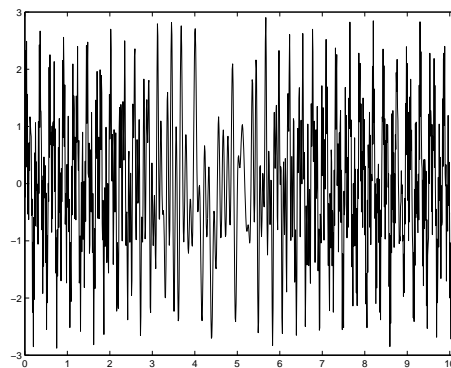


FIG. 2.1 – Le signal s à filtrer

On a ensuite construit les trois signaux s_1, s_2, s_3 correspondant respectivement au filtrage passe-bas (avec fréquence de coupure .1), le filtrage passe-bande (entre les seuils .1 et .2) et le filtrage passe-haut (au delà du seuil .2) en utilisant les routines **MATLAB** comme suit :

```

>> f1=fir1(256,.1);
>> f2=fir1(256,[.1,.2]);
>> f3=fir1(256,.2,'high');
>> s1=filter(f1,1,s);
>> s2=filter(f2,1,s);
>> s3=filter(f3,1,s);

```

Les trois signaux obtenus ont été affichés sur la figure 2.1 ci-dessous; on constate que du fait de la longueur du filtre (ici 256), il y a un décalage inhérent à l'opération de convolution (les valeurs initiales de l'entrée nécessaires au calcul de la sortie à partir de l'instant $t = 0$ sont toutes prises égales à 0); on identifie dans les signaux s_2 et s_3 les deux composants basse-fréquence ($\omega \simeq 22$) et moyenne fréquence ($\omega \simeq 56$) du signal; le signal à évolution linéaire de fréquences laisse une trace sur les trois composants s_1 , s_2 et s_3 .

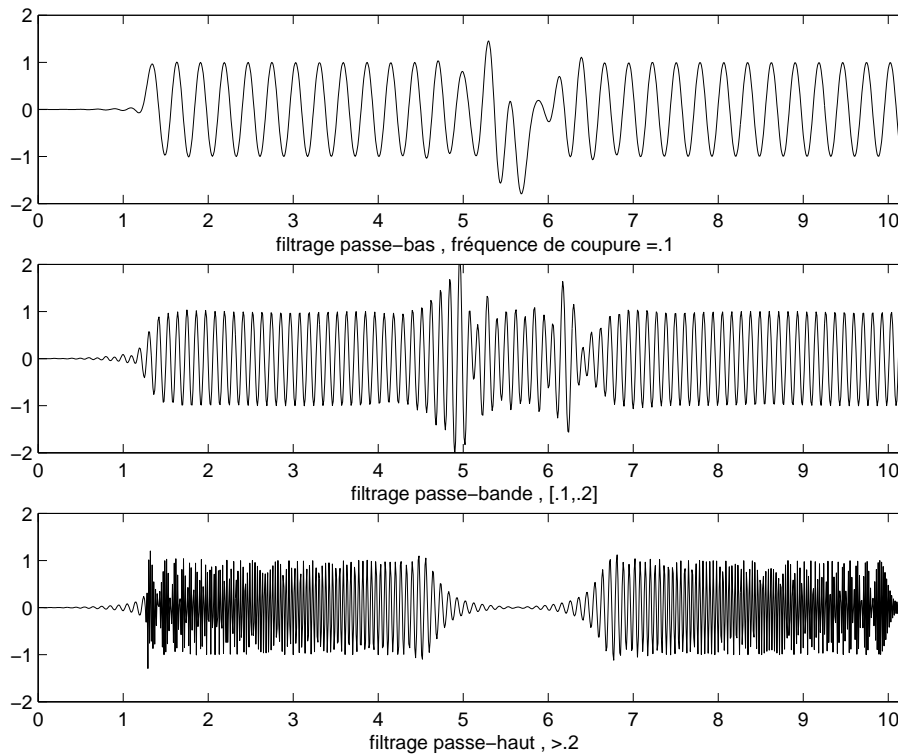


FIG. 2.2 – Filtrage de s

La fonction de transfert du filtre s'affiche (sur $[0, \pi]$ discrétisé en M points régulièrement espacés) à partir des routines

```

>> [h,omega]=freqz(f,1,M);
>> plot(omega,real(h));
>> plot(omega,imag(h));

