COURS MIAS 301 (Algèbre)

Alain Yger

7 janvier 2004

Table des matières

Chapitre 1

Réduction des endomorphismes, applications

1.1 Notions de K-homo(endo)morphisme ou d'opérateur entre K-espaces vectoriels

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbf{K}$.

En principe pour nous $\mathbf{K}$ sera le corps des nombres réel $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$ mais l'on pourrait tout aussi bien envisager des corps finis du type $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier, tels $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (corps à 2 éléments familier aux informaticiens) :

$$\begin{cases} 1 = & \textit{le courant passe} \\ 0 = & \textit{l'interrupteur est fermé}, \end{cases}$$

ou des corps infinis tels $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$,..., en relation avec l'arithmétique.

Une application <u>$\mathbf{K}$-*linéaire*</u> de E dans F est une application T de E dans F telle que, pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in E$, pour tout λ, μ dans $\mathbf{K}$, on ait :

$$T(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y})\,. \tag{1.1}$$

L'espace E est dit <u>*espace source*</u>; l'espace F est, lui, dit <u>*espace but*</u>. Le physicien préfèrera utiliser le qualificatif d'<u>*d'opérateur*</u> (ou <u>*de* $\mathbf{K}$-*opérateur de* E *dans* F</u> si le besoin s'avère de préciser le corps de base, la source et le but) pour qualifier une telle application $\mathbf{K}$-linéaire. On parle aussi d'<u>*homomorphisme*</u> entre $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de E dans F pour qualifier une telle application $\mathbf{K}$-linéaire; si $E = F$, on dit qu'un tel $\mathbf{K}$-homomorphisme est un <u>$\mathbf{K}$-*endomorphisme*</u> de E. Il faut toutefois noter que lorsque E et F ne sont pas des espaces de dimension finie, les seuls opérateurs que l'on manipulera dans le cadre de l'analyse ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbb{C}$) sont ceux ayant certaines propriétés de continuité. Comme dans ce cours, nous travaillerons essentiellement dans le cadre des espaces de dimension finie, la notion d'opérateur (c'est à dire d'application linéaire sans précision additionnelle) suffira à nos besoins.

Un cas important est donc celui où E et F sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Ceci revient à dire que la donnée d'un élément de E (resp. F) est assujettie à la donnée d'un nombre <u>fini</u> m (resp. n) de paramètres scalaires (c'est-à-dire appartenant au corps $\mathbf{K}$) linéairement "indépendants"sur $\mathbf{K}$.

L'espace $\mathbf{K}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$ est ainsi le prototype du $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie : en effet tout $\mathbf{K}$- espace vectoriel E de dimension finie est $\mathbf{K}$-isomorphe à un unique tel $\mathbf{K}$-espace $\mathbf{K}^N$, celui pour lequel N représente la *dimension* de l'espace, c'est-à-dire le cardinal de n'importe quelle famille génératrice minimale, ou de n'importe famille libre maximale. On appelle précisément *base* d'un tel $\mathbf{K}$-espace E toute famille libre maximale (au sens où, si on lui ajoute un élément, elle cesse d'être libre) ou, ce qui est équivalent, toute famille génératrice minimale, au sens où, si on lui retire un élément, elle cesse d'être génératrice).

- Si par exemple E et F sont de dimension respectives m et n et sont rapportés à des bases $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m)$ pour E et $(\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n)$ pour F et si T est un $\mathbf{K}$-homomorphisme de E dans F, la *matrice* de l'opérateur T relativement aux choix de bases $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m)$ et $\mathcal{B}_F := (\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n)$ est le tableau (à n lignes et m colonnes) suivant :

$$M_{T,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} = [C_1 \ \cdots \ C_m]\,,$$

  où C_j, $j = 1, ..., m$ désigne le tableau à 1-colonne et n-lignes (on dit *le tableau-colonne*)

$$C_j := \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix},$$

  où les scalaires $(a_{1,j}, ..., a_{n,j})$ sont donnés par la relation

$$T(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \vec{f}_i\,;$$

  ces scalaires sont parfaitement déterminés puisque $(\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n)$ constitue une base de l'espace-but F. Notons que pour nous, pour un élément $a_{i,j}$ extrait d'une matrice M, i désignera l'indice de LIGNE, j l'indice de COLONNE (ceci n'est bien sûr qu'une convention de notation !)
- Réciproquement, la donnée d'un tel tableau, couplée avec le choix d'une base $\mathcal{B}_E$ de E et d'une $\mathcal{B}_F$ de F, induit la donnée d'un opérateur de E dans F, celui qui transforme le vecteur

$$\vec{V} = x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_m \vec{e}_m$$

  en le vecteur

$$\begin{aligned} T(\vec{V}) &= \sum_{j=1}^{m} x_j T(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{m} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \vec{f}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j \right) \vec{f}_i\,. \end{aligned}$$

Lorsque E et F ne sont plus des espaces de dimension finie, mais par exemple des espaces de fonctions, on peut dans le cadre de la *modélisation*, transposer l'étude d'un opérateur de E dans F en celle d'un opérateur entre deux espaces de dimension finie : par exemple, soit E le $\mathbb{R}$-espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et T un opérateur de E dans E tel qu'il existe une constante C telle, pour toute fonction $f \in E$,

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \leq 1 \Longrightarrow \sup_{t\in[0,1]} |T[f](t)| \leq C\,,$$

ce qui correspond à la clause de "continuité" sur le système physique que l'opérateur T régit que nous évoquions plus haut. On modélise les fonctions continues sur $[0,1]$ en se fixant un pas $\tau = 1/N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) et en décidant, plutôt que de considérer une fonction f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, de considérer la suite finie

$$\big(f(0), f(1/N), ..., f((N-1)/N), f(1)\big) \in \mathbb{R}^{N+1}$$

(ou encore de confondre f avec la fonction affine par morceaux interpolant les valeurs de f aux points $0, 1/N, ..., (N-1)/N, 1$), ce qui correspond à la "vision" de f qu'affiche l'écran d'une calculette ou celui d'un ordinateur) ; une fois pareille modélisation réalisée, l'opérateur T se trouve, lui, modélisé par un opérateur de $\mathbb{R}^{N+1}$ dans $\mathbb{R}^{N+1}$, à savoir l'opérateur T_N :

$$\begin{aligned} T_N \quad : \quad & (y_0, ..., y_N) \in \mathbb{R}^{N+1} \\ \to \quad & \big(T[f_{N,y}](0), T[f_{N,y}](1/N), ..., T[f_{N,y}]((N-1)/N), T[f_{N,y}](1)\big) \in \mathbb{R}^{N+1}, \end{aligned}$$

où $f_{N,y}$ désigne la fonction affine par morceaux qui prend les valeurs $y_0, ..., y_N$ respectivement aux points $0, 1/N, ..., (N-1)/N, 1$. Dans ce cours, on se limitera aux opérateurs entre espaces de dimension finie, avec cependant en tête ce concept de modélisation permettant de transcrire dans le cadre de l'analyse numérique l'étude de l'action sur les êtres physiques de systèmes (ou d'appareils) physiques.

1.2 Valeur propre, vecteur propre

1.2.1 Le contexte et les concepts

Dans ce paragraphe, on considère deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E (source) et F (but) tels que F soit un sous-$\mathbf{K}$-espace vectoriel de E.

Exemple. Un cas typique que l'on peut ramener à ce cadre est celui où E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $n = \dim F \leq m = \dim E$: en effet, dans ce cas, on sait que E est isomorphe à $\mathbf{K}^m$, tandis que F est isomorphe à $\mathbf{K}^n$, lui-même étant isomorphe au sous-espace $\mathbf{K}^n \times \{\vec{0}_{\mathbf{K}^{m-n}}\}$ de $\mathbf{K}^m$; on peut donc bien considérer (aux isomorphismes près) F comme un sous-espace de E dans ce cas. Notons d'ailleurs que si E et F sont de dimension finie et si T est une application linéaire de E dans F, l'image de E par T est un sous-espace $\operatorname{Im} T$ tel que

$$\dim E = \dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Ker} T), \tag{1.2}$$

donc tel que $\dim(\operatorname{Im} T) \leq \dim E$; en considérant T opérateur de E dans $\operatorname{Im} T$ plutôt que de E dans F, on se ramène bien au cadre où F est de dimension inférieure où égale à celle de E.

Si T est un opérateur de E dans F (dans le cadre ci-dessus), il est très important de mettre en évidence les vecteurs non nuls de E (s'il en existe) que l'opérateur T préserve (aux homothéties près) ; ces êtres sont les *vecteurs propres* de l'opérateur T associés à une valeur propre non nulle ; les êtres non nuls que l'action de T dissimule (c'est-à-dire les vecteurs $\vec{V}$ de $E \setminus \{\vec{0}_E\}$ tels que $T(\vec{V}) = \vec{0}$) jouent aussi un rôle capital : il est essentiel de les connaître pour savoir ce que l'action de T dissimule, ce sont les éléments non nuls du noyau de T. Ces éléments non nuls constituent l'ensemble des *vecteurs propres associés à la valeur propre* 0.