```

Le *design* d'un filtre rationnel dont la fonction de transfert est donnée sur $[0, \pi]$ comme interpolant les valeurs w_1, \dots, w_M aux points $\omega_1, \dots, \omega_M$ est donnée, si $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_m]$ et $w = [w_1, \dots, w_m]$, par la routine

```

>> f=fir2(N,omega,w)

```


Ici encore, le filtre construit est de fait un filtre causal dont la réponse impulsionnelle est un vecteur de longueur $N + 1$ (la construction généralise simplement celle implémentée sous la routine `fir1` ci-dessus).

2.3 Notion de z -transformée d'un filtre digital

Si $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ désigne une suite indexée par \mathbb{Z} de nombres complexes, on peut lui associer sa z -transformée, qui par définition est la série formelle :

$$T^z((e(k))_k) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} e(k)X^{-k}.$$

L'ensemble $\mathbb{C}[[X, X^{-1}]]$ des séries formelles en X, X^{-1} a une structure de $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$ module ; on peut en effet définir le produit d'une série formelle

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)X^{-k}$$

par le polynôme de Laurent

$$P(X) = \sum_M^N h(k)X^k ;$$

on pose simplement

$$P(X) \bullet \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)X^{-k} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n)X^{-n},$$

où

$$s(n) := \sum_{k=M}^N h(k)e(n-k), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Notons que ce produit pose certaines difficultés ; on ne peut pas munir $\mathbb{C}[[X, X^{-1}]]$ d'une structure d'anneau (car la multiplication de deux séries formelles n'a pas de sens *a priori*) d'une part ; d'autre part, il n'y a pas intégrité : par exemple

$$(1 - X) \bullet \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} X^k \right) = 0$$

(comme série formelle) alors que ni le polynôme $1 - X$, ni la série formelle $\sum_{k \in \mathbb{Z}} X^k$, ne correspondent à la série formelle nulle. La z -transformée d'une suite $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ indexée par \mathbb{Z} n'est ni plus ni moins qu'un moyen commode de "stocker" la suite $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$.

Il y a une relation commode entre z -transformées et action de filtre digitaux. Supposons par exemple que \mathcal{L} soit un filtre digital de réponse impulsionnelle $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ et que $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une suite d'entrées avec les $e(k)$ tous nuls sauf un nombre fini. La z -transformée de la suite $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est alors un polynôme de Laurent P , tandis que la z -transformée de la réponse impulsionnelle $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ (on dit aussi *la z -transformée du filtre \mathcal{L}*) est la série formelle

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)X^{-k}.$$

On remarque que

$$T^z[(e(k))_k] \bullet T^z[(h(k))_k] = T^z[(s(k))_k], \quad (\dagger)$$

où

$$s(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)e(n-k), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

ce qui montre que la formule (\dagger) (la z -transformée de la sortie est le produit de la z -transformée de l'entrée par la z -transformée du filtre) rend compte de manière "concise" de l'action du filtre (on écrit simplement une formule au lieu de la liste des formules $(\dagger\dagger)$, mais, bien sûr, cela revient rigoureusement au même!).