Définition 1.1 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels tels que F soit un sous-$\mathbf{K}$-espace vectoriel de E et T un opérateur $\mathbf{K}$-linéaire de E dans F. On dit qu'un* *vecteur $\vec{V}$ non nul de E est un* <u>*vecteur propre*</u> *(au sens algébrique) de T associé à une valeur propre non nulle s'il existe un élément de $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que*

$$T(\vec{V}) = \lambda \vec{V}\,;$$

un tel $\lambda \in \mathbf{K}^*$ est alors unique et le vecteur propre $\vec{V}$ est dit associé à la valeur propre non nulle λ. Les vecteurs $\vec{V}$ non nuls du noyau de T (s'il en existe) sont dits vecteurs propres (au sens algébrique) de T associés à la valeur propre 0.

Remarque I.1. Les deux catégories de vecteurs propres que nous avons défini (suivant que le vecteur propre soit associé à la valeur propre 0 ou non) jouent des rôles foncièrement différents du point de vue pratique.

Remarque I.2. Notons aussi (du point de vue de la terminologie des physiciens) que si

$$t \to T(t)$$

désigne une famille d'opérateurs de E dans F évoluant autour du temps, tout phénomène physique du type

$$t \to \vec{V}(t)\,,$$

avec, pour un certain $\lambda \in \mathbf{K}$ et pour tout t dans l'intervalle temporel d'étude,

$$T(\vec{V}(t)) = \lambda \vec{V}(t)$$

est dit <u>*mode propre*</u> du système $t \to T(t)$.

Définition 1.2 *Soient E, F, T comme ci-dessus. S'il existe des vecteurs propres associés à un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}^*$, le noyau de l'opérateur*

$$\vec{V} \to T(\vec{V}) - \lambda \vec{V}$$

est dit sous-espace propre attaché à la valeur propre λ (au sens algébrique) ; si le noyau de T n'est pas réduit à $\{0_E\}$, on dit que $\operatorname{Ker} T$ *est le sous-espace propre de T attaché à la valeur propre 0.*

1.2.2 Quelques exemples dans le cadre général

1. Si $E = F$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, un vecteur propre de l'opérateur $f \to f'$ de E dans E associé à une valeur propre non nulle $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est par définition une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = \lambda f(t)\,;$$

un tel vecteur propre est une fonction $t \to \gamma e^{\lambda t}$ avec $\gamma \in \mathbb{R}^*$; le sous-espace propre correspondant à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est de dimension 1 (engendré par l'élément $t \to e^{\lambda t}$; les vecteurs propres associées à la valeur propre 0 sont les fonctions constantes non nulles ; le noyau de T (sous-espace propre associé à la valeur propre 0) est le sous-espace de E constitué des fonctions constantes ; il est aussi de dimension 1, engendré par la fonction $t \in \mathbb{R} \to 1$.

2. Si E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, l'opérateur de E dans E qui à P associe P' n'a aucun vecteur propre associé à une valeur propre non nulle ; les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont les polynômes $P \equiv \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}^*$. L'opérateur qui à P associe le polynôme $XP(X)$ n'a, lui, aucun vecteur propre.

1.2.3 Le cas (très important) de la dimension finie

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie ; nous avons la propriété suivante concernant les endomorphismes de E (c'est-à-dire les applications $\mathbf{K}$-linéaires de E dans E).

Proposition 1.1 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, rapporté à une base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ et T un endomorphisme de E. Soit A la matrice $M_{T,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}$; un nombre $\lambda \in \mathbf{K}^*$ est une valeur propre non nulle de T si et seulement si le rang de la matrice $A - \lambda I_n$ <u>est strictement inférieur à n</u>, ce qui signifie que les vecteurs colonnes (ou les vecteurs lignes) de cette matrice sont $\mathbf{K}$-linéairement dépendants, ou encore que <u>le déterminant de la matrice $A - \lambda I_n$ est nul</u>. Si tel est le cas, les vecteurs propres associés à cette valeur propre non nulle sont les vecteurs non nuls du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda \mathrm{Id}_E)$ (qui, lui, est le sous-espace propre associé à λ). De plus 0 est valeur propre nulle de T si et seulement si le rang de A est strictement inférieur à n (ou encore $\det A = 0$).*

Remarque I.3. En termes de physique, l'ensemble des valeurs propres d'un opérateur constitue ce que l'on appelle le <u>*spectre*</u> de l'opérateur ; l'autre notion de spectre que nous évoquerons avec l'analyse de Fourier des signaux périodiques (et qui est tout aussi familière aux physiciens, pensez au spectre d'une étoile, d'un réseau cristallin, etc...) rejoindra en fait cette notion (on attachera à un signal une matrice d'autocorrélation dont le spectre correspondra précisément au spectre du signal au sens de l'analyse de Fourier). Calculer les valeurs propres, étudier les sous-espaces propres d'un opérateur T , c'est en faire faire <u>*l'analyse spectrale*</u>.

Remarque I.4. Cette proposition à une conséquence importante ; comme le polynôme

$$\det\,(A - XI_n)$$

est de degré exactement n (comme nous le dit immédiatement la règle de développement d'un déterminant $n \times n$) et que le fait que $P \in \mathbf{K}[X]$ admette λ comme racine soit équivalent au fait que $X - \lambda$ divise P dans $\mathbf{K}[X]$, la proposition nous dit que le cardinal de l'ensemble des valeurs propres non nulles de T est au plus égal au degré du polynôme

$$\det\,(A - XI_n)\,,$$

c'est-à-dire à n.

Remarque I.5. Il peut fort bien n'exister aucun vecteur propre : c'est le cas par exemple si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et si T est la rotation vectorielle de $\mathbf{R}^2$ d'angle θ, c'est-à-dire l'opérateur de matrice dans la base canonique :

$$A := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbf{R}\,.$$

En effet, le polynôme

$$\det(A - XI_2) = X^2 - 2X\cos\theta + 1$$

n'a aucune racine réelle si $\theta \not\equiv 0$ (modulo π). On pourra aussi en exercice chercher sous quelles conditions sur $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ l'opérateur de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ dans lui-même de matrice

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})\}$. admet des vecteurs propres.

1.3 Le polynôme caractéristique d'un opérateur (en dimension finie)

1.3.1 La définition.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit T un $\mathbf{K}$-endomporphisme de E, c'est-à-dire un opérateur $\mathbf{K}$-linéaire de E dans lui-même.

On a la définition-proposition très importante suivante, qui nous permet d'attacher à T un polynôme dit *caractéristique*, contenant, via la liste de ses coefficients, beaucoup d'informations relatives à l'opérateur T lui-même (pas assez cependant pour que l'on soit à même de reconstituer T à l'aide de ce polynôme dit "caractéristique").

Définition 1.3 *Si $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_E = (\vec{\tilde{e}}_1, ..., \vec{\tilde{e}}_n)$ sont deux bases de E, alors, les deux polynômes*

$$\det(M_{T,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E} - XI_n)$$

et

$$\det(M_{T,\widetilde{\mathcal{B}}_E,\widetilde{\mathcal{B}}_E} - XI_n)$$

sont égaux (comme éléments de $\mathbf{K}[X]$); on définit ainsi un polynôme P_T de $\mathbf{K}[X]$, de degré exactement n,

$$P_T(X) := \det(M_{T,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E} - XI_n) = (-1)^n(X^n - a_1X^{n-1} + ... + (-1)^n a_n) ;$$

ce polynôme est qualifié de polynôme caractéristique de T.

Remarque I.6. Les coefficients de P_T sont des éléments de $\mathbf{K}$, ne dépendant que de T ; parmi eux, a_n (que l'on appelle le déterminant de T) s'interprète comme le déterminant de la matrice $M_{T,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}$, ce, indépendamment du choix de la base $\mathcal{B}_E$, tandis que a_1, qui représente la somme des termes diagonaux de la matrice de T dans une base arbitraire, est dit *trace* de l'opérateur T. Le mot "caractéristique" est cependant ambigü puisque par exemple les deux endomorphismes (distincts !) de $\mathbf{K}^2$ dans $\mathbf{K}^2$ de matrices respectives dans la base canonique $(1,0),(0,1))$ de $\mathbf{K}^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ont bien sûr même polynôme caractéristique $P(X) = X^2$!