On serait tenté, étant donné un filtre \mathcal{L} de z -transformée $F = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)X^{-k}$ et un signal d'entrée $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ inconnu, mais dont on connaît la sortie $(s(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, de retrouver $(e(k))_k$ en écrivant formellement :

$$T^z[(e(k))_k] = \frac{1}{F} \bullet T^z[(s(k))_k],$$

mais bien sûr, tout s'écroule ici car $1/F$ n'a *a priori* pas de sens. Il est cependant un cas où $1/F$ pourrait avoir un sens, c'est le cas où le filtre \mathcal{L} est à capacité de mémoire finie, c'est-à-dire, si les nombres $h(k)$ sont tous nuls si $k < M$ et $h(M) \neq 0$. Dans ce cas

$$F(X) = X^M(h(M) + \sum_{k=1}^{\infty} h(M+k)X^{-k}) = h(M)X^M \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(M+k)}{h(M)} X^{-k}\right).$$

Il existe une z -transformée naturelle correspondant à $1/F$ car l'on peut effectuer par exemple la division de 1 par la série formelle

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(M+k)}{h(M)} X^{-k}$$

en effectuant une division suivant les puissances croissantes de X^{-1} (il y a un algorithme bien connu pour cela); on obtient donc (formellement)

$$\frac{1}{F(X)} = \frac{1}{h(M)} X^{-M} (1 + u(1)X^{-1} + u(2)X^{-2} + \dots)$$

et ainsi un développement

$$\frac{1}{F(X)} = \sum_{k=-M}^{\infty} \tilde{h}(k) X^{-k}$$

correspondant à la z -transformée d'un filtre à capacité de mémoire également finie. Formellement au moins, le rôle de ce filtre $\tilde{\mathcal{L}}$ devrait être dévolu à "inverser" le filtre \mathcal{L} .

Il y a cependant une ambiguïté dans la démarche que nous venons de présenter : si par exemple F est une fraction rationnelle (disons par exemple $F(X) = (X-1)(X-2)$ pour fixer les idées), on a

$$\frac{1}{F(X)} = \frac{1}{(X-1)(X-2)}$$

et l'on pourrait aussi développer formellement $1/F$ en écrivant

$$\frac{1}{F(X)} = \frac{1}{1-X} - \frac{1}{2-X} = \sum_{k=0}^i nfty X^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (X/2)^k,$$

développement qui n'a rien à voir avec celui que donne la division suivant les puissances croissantes de X^{-1} ! Nous allons lever cette ambiguïté dans la section suivante en rappelant quelques résultats majeurs concernant la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$.

2.4 Quelques rappels d'algèbre concernant $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$

Si $F = N(X)/D(X)$ est une fraction rationnelle à coefficients complexes (écrite sous forme réduite ou encore non simplifiable, ce qui signifie que N et D n'ont pas de racine commune et D étant supposé unitaire) et si

$$D(X) = \prod_{j=1}^s (X - p_j)^{\mu_j},$$

p_1, \dots, p_s étant les racines de D et μ_1, \dots, μ_s les multiplicités de ces racines, alors il existe un choix unique constitué d'un polynôme E (de degré égal ou égal à la différence des degrés de N et D , avec $E \equiv 0$ si $\deg N < \deg D$) et de s listes de nombres complexes $\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,\mu_j}$, $j = 1, \dots, s$, telles que

$$F(X) = E(X) + \sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^{\mu_j} \frac{\alpha_{j,l}}{(X - p_j)^l}; \quad (2.1)$$

le polynôme E est en particulier le quotient dans la division euclidienne de N par D .

Si $F \in \mathbb{R}(X)$, les racines de D sont soit réelles (disons par exemple que $\alpha_1, \dots, \alpha_{s'}$ soient les racines réelles) soit complexes conjuguées deux à deux, les paires de racines complexes conjuguées étant identifiées par les couples (σ_j, τ_j) , $j = 1, \dots, s''$, avec $s' + 2s'' = \deg D$, σ_l représentant la somme des deux racines conjuguées, τ_l leur produit. La décomposition en éléments simples de F s'organise dans ce cas sous la forme

$$F(X) = E(X) + \sum_{j=1}^{s'} \sum_{l=1}^{\mu_j} \frac{\alpha_{j,l}}{(X - p_j)^l} + \sum_{j=1}^{s''} \sum_{l=1}^{\mu_j} \frac{\beta_{j,l} + \gamma_{j,l}X}{(X^2 - \sigma_j X + \tau_j)^l}, \quad (2.2)$$

les coefficients $\beta_{j,l}, \gamma_{j,l}$, $j = 1, \dots, s''$, $l = 1, \dots, \mu_j$, étant dans ce cas réels.