Preuve. Si Q désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E$ dans la base $\widetilde{\mathcal{B}}_E$ (les colonnes de cette matrice sont par définition les colonnes des composantes des vecteurs $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ exprimés dans la base $(\vec{\tilde{e}}_1, ..., \vec{\tilde{e}}_n)$, ce qui signifie encore que cette matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\widetilde{\mathcal{B}}$ est la matrice de l'opérateur identité, considéré comme opérateur de l'espace E rapporté à la base $\mathcal{B}$, à valeurs dans l'espace E rapporté à la base $\widetilde{\mathcal{B}}$), on sait que

$$M_{T,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E} = Q^{-1} M_{T,\widetilde{\mathcal{B}}_E,\widetilde{\mathcal{B}}_E} Q \,.$$

On a donc :

$$M_{T,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E} - XI_n = Q^{-1}\Big(M_{T,\widetilde{\mathcal{B}}_E,\widetilde{\mathcal{B}}_E} - XI_n\Big)Q \;;$$

en prenant les déterminants et en utilisant les règles $\det(AB) = \det A \det B$ et $\det A \det A^{-1} = 1$ si A est inversible), on voit que les deux polynômes

$$\det(M_{T,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E} - XI_n)$$

et

$$\det(M_{T,\widetilde{\mathcal{B}}_E,\widetilde{\mathcal{B}}_E} - XI_n)$$

sont égaux (comme éléments de $\mathbf{K}[X]$). Ceci achève la preuve de ce qui était la partie “proposition” dans notre énoncé ci-dessus. $\diamondsuit$

1.3.2 Le cas particulier où K est le corps des nombres complexes ; notion d'endomorphisme trigonalisable

Le corps des nombres complexes a une propriété capitale (dite aussi théorème fondamental de l'algèbre ou <u>*théorème de d'Alembert*</u>) : tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré strictement positif a un zéro dans $\mathbb{C}[X]$; de fait, en répétant ce raisonnement, on voit que tout polynôme P de degré positif s'écrit

$$P(X) = a_0 \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{\mu_j}$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont toutes les racines distinctes de P et $\mu_1, ..., \mu_r$ leurs multiplicités ($\mu_j \in \mathbb{N}^*$ est le plus grand entier tel que $X - \lambda_j$ divise dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $d^{\mu_j - 1}/dX^{\mu_j - 1}[P]$). Dans le contexte $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, nous pouvons donc profiter du très intéressant résultat suivant, qui nous permettra (dans une base à construire) d'obtenir une réalisation plus maniable de l'opérateur T que celle donnée *a priori* (c'est-à-dire lorsque T est donné par sa matrice $M_{T,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}$, $\mathcal{B}_E$ étant une base arbitraire, c'est-à-dire sans relation particulière avec T lui-même).

Proposition 1.2 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et T un $\mathbf{K}$-endomorphisme de E. On suppose que le polynôme caractéristique de T se factorise complètement dans $\mathbf{K}$, c'est-à-dire qu'il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de $\mathbf{K}$ tels que*

$$P_T(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)$$

(des répétitions sont autorisées au sein de la suite des λ_k, $k = 1, ..., n$). Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de T dans cette base se présente sous la forme triangulaire supérieure suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \alpha_{2,3} & \dots & \alpha_{2,n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} ; \qquad (1.3)$$

on dit alors que l'endomorphisme T est <u>trigonalisable</u> sur $\mathbf{K}$ (ou aussi que la matrice qui le représente dans une base arbitraire de E est trigonalisable sur $\mathbf{K}$). Réciproquement, si T est trigonalisable sur $\mathbf{K}$, alors le polynôme P_T se factorise sous la forme

$$P_T(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j) ,$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les éléments diagonaux de la matrice de T dans une base quelconque où cette matrice est triangulaire supérieure.

Cette proposition induit, dans le cas particulier $\mathbf{K} = \mathbb{C}$, le corollaire très important suivant :

Corollaire 1.1 *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ; tout $\mathbb{C}$-endomorphisme de E est trigonalisable sur $\mathbb{C}$; si de plus les coefficients de la matrice de T dans une base donnée $\mathcal{B}$ sont à coefficients dans un sous-corps $\mathbf{K}$ de $\mathbb{C}$ qui contient toutes les racines de P_T, alors T est trigonalisable dans une base $\tilde{B}$ dont les vecteurs sont des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbf{K}$ des vecteurs de $\mathcal{B}$.*

Preuve de la proposition.

Preuve dans le sens direct :

On prouve le résultat par récurrence sur la dimension n de l'espace.

- le résultat est bien sûr acquis lorsque $n = 1$ (toute matrice à une ligne et une colonne est triangulaire supérieure !).
- admettons (hypothèse de récurrence) que si $\widetilde{T}$ est un $\mathbf{K}$-endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace $\widetilde{E}$ de dimension $n-1$ dont le polynôme caractéristique (de degré $n-1$) se factorise en facteurs de degré 1 dans $\mathbf{K}[X]$, alors $\widetilde{T}$ est trigonalisable (comme $\mathbf{K}$-endomorphisme de $\widetilde{E}$).
- On part d'un $\mathbf{K}$-endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est factorisable avec des facteurs de degré 1

$$P_T(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)\,.$$

Notre but final est de montrer qu'alors T est trigonalisable.

Nous savons pour l'instant que $P_T(\lambda_1) = 0$, ce qui permet d'affirmer qu'il existe un vecteur propre $\vec{V}_1$ correspondant à la valeur propre λ_1.

La démarche pratique pour trouver $\vec{V}_1$:

Pour trouver explicitement ce vecteur propre, voici comment l'on procède : on se donne une base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de E et l'on écrit la matrice $M_{T,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E} = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ de T dans cette base. Comme λ_1 est valeur propre, la matrice

$$M_{T-\lambda_1 \mathrm{Id}_E,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E} = \begin{pmatrix} a_{1,1}-\lambda_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda_1 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}-\lambda_1 & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n}-\lambda_1 \end{pmatrix}$$

est de rang $r_1 < n$; ceci signifie que l'on peut, en rayant $n - r_1$ certaines lignes et $n - r_1$ certaines colonnes du tableau, fabriquer une matrice à r_1 lignes et r_1 colonnes de déterminant non nul, r_1 étant le plus grand entier entre 0 et n ayant cette propriété. Pour fixer les idées, supposons que le mineur

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda_1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r_1} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda_1 & \cdots & a_{2,r_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r_1,1} & a_{r_1,2} & \cdots & a_{r_1,r_1}-\lambda_1 \end{vmatrix}$$

soit non nul ; les vecteurs du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_1 dépendent de $n - r_1$ paramètres (libres), $\xi_{r_1+1}, ..., \xi_n$, et s'écrivent donc sous la forme

$$\vec{V} = L_1(\xi)\vec{e}_1 + \cdots L_{r_1}(\xi)\vec{e}_{r_1} + \sum_{r_1+1}^{n} \xi_j \vec{e}_j\,,$$

où $L_1(\xi), ..., L_{r_1}(\xi)$ s'obtiennent en fonction de $\xi_{r_1+1}, ..., \xi_n$ en résolvant le système de Cramer :

$$\begin{aligned}
(a_{1,1}-\lambda_1)L_1(\xi)+\sum_{j=2}^{r_1} a_{1,j}L_j(\xi) &= -\sum_{j=r_1+1}^{n} a_{1,j}\xi_j \\
\dots &= \dots \\
\sum_{j=1}^{r_1-1} a_{r_1,j}L_j(\xi)+(a_{r_1,r_1}-\lambda_1)L_{r_1}(\xi) &= -\sum_{j=r_1+1}^{n} a_{r_1,j}\xi_j
\end{aligned}$$

Une fois $\vec{V}_1$ construit (on choisit arbitrairement $\xi_{r_1+1}, ..., \xi_n$ non tous nuls pour trouver un vecteur propre $\vec{V}_1$ arbitraire), on complète la famille $\{\vec{V}_1\}$ en une base $(\vec{V}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ de E (c'est le théorème d'algèbre linéaire dit *de la base incomplète* auquel on a recours ici). On considère ensuite le $\mathbf{K}$-sous-espace vectoriel (de dimension $n-1$) $\widetilde{E}$ de E engendré par $\vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ et le $\mathbf{K}$-endomorphisme de $\widetilde{E}$ obtenu comme

$$\widetilde{T} = p_{\widetilde{E}} \circ T_{|_{\widetilde{E}}},$$

où

$$p_{\widetilde{E}}(\alpha_1\vec{V}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_n\vec{v}_n) := \alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_n\vec{v}_n .$$

Si $\widetilde{A}$ désigne la matrice de $\widetilde{T}$ dans la base $(\vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$, on voit que la matrice de T dans la base $(\vec{V}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ est

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{L} \\ \vec{\mathbf{0}} & \widetilde{A} \end{pmatrix}$$

où $L = (L(2), ..., L(n))$ est un vecteur ligne de longueur $n-1$ ($L(j)$ est la première coordonnée de $T(\vec{v}_j)$ exprimé dans la base $(\vec{V}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$) et $\vec{\mathbf{0}}$ un vecteur colonne de zéros à $n-1$ composantes ; ceci induit la relation évidente entre les polynômes caractéristiques de T et $\widetilde{T}$, à savoir :

$$P_T(X) = (\lambda_1 - X)P_{\widetilde{T}}(X) ;$$

par conséquent, on a

$$P_{\widetilde{T}}(X) = (-1)^{n-1}\prod_{j=2}^{n}(X-\lambda_j)$$

et l'on peut donc appliquer à $\widetilde{T}$ ($\mathbf{K}$-endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension $n-1$) l'hypothèse de récurrence. L'opérateur $\widetilde{T}$ est donc trigonalisable dans une base $(\tilde{\vec{v}}_2, ..., \tilde{\vec{v}}_n)$ de $\widetilde{E}$. Comme

$$T(\tilde{\vec{v}}_j) = \tilde{L}(j)\vec{V}_1 + \widetilde{T}(\tilde{\vec{v}}_j) ,$$

la matrice de T dans la base $(\vec{V}_1, \tilde{\vec{v}}_2, ..., \tilde{\vec{v}}_n)$ est

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \tilde{\vec{L}} \\ \vec{\mathbf{0}} & \widetilde{B} \end{pmatrix} ,$$

où $\widetilde{B}$ est la matrice de $\widetilde{T}$ dans la base $(\tilde{\vec{v}}_2, ..., \tilde{\vec{v}}_n)$; comme $\widetilde{B}$ est triangulaire supérieure, B aussi, ce qui prouve que T est bien trigonalisable.

Preuve dans le sens réciproque :

Si A est une matrice triangulaire supérieure comme la matrice en (1.3) constituée d'éléments de $\mathbf{K}$ et dont la diagonale est la suite $\lambda_1, ..., \lambda_n$, on voit par un calcul immédiat que

$$\det(A - XI_n) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j) .$$

Si T est un $\mathbf{K}$-endomorphisme de E trigonalisable, on peut calculer son polynôme caractéristique en utilisant une base dans laquelle la matrice de T est triangulaire supérieure comme ci-dessus. Le polynôme caractéristique de T est donc bien de la forme voulue.

La preuve de la proposition 1.2 est ainsi complète. $\diamondsuit$

Preuve du corollaire 1.1. Elle repose simplement sur le fait que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos : tout élément de $\mathbb{C}[X]$ s'écrit comme un produit de facteurs du premier degré.

1.4 Le théorème de Cayley-Hamilton

Soit E un $\mathbf{K}$ espace de dimension finie n et T un endomorphisme de E ; on peut définir les itérés de T en composant T avec lui-même : on construit ainsi T, $T^2 := T \circ T$, $T^3 = T \circ T \circ T$, etc ... Si P est un élément de $\mathbf{K}[X]$,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k ,$$

on peut définir un $\mathbf{K}$-endomorphisme $P[T]$ de E en posant

$$P[T] := \sum_{k=0}^{N} a_k T^k .$$

On introduit ainsi la notion de *polynôme d'opérateur*, prélude à celle de "fonction d'opérateur" et à cet outil indispensable tant au mathématicien qu'au physicien qu'est le *calcul fonctionnel*.

Ici, il se passe des choses intéressantes, que l'on peut illustrer en pensant à la correspondance entre nombres complexes et matrices : le nombre complexe $i = e^{i\pi/2}$ correspond à la matrice de rotation

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont on voit (après un petit calcul) qu'elle vérifie

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

ceci n'est pas si surprenant puisque $i^2 + 1 = 0$; notons que $X^2 + 1$ est justement le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

plus généralement, si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×2 à coefficients complexes, on vérifiera sans mal qu'il existe un polynôme de degré 2 tel que $P(A)$ soit la matrice nulle, et que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice A dans la base canonique fait l'affaire (ce polynôme est $P_T(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$).

Étant donné un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et un opérateur T de E dans lui-même, qu'il existe un polynôme P non nul tel que $P[T]$ soit l'opérateur nul n'est pas tout à fait une surprise. L'ensemble $\mathcal{P}_N(\mathbf{K})$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ de degré inférieur ou égal à $N \in \mathbb{N}^*$ est en effet équipé d'une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $N+1$. L'application $\mathcal{L}_N$ de $\mathcal{P}_N(\mathbf{K})$ dans l'ensemble des applications linéaires de E dans lui-même (qui lui aussi est équipé d'une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n^2, comme l'est l'espace des matrices $n \times n$ auquel il s'identifie une fois fixée une base de E et les endomorphismes de E représentés par leur matrice dans cette base)

$$\mathcal{L}_N \ : \ P \in \mathcal{P}_N(\mathbf{K}) \to P[T]$$

est $\mathbf{K}$-linéaire. Comme l'image $\mathcal{L}_N(\mathcal{P}_N(\mathbf{K}))$ est toujours de dimension inférieure à n^2 (ce quelque soit la valeur de N), le théorème du rang qui assure

$$\dim\Big(\mathcal{P}_N(\mathbf{K})\Big) = \dim\Big(\mathcal{L}_N(\mathcal{P}_N(\mathbf{K}))\Big) + \dim\Big(\mathrm{Ker}\,(\mathcal{L}_N)\Big)$$

nous montre que, si $N > n^2 - 1$, le noyau de $\mathcal{L}_N$ ne peut être réduit à 0 ; il existe donc, dès que $N > n^2 - 1$, un polynôme P de $\mathbf{K}[X]$, non nul, de degré au plus N, tel que $P[T] = 0$.

De fait, on a un résultat beaucoup plus précis (que nos exemples pris dans le cadre $\mathbf{K} = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}^2$ nous le laissaient pressentir), dit *théorème de Cayley-Hamilton*. Les noms du mathématicien anglais Arthur Cayley (avocat de formation, 1821-1895, à qui l'on doit les idées de base du calcul matriciel moderne, en particulier la construction d'une opération de multiplication entre matrices traduisant la composition entre opérateurs) et de l'astronome irlandais devenu mathématicien William Hamilton (1805-1865, initiateur de la théorie des quaternions) se trouvent ainsi associés à un résultat d'algèbre linéaire majeur se situant au carrefour de leurs idées (sans doute échangées dans les années 1850-1860).

Théorème 1.1 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et T un opérateur trigonalisable de E dans lui-même ; soit P_T le polynôme caractéristique de T. Alors $P_T[T]$ est toujours l'opérateur identiquement nul. En termes de matrices, si A est la matrice de T dans une base quelconque de E, $P_T(A)$ (on substitue à la variable X la matrice A, la multiplication dans $\mathbf{K}[X]$ devenant maintenant la multiplication des matrices carrées d'ordre n) est la matrice $n \times n$ identiquement nulle. Ceci est en particulier vrai si $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ pour tout opérateur de E dans lui-même.*

Preuve. On choisit une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de E dans laquelle la matrice de T est la matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \alpha_{2,3} & \dots & \alpha_{2,n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On note E_1 le sous-espace engendré par $\vec{e}_1$, E_2 le sous-espace engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$,..., $E_n = E$ le sous-espace engendré par $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$. On a, du fait que la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure :

$$(T - \lambda_n \mathrm{Id}_E)(E_n) \subset E_{n-1}\,.$$

On a aussi

$$(T - \lambda_{n-1} \mathrm{Id}_E)(E_{n-1}) \subset E_{n-2}\,,$$

soit

$$\Big[(T - \lambda_{n-1}\mathrm{Id}_E) \circ (T - \lambda_n \mathrm{Id}_E)\Big](E_n) \subset E_{n-2}\,.$$

En continuant ainsi

$$\Big[(T - \lambda_2\mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (T - \lambda_n \mathrm{Id}_E)\Big](E_n) \subset E_1$$

et finalement

$$\Big[(T - \lambda_1\mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (T - \lambda_n \mathrm{Id}_E)\Big](E_n) \subset (T - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)(E_1) = \{\vec{0}_E\}\,.$$

Comme

$$P_T[T] = (-1)^n (T - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (T - \lambda_n \mathrm{Id}_E)$$

puisque

$$P_T(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)\,,$$

on a bien $P_T[T] = 0$. $\diamondsuit$

Remarque I.7. De fait, le résultat reste vrai pour tout opérateur d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E (de dimension n) dans lui-même, qu'il soit trigonalisable ou non, ce que nous admettrons ici, étant entendu que le cas intéressant pour nous est le cas $\mathbf{K} = \mathbb{C}$; en fait, si $\mathbf{K}$ est un corps commutatif quelconque et si $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, on voit facilement (on pourra s'en assurer lorsque $n = \dim E = 2$ ou 3) qu'il existe des polynômes "universels" $\Sigma_1, ..., \Sigma_n$ à n^2 indéterminées et à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tels que, si $[u_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ désigne la matrice d'un $\mathbf{K}$-endomorphisme quelconque T de E (rapporté à la base prescrite $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$) on ait

$$P_T(X) = (-1)^n (X^n - \Sigma_1(u) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \Sigma_n(u))$$

(notons que Σ_n est l'application déterminant). Ceci explique pourquoi la validité du théorème de Cayley-Hamilton lorsque $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ (corps dont $\mathbb{Z}$ est un précisément un sous-anneau) implique sa validité dans le cas général : si T est un $\mathbf{K}$-endomorphisme quelconque d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on a toujours $P_T[T] = 0$.

Concernant toujours les opérateurs trigonalisables d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, la factorisation du polynôme caractéristique d'un tel opérateur T induit une intéressante décomposition de l'espace E, subordonnée précisément à cet opérateur T ; cette décomposition (1.4) ci-dessous est la <u>*décomposition spectrale*</u> de l'espace E induite par l'opérateur T. Nous avons en effet la :

Proposition 1.3 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et T un $\mathbf{K}$-endomorphisme trigonalisable de E, dont le polynôme caractéristique P_T se factorise sous la forme*

$$P_T(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\mu_i} \,,$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont des éléments distincts de $\mathbf{K}$ et $\mu_1, ..., \mu_r$ des entiers strictement positifs. L'espace E se décompose alors sous la forme

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\left[(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}\right] \,, \qquad (1.4)$$

où l'opérateur $(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}$ s'obtient comme

$$(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i} = (\lambda_i \mathrm{Id}_E - T) \circ \cdots \circ (\lambda_i \mathrm{Id}_E - T) \quad (\mu_i \text{ fois})\,.$$

Remarque I.8. Signalons que si T est un $\mathbf{K}$-endomorphisme trigonalisable d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, dont le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P_T(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\mu_i}$$

avec $\lambda_1, ..., \lambda_r$ distincts dans $\mathbf{K}$, les sous-espaces

$$F_i := \mathrm{Ker}(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i} \,, \quad i = 1, ..., r,$$

intervenant dans la décomposition spectrale (1.4) de E relativement à T sont dits *sous-espaces caractéristiques* de T ; remarquons que, pour chaque $i = 1, ..., r$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i est inclus dans le sous-espace caractéristique F_i ; cette inclusion est en général stricte.