Le fait qu'une fraction rationnelle se décompose en éléments simples montre qu'elle induit une partition du plan complexe en un certain nombre de couronnes concentriques de centre l'origine, la dernière étant une couronne non bornée du type $\{z \in \mathbb{C}; |z| \geq R\}$. Ces couronnes sont limitées par les cercles contenant les pôles (voir la figure 2.3).

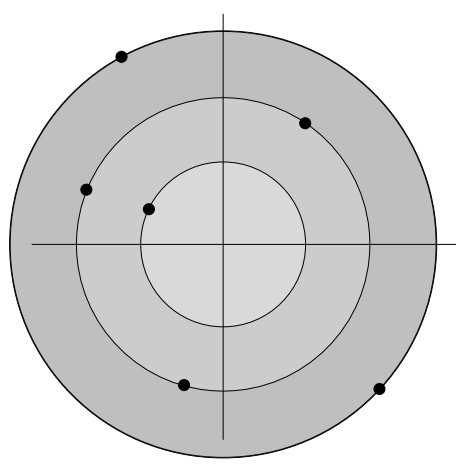


FIG. 2.3 – Partitionnement de \mathbb{C} grâce à une fraction rationnelle

Dans chacune des couronnes ouvertes ainsi délimitées, il existe une unique manière de développer la fonction

$$z \rightarrow F(z)$$

sous la forme d'une série de puissances (positives ou négatives) de $1/z$ de manière à ce que dans la couronne le développement soit convergent. Pour cela, on utilise la décomposition (2.1) en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et l'on voit que l'on est ramené à développer des expressions du type

$$\frac{1}{(z-p)^\nu}, \quad p \in \mathbb{C}^*, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

que l'on écrit, soit

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^\nu}{p^\nu} \frac{1}{(1-z/p)^\nu} &= \frac{(-1)^\nu}{p^\nu} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (z/p)^k \right)^\nu \\ &= \frac{(-1)^\nu}{p^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+\nu-1)!}{k!} (z/p)^k \end{aligned}$$

si la couronne est dans $D(0, |p|)$ ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^\nu} \frac{1}{(1-p/z)^\nu} &= \frac{1}{z^\nu} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (p/z)^k \right)^\nu \\ &= \frac{1}{z^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+\nu-1)!}{k!} (p/z)^k \end{aligned}$$

si le rayon inférieur de la couronne est strictement plus grand que $|p|$.

On constate qu'une seule couronne se plie au fait que le développement de F qui lui correspond puisse être interprété comme la z -transformée d'un filtre réalisable : c'est la couronne non bornée et le développement de F que l'on y trouve est celui que fournirait la division de N par D suivant les puissances croissantes de X^{-1} . Derrière une fraction rationnelle, se cache en fait un et un seul filtre réalisable, celui dont la z -transformée est donnée par le développement en série de Laurent de F dans la couronne non bornée $\{z \in \mathbb{C}; |z| > R\}$, où R désigne le maximum des modules des pôles de F .

Le filtre digital associé à une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ donnée est réalisable, mais n'est stationnaire que si tous les pôles de F sont à l'intérieur du disque unité.

Si $F \in \mathbf{R}(X)$ et si l'on pense à la décomposition (2.2), ce filtre se réalise concrètement par des montages en série idéaux de filtres simples, correspondant à une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{\beta}{(X^2 - \sigma X + \tau)}$$

où σ et τ sont des nombres réels tels que $\sigma^2 - 4\tau < 0$ ou au polynôme X , suivis de montages en parallèle (le produit des fractions rationnelles correspond à l'enchaînement de filtres, donc au montage en série idéal, la somme à l'addition de filtres, donc au montage en parallèle idéal). Il faut prendre garde, concernant les montages en série ou en parallèle de cellules électriques, que les montage en série ou en parallèles ordinaires ne sont pas des montages en série ou en parallèle idéaux car il y a bien sûr des effets pervers de *feed-back* liés à la loi d'Ohm.