Preuve. Les polynômes

$$Q_i(X) := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} (X - \lambda_j)^{\mu_j} \,, \quad i = 1, ..., r\,,$$

sont premiers entre eux dans $\mathbf{K}[X]$ (dans leur ensemble) ; en effet, les facteurs irréductibles de Q_i (dans l'anneau $\mathbf{K}[X]$) sont les $X - \lambda_j$, avec $j \neq i$; or $X - \lambda_j$ ne divise pas le polynôme Q_j, ce pour tout $j \neq i$. On peut donc appliquer (dans l'anneau $\mathbf{K}[X]$) le théorème de Bézout (le mathématicien et ingénieur Français Etienne Bézout, 1730-1783, tant algébriste qu'arithméticien, initia la théorie des déterminants et ce qui allait devenir la géométrie algébrique), qui nous assure l'existence de polynômes $U_1, ..., U_r$ de $\mathbf{K}[X]$ tels que

$$1 = \mathrm{PGCD}\,(Q_1, ..., Q_r) = \sum_{i=1}^{r} U_i Q_i \,.$$

Cette identité algébrique entre polynômes (de la variable X) induit l'identité entre opérateurs :

$$\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{r} U_i[T] \circ Q_i[T] \,, \qquad (1.5)$$

où $U_i[T]$ (resp. $Q_i[T]$) s'obtient en substituant l'opérateur T à la variable X dans l'expression du polynôme U_i (resp. Q_i) ; la seule chose importante à souligner ici est que deux opérateurs de la forme

$$a_0T^k + a_1T^{k-1} + \cdots + a_k\mathrm{Id}_E \quad , \quad b_0T^l + b_1T^{l-1} + \cdots + b_l\mathrm{Id}_E$$

(où les coefficients a_s et b_t, $s = 0, ..., k$, $t = 0, ..., l$, sont des éléments de $\mathbf{K}$) commutent, ce qui ôte toute équivoque au maniement formel de $U_i[T]$, $Q_i[T]$, Id_E en place des polynômes $U_i, Q_i, 1$, $i = 1, ..., r$.

Soit $\vec{V}$ un vecteur quelconque de E ; en appliquant à $\vec{V}$ les deux opérateurs (égaux) figurant aux deux membres de (1.5), on trouve :

$$\vec{V} = \sum_{j=1}^{r} \Big(U_i[T] \circ Q_i[T]\Big)(\vec{V}) = \sum_{j=1}^{r} Q_i[T]\Big(U_i[T](\vec{V})\Big)$$

(les opérateurs $U_i[T]$ et $Q_i[T]$ commutant et la composition des opérateurs étant une opération associative). Posons, pour tout $i = 1, ..., r$,

$$\vec{V_i} := Q_i[T]\Big(U_i[T](\vec{V})\Big) ;$$

on remarque que, pour tout $i = 1, ..., r$,

$$\Big[(T - \lambda_i\mathrm{Id}_E)^{\mu_i}\Big](\vec{V_i}) = (-1)^n P_T[T]\Big(U_i[T](\vec{V})\Big) = 0$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton (théorème 1.1) : en effet, on a l'identité algébrique

$$(X - \lambda_i)^{\mu_i} Q_i(X) = (X - \lambda_i)^{\mu_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} (X - \lambda_j)^{\mu_j} = (-1)^n P_T(X)$$

pour $i = 1, ..., r$. Le vecteur $\vec{V_i}$ est donc dans le noyau de $(\lambda_i\mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}$ et le fait que

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{r} \vec{V_i}$$

montre que l'espace E est bien inclus dans la somme des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\Big[(\lambda_i\mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}\Big]$, $i = 1, ..., r$.

Reste à vérifier que cette somme est bien une somme directe, ce que l'on fait en s'assurant que si les vecteurs $\vec{V_i} \in \mathrm{Ker}\,(\lambda_i\mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}$, $i = 1, ..., r$, sont tels que

$$\sum_{i=1}^{r} \vec{V_i} = 0\,, \tag{1.6}$$

alors tous les $\vec{V_i}$ sont nuls. Ecrivons par exemple (1.6) sous la forme

$$\vec{V_1} = -\sum_{j=2}^{r} \vec{V_j} ;$$

le vecteur $\vec{V_1}$ est donc dans l'intersection du noyau de $(\lambda_1\mathrm{Id}_E - T)^{\mu_1}$ et de celui de l'opérateur $Q_1[T]$: en effet, on vérifie immédiatement que $Q_1[T](\vec{V_j}) = 0$ pour

$j = 2, ..., n$ puisque le polynôme $(X - \lambda_j)^{\mu_j}$, $j = 2, ..., r$, est un facteur de Q_1. Mais puisque les polynômes $(X - \lambda_1)^{\mu_1}$ et Q_1 sont premiers entre eux dans $\mathbf{K}[X]$, il existe deux polynômes A_1 et B_1 de $\mathbf{K}[X]$ tels que :

$$1 = \mathrm{PGCD}\Big((X - \lambda_1)^{\mu_1}, Q_1\Big) = A_1(X)(X - \lambda_1)^{\mu_1} + B_1(X)Q_1(X) \;;$$

en substituant comme auparavant T à X, il vient l'identité entre opérateurs :

$$\mathrm{Id}_E = A_1[T] \circ (T - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)^{\mu_1} + B_1[T] \circ Q_1[T] \;; \tag{1.7}$$

comme $\vec{V}_1$ est à la fois dans le noyau de $(\lambda_1 \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_1}$ et dans celui de $Q_1[T]$, on a, en appliquant à $\vec{V}_1$ les deux membres de (1.7),

$$\vec{V}_1 = A_1[T]\Big([T - \lambda_1 \mathrm{Id}_E]^{\mu_1}(\vec{V}_1)\Big) + B_1[T]\Big(Q_1[T](\vec{V}_1)\Big) = 0\,.$$

On montrerait de manière identique $\vec{V}_2 = \ldots = \vec{V}_r = 0$. On a ainsi prouvé que la somme des sous-espaces $\mathrm{Ker}\left[(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}\right]$ était bien une somme directe, ce qui achève de prouver notre proposition. $\diamondsuit$

Un corollaire de cette décomposition est la proposition suivante, concernant toujours les $\mathbf{K}$-endomorphismes trigonalisables.

Proposition 1.4 *Soit T un $\mathbf{K}$-endomorphisme trigonalisable d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n, tel que le polynôme caractéristique de T se factorise dans $\mathbf{K}[X]$ sous la forme :*

$$P_T(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\mu_i}\,, \tag{1.8}$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont des éléments distincts du corps $\mathbf{K}$ et $\mu_1, ..., \mu_r$ des entiers strictement positifs. Pour tout $i = 1, ..., r$, on a

$$\dim\Big(\mathrm{Ker}\left[(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}\right]\Big) = \mu_i\,. \tag{1.9}$$

Preuve. On remarque dans un premier temps que la restriction de T au sous-espace

$$F_i := \mathrm{Ker}\left[(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}\right]$$

est un $\mathbf{K}$-endomorphisme du sous-espace F_i ; en effet, si $\vec{V}_i \in F_i$, on a

$$\left[(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i} \circ T\right](\vec{V}_i) = T\Big((\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}(\vec{V}_i)\Big) = 0\,,$$

toujours en vertu du principe que si P et Q sont deux éléments de $\mathbf{K}[X]$, les endomorphismes $P[T]$ et $Q[T]$ commutent. On peut donc considérer cette restriction comme un $\mathbf{K}$-endomorphisme T_i du $\mathbf{K}$-espace vectoriel F_i. En considérant l'expression de la matrice de T dans une base dont les premiers vecteurs $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{l_i}$ constituent une base de F_i (le théorème de la base incomplète assure l'existence d'une telle base), on voit que le polynôme caractéristique de T_i (considéré comme endomorphisme de $F_i = \mathbf{K}\vec{e}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{K}\vec{e}_{l_i}$) divise (dans $\mathbf{K}[X]$) le polynôme P_T ; il résulte du théorème 1.1 que T_i est trigonalisable (comme $\mathbf{K}$-endomorphisme de F_i) et que sa matrice dans une base adaptée de F_i est triangulaire supérieure ; de plus, comme

$$(\lambda_i \mathrm{Id}_{F_i} - T_i)^{\mu_i} = 0\,, \tag{1.10}$$

le polynôme caractéristique P_{F_i,T_i} de T_i (considéré comme $\mathbf{K}$-endomorphisme de F_i) ne peut avoir comme seule racine que λ_i, car si $\vec{V_i} \in F_i$ est un vecteur propre de T_i correspondant à la valeur propre $\lambda \in \mathbf{K}$, on a nécessairement, d'après (1.10)

$$(\lambda_i - \lambda)^{\mu_i} \vec{V_i} = 0\,,$$

soit donc $\lambda = \lambda_i$. Le polynôme caractéristique de T_i s'écrit donc forcément

$$P_{F_i,T_i}(X) = (-1)^{l_i}(X - \lambda_i)^{l_i}\,,$$

avec $l_i \ := \dim(F_i)$; comme il est censé diviser P_T, on a $l_i \leq \mu_i$, et ce pour tout $i = 1, ..., r$. Mais, comme

$$\sum_{i=1}^{r} l_i = \dim E = n$$

(d'après le résultat de décomposition (1.4) énoncé dans la proposition 1.3) et qu'en même temps