2.5 Filtres A.R, filtres A.R.M.A

On s'intéresse dans cette section aux *boîtes noires* correspondant à des filtres digitaux dont la z -transformée correspond au développement en série de puissances croissantes de X^{-1} (ou au développement de Laurent dans la couronne non bornée) d'une fraction rationnelle du type :

$$F(X) = \frac{\sum_{k=0}^M b(k)X^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a(k)X^{-k}}.$$

Si $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est un signal d'entrée de support fini, la z -transformée de la sortie est liée à la z -transformée de l'entrée par la relation :

$$\left(1 + \sum_{k=1}^N a(k)X^{-k}\right) \bullet T^z[(s(k))_k] = \left(\sum_{k=0}^M b(k)X^{-k}\right) \bullet T^z[(e(k))_k]$$

et le filtre est donc régi par le jeu de relations suivantes entre entrées et sorties :

$$s(n) + \sum_{k=1}^N a(k)s(n-k) = \sum_{k=0}^n b(k) e(n-k), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Du point de vue pratique, ce filtre (qui n'est en général pas stationnaire, sauf si les pôles de F sont tous dans le disque unité ouvert) est implémenté (agissant sur un signal digital d'entrée e) sous l'une ou l'autre des trois commandes suivantes :

```
>> f= filter(b,a,e);
>> f= filter(b,a,e,init);
>> [f,final]=filter(b,a,e);
>> [f,final]=filter(b,a,e,init);
```

où a et b désignent les vecteurs $(a(k))_k$ et $(b(k))_k$ correspondant respectivement au dénominateur et au numérateur de la fraction rationnelle F ; le vecteur "init" représente un vecteur initial de sorties (en $s(-1), \dots, s(-N)$) nécessaire pour calculer

$s(n)$ à partir de l'entrée (si les $e(k)$, $k = -M, \dots, -1$ sont supposés nuls); on fait jouer un rôle à ce vecteur "init" lorsqu'il s'agit d'enchaîner les actions de divers filtres digitaux de ce type. Le vecteur "final" est le vecteur des N dernières composantes de la sortie, il est prêt à être introduit dans un filtre ultérieur.

Si tous les $b(k)$ sont nuls pour $k \geq 1$, le filtre est dit *auto-régressif* (ou encore A.R.); dans le cas général (où les $a(k)$ et les $b(k)$ sont quelconques), le filtre est dit filtre A.R.M.A (*Auto -Regressive with Moving Average*, ce que l'on traduit par (*autorégressif à moyenne glissante*). On justifiera cette terminologie au paragraphe suivant lorsque nous mettrons en lumière la relation entre la conception (ou encore le *design*) de tels filtres et les processus discrets que ces filtres ont pour fonction de décorréler. Les modèles de filtres A.R. ou A.R.M.A joueront un rôle majeur dans l'analyse ou la synthèse de la parole. Leur "design" implique le choix de M et N (les "ordres" du filtre), puis le choix des coefficients.

Il est dès à présent naturel de concevoir que si un signal discret obéit à une équation aux différences du type

$$e(n) - a(1)e(n-1) - \dots - a(N)e(n-N) = 0$$

(e est corrélé à ses "décalés" dans le passé, ce qui, on le verra, est une propriété typique des empilement de signaux périodiques élémentaires discrétisés, c'est-à-dire des empilements finis d'harmoniques), le filtre autorégressif correspondant à la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{1 - a(1)X^{-1} - \dots - a(N)X^{-N}}$$

jouera un rôle clef pour "décorrélér" l'entrée e ou voir si elle est présente ou non dans le contenu d'une entrée plus complexe. Dans le contexte du traitement de la parole, ceci sera l'un de nos objectifs dans la suite du cours.