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i = \deg P_T = n$$

(du fait de la factorisation (1.8) de P_T), on a en fait $l_i = \mu_i$ pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, ce qui est l'assertion que l'on cherchait à établir. $\diamondsuit$

1.5 Notion de polynôme minimal ; opérateurs diagonalisables

1.5.1 Polynôme minimal d'un opérateur

On vient de voir (théorème de Cayley-Hamilton) que si T est un $\mathbf{K}$-endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, on a toujours $P_T[T] = 0$; ceci a été démontré au moins si $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et l'on a mentionné (remarque I.7) pourquoi le résultat était vrai lorsque $\mathbf{K}$ était un corps commutatif quelconque. Dans cette section, bien qu'il n'y ait de fait aucune restriction sur $\mathbf{K}$, on pourra supposer que c'est l'un des trois corps “classiques” $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

L'anneau des polynômes $\mathbf{K}[X]$ a une propriété cruciale : il est *principal*, ce qui signifie que tout idéal I de $\mathbf{K}[X]$ s'écrit sous la forme

$$I = \{aP\,;\, P \in \mathbf{K}[X]\}$$

où $a \in \mathbf{K}[X]$ est dit *générateur* de I (un tel générateur n'étant pas nécessairement unique). Si I est un idéal différent de l'idéal nul (réduit à $\{0\}$), alors, il admet un générateur non nul, et deux générateurs $a_1$et a_2 de I sont tels qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $a_1 = \lambda a_2$.

Définition 1.4 *Soit T un $\mathbf{K}$-endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ; l'ensemble des polynômes P de $\mathbf{K}[X]$ tels que $P[T] = 0$ est un idéal non réduit à $\{0\}$ de l'anneau $\mathbf{K}[X]$; on appelle polynôme minimal de T l'unique générateur de cet idéal correspondant à un polynôme unitaire (de coefficient du terme de plus degré égal à 1).*

Exemples. Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\lambda \in \mathbf{K}$, le polynôme minimal de $\lambda \mathrm{Id}_E$ est $P(X) = X - \lambda$, tandis que le polynôme caractéristique est, lui, $P_{\mathrm{Id}_E}(X) = (-1)^n (X-\lambda)^n$. Si $E = \mathbf{R}^3$, le polynôme minimal de l'endomorphisme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

est $P(X) = (X-\lambda)^2$, tandis que le polynôme caractéristique est, lui, $P_T(X) = -(X-\lambda)^3$. On voit donc sur ces exemples très simples que le polynôme minimal divise toujours le polynôme caractéristique, mais peut fort bien être de degré strictement plus petit que lui.

Justification de la définition. Si P vérifie $P[T] = 0$ et si Q est un autre élément de $\mathbf{K}[X]$, on a, pour tout $\vec{V}$ de E,

$$(QP)[T](\vec{V}) = (Q[T] \circ P[T])(\vec{V}) = Q[T]\Big(P[T](\vec{V})\Big) = 0\,;$$

d'autre part, si $P_1[T] = P_2[T] = 0$, on a $(P_1 + P_2)[T] = 0$. On voit ainsi que

$$I_T := \{P \in \mathbf{K}[X]\,;\, P[T] = 0\}$$

est bien un idéal de $\mathbf{K}[X]$. Le théorème de Cayley-Hamilton (théorème 1.1) nous assure que cet idéal contient un polynôme non nul (car de degré exactement n puisque commençant par $(-1)^n X^n + \cdots$), à savoir le polynôme caractéristique P_T de T. L'idéal I_T admet un générateur non nul ; si ce générateur est supposé unitaire, il est unique (car deux générateurs de I_T diffèrent l'un de l'autre d'un facteur multiplicatif appartenant à $\mathbf{K}^*$). La définition proposée est bien justifiée. $\diamondsuit$

Remarque I.9. Si l'on veut éviter de manier la notion d'idéal, on peut se contenter de définir le polynôme minimal de T comme le polynôme unitaire P de plus bas degré tel que $P[T] = 0$; ce polynôme Q_T divise P_T car l'algorithme d'Euclide permet d'écrire $P_T = QQ_T + R_T$ avec $\deg R_T < \deg Q_T$; si R_T était différent du polynôme nul, on aurait (en multipliant R_T par l'inverse de son coefficient dominant) un polynôme unitaire R tel que $R[T] = P_T[T] - Q \circ (Q_T[T]) = 0$ et $\deg R < \deg Q_T$, ce qui est absurde de par la définition de Q_T. On a donc $R_T = 0$, ce qui prouve que Q_T divise bien P_T dans $\mathbf{K}[X]$.

1.5.2 Opérateurs diagonalisables

Définition 1.5 *Un $\mathbf{K}$-endomorphisme T d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n est dit* <u>*diagonalisable*</u> *s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour T.*

Un opérateur diagonalisable est bien sûr trigonalisable ; sa matrice dans une base adéquate (la même à la source et au but) est même <u>*diagonale*</u> (tous les coefficients non diagonaux sont nuls), ce qui est une configuration plus simple (et donc d'un maniement en pratique plus commode) que celle qu'ont les matrices triangulaires supérieures. Voici maintenant le critère précisant quand un $\mathbf{K}$-endomorphisme dont on sait *a priori* qu'il est trigonalisable (par exemple si $\mathbf{K} = \mathbb{C}$) se trouve être diagonalisable.

Proposition 1.5 *Soit T un $\mathbf{K}$-endomorphisme trigonalisable d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n ; on suppose que*

$$P_T(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\mu_i}\,,$$

où $\lambda_1,...,\lambda_r$ sont des éléments distincts de $\mathbf{K}$ et $\mu_1,...,\mu_r$ des entiers strictement positifs. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

- *1) T est diagonalisable ;*
- *2) le polynôme minimal de T est $(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_r)$;*
- *3) pour tout $i\in\{1,...,r\}$, on a*

$$\mathrm{Ker}\left[(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}\right] = \mathrm{Ker}\,(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)\,;$$

- *4) pour tout $i \in \{1,...r\}$, le sous-espace propre de E (pour l'opérateur T) correspondant à la valeur propre λ_i est de dimension exactement μ_i ;*
- *5) on a*

$$\sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Ker}\,(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T) = n\,. \tag{1.11}$$

Remarque I.10. En un sens, le critère 4 figurant dans la proposition 1.5 est celui pour lequel le test de validité est le plus aisé : on dispose de la connaissance des valeurs propres $\lambda_1,...,\lambda_r$ de T et de leurs multiplicités $\mu_1,...,\mu_r$ (si l'on connait le polynôme caractéristique) ; c'est le calcul du rang r_i d'une matrice (celle de $\lambda_i \mathrm{Id}_E - T$ dans une base) qui nous permet de calculer la dimension $n-r_i$ du sous-espace propre correspondant à la valeur propre λ_i et donc de voir si, oui ou non, $\mu_i = n - r_i$ pour tout $i = 1,...,r$.

3) $\Longleftrightarrow$ 4) $\Longleftrightarrow$ 5) $\Longleftrightarrow$ 1)

Comme, pour tout $i\in\{1,...,r\}$, on a

$$\mathrm{Ker}\,(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T) \subset \mathrm{Ker}\left[(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}\right],$$

l'égalité des dimensions de ces deux sous-espaces inclus l'un dans l'autre équivaut à leur identité en tant que sous-espaces de E ; les assertions (3) et (4) sont donc équivalentes pourvu que l'on se souvienne de la conclusion de la proposition 1.4. La condition (3), si l'on invoque l'assertion de la proposition 1.3, équivaut donc au fait qu'il existe une base de l'espace E composée de vecteurs propres pour l'endomorphisme T, ce qui signifie par définition que T est diagonalisable.

2) $\Longrightarrow$ 1)

Supposons que le polynôme minimal Q_T de T soit $(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_r)$; puisque les polynômes

$$Q_i(X) \; = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} (X-\lambda_j)\,, \quad i=1,...,r\,,$$

sont premiers entre eux (dans $\mathbf{K}[X]$) dans leur ensemble, il existe des polynômes $U_1,...,U_r$ de $\mathbf{K}[X]$ tels que

$$1 = U_1 Q_1 + \cdots + U_r Q_r\,.$$

On a alors l'identité entre opérateurs

$$\mathrm{Id}_E = U_1[T]\circ Q_1[T] + \cdots + U_r[T]\circ Q_r[T]\,;$$

tout vecteur $\vec{V}$ de E s'écrit donc

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{r} Q_i[T]\Big(U_i[T](\vec{V})\Big)\,;$$

comme $(T-\lambda_i)\circ Q_i = Q_T$ et que $Q_T[T]=0$, le vecteur $Q_i[T](U_i[T](\vec{V}))$ est dans le noyau de l'opérateur $\lambda_i \mathrm{Id}_E - T$; on a donc

$$E = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)\,.$$

comme

$$\mathrm{Ker}\,(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T) \subset \mathrm{Ker}\,\left[(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}\right]$$

et que E est somme directe des sous-espaces $\mathrm{Ker}\,\left[(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}\right]$ pour $i=1,...,r$ (proposition 1.3), on en déduit que E est aussi somme directe des sous-espaces $\mathrm{Ker}(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)$ pour $i=1,...,r$, donc que E est diagonalisable.

1) $\Longrightarrow$ 2)

Supposons T diagonalisable et soit Q_T son polynôme minimal. Les valeurs propres de T sont les racines de P_T, soit $\lambda_1,...,\lambda_r$; soit T_i la restriction de T au sous-espace propre F_i associé à la valeur propre λ_i ; on a $Q_T[T_i]=0$ (comme endomorphisme de F_i, puisque $Q[T_i]$ n'est rien d'autre que la restriction de $Q[T]$ à F_i) ; on a donc $Q_T(\lambda_i)=0$, ce qui prouve que Q_T est divisible forcément par $(X-\lambda_1),...,(X-\lambda_r)$, donc, d'après le lemme de Gauss, par le produit $(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_r)$ de ces polynômes premiers entre eux deux-à-deux. On voit tout de suite, du fait que E admet une base de vecteurs propres, que

$$(T-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)\circ\cdots\circ(T-\lambda_r \mathrm{Id}_E) = 0\,,$$

ce qui prouve que le polynôme minimal Q_T de T doit aussi diviser $(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_r)$; le seul choix possible est donc

$$Q_T(X) = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_r)\,,$$

ce qui prouve 2).

La proposition est ainsi complètement démontrée. $\diamondsuit$

Remarque I.11. Un cas particulier très important où l'on peut affirmer que l'opérateur T est diagonalisable est celui où le polynôme caractéristique P_T de T admet exactement n valeurs propres distinctes. En effet, on a vu dans ce cas (preuve de l'implication 1) $\Longrightarrow$ 2) de la proposition 1.5) que les racines de P_T sont automatiquement racines du polynôme minimal, ce qui implique que ce polynôme minimal Q_T s'écrive alors

$$Q_T(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i) = (-1)^n P_T(X)\ ;$$

le polynôme Q_T est scindé en facteurs du premier degré n'a donc que des racines simples (dans $\mathbf{K}$), ce qui implique que T est diagonalisable dans ce cas (proposition 1.5). Dans le cas particulier où $\mathbf{K}=\mathbb{C}$, pareille situation n'a rien d'exceptionnel (c'est même, en un certain sens, la situation "générique") : on peut en effet démontrer (ce résultat sort du cadre de ce cours et sera vu plus tard dans les cours d'algèbre ultérieurs) que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Δ_n en n variables à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que le polynôme

$$P(X) = X^n - a_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n\,, \quad a_j\in\mathbb{C}\,,\ j=1,...,n\,,$$

n'a que des racines simples (dans $\mathbb{C}$) si et seulement $\Delta_n(a_1,...,a_n)\neq 0$; si le polynôme caractéristique d'un opérateur T a malencontreusement une racine multiple, une petite perturbation des coefficients de la matrice de T dans une base donnée fournit donc un opérateur dont le polynôme caractéristique n'a que des racines simples. Tout opérateur T d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n dans lui-même peut ainsi s'approcher par une suite d'opérateurs $(T_p)_p$ diagonalisables (dire que la suite $(T_p)_p$ approche T signifie ici que si $[a_{i,j}^{(p)}]_{1\leq i,j\leq n}$ désigne la matrice de T_p dans une base $\{e_1,...,e_n\}$ et $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ celle de T dans la même base, on a, pour tout $i,j \in \{1,...,n\}$, $\lim_{p\to\infty} a_{i,j}^{(p)} = a_{i,j}$).

Le principe heuristique sous-jacent à cette remarque tient en deux faits, distinguant complètement les situations où $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbf{K} = \mathbb{C}$:

- si $\mathbf{K} = \mathbb{C}$, on peut affirmer que "génériquement" tout opérateur linéaire d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n dans lui-même est diagonalisable ; les cas où il ne l'est pas (ou peut ne pas l'être) correspondent à des cas pathologiques (il y a une relation entre les coefficients qui correspond au fait que le polynôme caractéristique a au moins une racine multiple, par exemple
$$(\mathrm{Tr}\,[T])^2 - 4\det[T] = 0$$
si $n = 2$) ; bien sûr, dans le cas $\mathbf{K} = \mathbb{C}$, tout opérateur est de toutes façons trigonalisable ;
- si $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, on peut affirmer à l'inverse qu'un opérateur linéaire d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n a toute chance de ne pas être trigonalisable ; les cas où il l'est correspond à une situation assez rare (au moins lorsque n est grand) celle où le polynôme caractéristique (qui se scinde dans $\mathbb{C}[X]$ en facteurs du premier degré d'après le théorème de d'Alembert) a toutes ses racines réelles ; dans le cas $n = 2$, c'est la condition
$$(\mathrm{Tr}\,[T])^2 - 4\det[T] \geq 0$$
qui assure que T est trigonalisable ; dans le cas $n = 3$, il y a toujours une valeur propre réelle, mais il faut que les deux autres valeurs propres le soient aussi, ce qui se traduit par des inégalités impliquant les trois coefficients a_1, a_2, a_3 du polynôme caractéristique ; plus n augmente, plus cette contrainte concernant le fait que les n racines de P_T soient toutes réelles se fait plus drastique. Comme $\mathbb{R}$ est négligeable dans $\mathbb{C}$ (c'est une droite dans $\mathbb{C}$!), il est beaucoup plus fréquent de rencontrer des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ayant au moins une paire de racines complexes (et non réelles) conjuguées deux à deux que des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ayant toutes leurs racines réelles !

1.6 Les opérateurs nilpotents

Revenons sur la conclusion des propositions 1.3 et 1.4 ; soit T un $\mathbf{K}$-endomorphisme trignonalisable d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, dont le polynôme caractéristique se scinde dans $\mathbf{K}[X]$ sous la forme :
$$P_T(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\mu_i}\,,$$
où $\lambda_1, ..., \lambda_r$, sont des éléments distincts du corps de base $\mathbf{K}$ et $\mu_1, ..., \mu_r$ des entiers strictement positifs.

Comme on l'a vu, le sous-espace F_i défini, pour $i \in \{1, ..., r\}$ par
$$F_i := \mathrm{Ker}\,(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}$$
est un sous-espace (de dimension μ_i d'après la proposition 1.4) tel que
$$T(F_i) \subset F_i$$
et
$$(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)(F_i) \subset F_i$$
(toujours parce que deux polynômes $Q_1[T]$ et $Q_2[T]$ en le même opérateur T commutent). Mais on a mieux : la restriction S_i de l'opérateur $T - \lambda_i \mathrm{Id}_E$ au sous-espace F_i est un opérateur tel que
$$S_i^{\mu_i}(F_i) = 0$$

($S_i^{\mu_i}$ désignant l'itération μ_i-fois de l'opérateur S_i, considéré comme $\mathbf{K}$-endomorphisme de l'espace F_i).

Remarquons que l'opérateur S_i, considéré comme un $\mathbf{K}$-endomorphisme du $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie F_i, admet comme polynôme caractéristique le polynôme

$$P_{F_i,S_i}(X) := (-1)^{\mu_i} X^{\mu_i}$$

et donc comme polynôme minimal (toujours en tant qu'endomorphisme de F_i) un polynôme de la forme

$$Q_{F_i,S_i}(X) = X^{l_i}$$

avec $1 \leq l_i \leq \mu_i$. L'opérateur S_i, opérateur du $\mathbf{K}$-espace vectoriel F_i dans lui-même, entre dans une classe d'opérateurs intéressante, celle des opérateurs <u>*nilpotents*</u>, c'est-à-dire dont une puissance (au sens de l'itération des opérateurs) est nulle.

Concernant cette classe d'opérateurs, nous avons la proposition intéressante suivante :

Proposition 1.6 *Soit S un $\mathbf{K}$-opérateur nilpotent d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel F de dimension finie μ (ceci signifie qu'il existe un entier $q \geq 1$ tel que S^q soit l'endomorphisme nul). Alors, le polynôme caractéristique de S est toujours*

$$P_S(X) = (-1)^{\mu} X^{\mu}\,,$$

tandis que le polynôme minimal est, lui,

$$Q_S(X) = X^{\nu}\,,$$

où ν est par définition le plus petit entier dans $\{1, ..., \mu\}$ tel que

$$\forall\, \vec{V} \in F\,, \quad S^{\nu}(\vec{V}) = 0\,;$$

cet entier ν (degré du polynôme minimal de S) est appelé <u>période</u> de S ; si $\vec{V}$ est un vecteur de F tel que $S^{\nu-1}(\vec{V}) \neq 0$ (il en existe de par la minimalité de ν), les vecteurs

$$\vec{V}\,,\ S(\vec{V})\,,\ \cdots\,,\ S^{\nu-1}(\vec{V})$$

forment toujours un système libre.

Preuve. Pour simplifier les choses, on admet que S est trigonalisable (ceci pourrait se voir par récurrence sur la dimension n de l'espace vectoriel E) ; la seule valeur propre possible pour S étant la valeur propre 0, le polynôme caractéristique de S est

$$P_{F,S}(X) = (-1)^{\dim F} X^{\dim F} = (-1)^{\mu} X^{\mu}\,.$$

Si $\vec{V}$ vérifie $S^{\nu-1}(\vec{V}) \neq 0$ et

$$\alpha_0 \vec{V} + \alpha_1 S(\vec{V}) + \cdots + \alpha_{\nu-1} S^{\nu-1}(\vec{V}) = 0\,,$$

on a, en composant par $S^{\nu-1}$:

$$\alpha_0 S^{\nu-1}(\vec{V}) + \alpha_1 S^{\nu}(\vec{V}) + \cdots + \alpha_{\nu-1} S^{2(\nu-1)}(\vec{V}) = \alpha_0 S^{\nu-1}(\vec{V}) = 0\,,$$

soit $\alpha_0 = 0$ (car $S^{\nu-1}(\vec{V}) \neq 0$) ; en composant ensuite avec $S^{\nu-2}$, on trouve $\alpha_1 = 0$ et l'on continue ainsi de suite jusqu'à trouver tous les coefficients α_j nuls de proche en proche. La famille

$$\vec{V}\,,\, S(\vec{V})\,,\, \cdots\,,\, S^{\nu-1}(\vec{V})$$

est donc bien libre. $\diamondsuit$

Soit T un $\mathbf{K}$-endomorphisme trigonalisable d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E et

$$P_T(X) := (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\mu_i}$$

son polynôme caractéristique ($\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont r éléments distincts de $\mathbf{K}$, correspondant aux valeurs propres de T). La restriction T_i de T au sous-espace

$$F_i := \mathrm{Ker}\,(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i} \tag{1.12}$$

(cette restriction peut être considérée comme un $\mathbf{K}$-endomorphisme de F_i puisque $T(F_i) \subset F_i$ comme on l'a vu) s'écrit :

$$T_i = \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i} + S_i$$

où S_i est l'endomorphisme nilpotent de F_i défini comme la restriction à F_i de l'endomorphisme $T - \lambda \mathrm{Id}_E$.

À ce stade, nous pouvons déduire de la proposition 1.3 (décomposition spectrale de l'espace E relativement à l'opérateur T) le <u>*théorème de décomposition de Dunford*</u>, du au théoricien des opérateurs américain Nelson Dunford, auteur, avec Jacob T. Schwarz, d'un célèbre traité d'analyse fonctionnelle (1967) :

Théorème 1.2 [Décomposition de Dunford d'un opérateur T] *Tout $\mathbf{K}$-endomorphisme T trigonalisable d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E s'écrit comme la somme d'un $\mathbf{K}$-endomorphisme diagonalisable D et d'un $\mathbf{K}$-endomorphisme nilpotent S, tels que $D \circ S = S \circ D$.*

Remarque I.12. En fait, on pourrait montrer que la décomposition de Dunford $T = D + S$ d'un opérateur trigonalisable T (avec les contraintes D diagonalisable, S nilpotent, $D \circ S = S \circ D$ qui vont avec) est unique. On ne le fera pas ici pour ne pas alourdir ce cours.

Preuve. Il suffit d'exploiter le fait (voir la proposition 1.3) que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i\,,$$

où les sous-espaces F_i sont définis par (1.12) ; ceci signifie que tout $\vec{V}$ de E s'écrit de manière unique :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \cdots + \vec{V}_r$$

avec $\vec{V}_i \in F_i$ pour $i = 1, ..., r$; on définit l'opérateur D par

$$D(\vec{V}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{V}_i \tag{1.13}$$

et l'opérateur S par

$$S(\vec{V}) = S_1(\vec{V}_1) + \cdots + S_r(\vec{V}_r)\,,$$

où S_i, $i = 1, ..., r$, désigne l'opérateur nilpotent de F_i défini par

$$S_i = T_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i} ,$$

où T_i désigne la restriction de T à F_i. Il est évident (de par sa construction même) que D est diagonalisable (il suffit de prendre une base constituée en concaténant une base de F_1,..., une base de F_r, pour construire une base de E dans laquelle l'opérateur D dont l'action est définie par (1.13) est diagonalisable). Comme, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$,

$$S^p(\vec{V}) = S_1^p(\vec{V}_1) + \cdots + S_r^p(\vec{V}_r)$$

si $\vec{V} = \vec{V}_1 + \cdots + \vec{V}_r$ avec $\vec{V}_i \in F_i$ pour tout $i \in \{1, ..., r\}$ et que chaque S_i est nilpotent (vu comme $\mathbf{K}$-endomorphisme de F_i), l'opérateur S est aussi nilpotent. Le fait que S et D commutent résulte du fait que ces deux opérateurs envoient chaque F_i dans lui-même, que leurs restrictions à chaque F_i commutent, et qu'enfin E est la somme directe des F_i, $i = 1, ..., r$. $\diamondsuit$

Remarque I.13. En fait, on peut montrer (on laisse cela en exercice) que si T est trigonalisable, de polynôme caractéristique

$$P_T(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{\mu_j} ,$$

avec $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbf{K}$ distincts, il existe, pour chaque $i = 1, ..., r$, une base $\mathcal{B}_i$ de $F_i = \mathrm{Ker}\,(\lambda_i \mathrm{Id}_E - T)^{\mu_i}$ dans laquelle la matrice du $\mathbf{K}$-endomorphisme nilpoent S_i de F_i s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & [0 \text{ ou } 1] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & [0 \text{ ou } 1] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & [0 \text{ ou } 1] \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} .$$

On déduit de cela (en concaténant les bases $\mathcal{B}_i$, $i = 1, ..., r$ et en utilisant la décomposition spectrale (1.4) de la proposition 1.3) qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de l'espace dans laquelle la matrice de T se présente sous la forme d'une matrice :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_r \end{pmatrix} ,$$

où A_i est une matrice de taille $\mu_i \times \mu_i$ de la forme

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & [0 \text{ ou } 1] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & [0 \text{ ou } 1] & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & [0 \text{ ou } 1] & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_i & \end{pmatrix} .$$

Cette réduction bien pratique (seules la diagonale et la sur-diagonale de la matrice dans la nouvelle base contiennent des scalaires non nuls) est dite <u>*réduction de Jordan*</u> du $\mathbf{K}$-endomorphisme T. Camille Jordan, mathématicien francais (1838-1922), introduisit cette décomposition en étudiant le groupe des isomorphismes de l'espace $\mathbb{C}^n$.

1.7 Que faire de tout cela du point de vue pratique ?

1.7.1 Application au calcul des itérés d'un vecteur sous l'action d'un endomorphisme

La réduction des **K**-endomorphismes d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie n (opération consistant à déterminer une base $\mathcal{B}$ de l'espace E dans laquelle la matrice de T soit si possible triangulaire supérieure, diagonale, ou même de Jordan) est une opération particulièrement intéressante lorsqu'on est confronté à l'étude de l'orbite d'un élément $\vec{V}$ de E sous l'action d'un certain **K**-endomorphisme de E. L'orbite d'un élément $\vec{V}$ est par définition la suite

$$(T^p(\vec{V}))_{p\in\mathbb{N}} .$$

Si par exemple T est diagonalisable, la matrice de de T dans une base adéquate $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ de E (constituée de vecteurs propres pour T) est

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

où $\lambda_1,...,\lambda_n$ sont les valeurs propres (éventuellement répétées) de T dans **K**. Si le vecteur initial $\vec{V}$ s'écrit dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$\vec{V}=v_1\vec{e}_1+\cdots+v_n\vec{e}_n ,$$

on a alors, pour $p\in\mathbb{N}$,

$$T^p(\vec{V})=v_1\lambda_1^p\vec{e}_1+\cdots+v_n\lambda_n^p\vec{e}_n .$$

Le calcul de la suite des itérés (par T) d'un vecteur $\vec{V}$ est donc simple, une fois ce vecteur écrit dans la base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de T est diagonale.

Si T n'est pas diagonalisable, mais est trigonalisable, on utilise la décomposition de Dunford : supposons que T s'écrire $T=D+S$, où S est nilpotent de période m. Alors, il résulte du fait que D et S commutent et de la formule du binôme que pour $p\geq m$,

$$T^p=\sum_{k=0}^{m-1}\binom{k}{p}N^kD^{p-k} .$$

Si $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ est une base de vecteurs propres pour D (valeurs propres correspondantes $\lambda_1,...,\lambda_n$) et si

$$\vec{V}=v_1\vec{e}_1+\cdots+v_n\vec{e}_n ,$$

alors

$$T^p(\vec{V})=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_j^{p-k}\binom{k}{p}N^k(\vec{e}_j) .$$

1.7.2 Application au calcul de $P[T]$ si T est un K-endomorphisme de E (trigonalisable)

Soit T un $\mathbf{K}$-endomorphisme de E, P un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$,

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_M X^M ,$$

et $\mathcal{B}$ une base de E ; supposons que l'on connaisse $M_{T,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ et que l'on veuille calculer $M_{P[T],\mathcal{B},\mathcal{B}}$, où

$$P[T] = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 T + \cdots + a_M T^M .$$

On commence par effectuer la division euclidienne de P par

$$P_T(X) := \det(T - X\mathrm{Id}_E) ;$$

on a donc

$$P(X) = P_T(X)Q(X) + R(X) , \quad \deg R < n = \deg P_T ,$$

avec

$$R(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1} .$$

Le théorème de Cayley-Hamilton nous assure de ce que

$$P[T] = \alpha_0 \mathrm{Id}_E + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_{n-1} T^{n-1} .$$

On voit que la connaissance de $M_{T^p,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ pour $p \leq n-1$ suffit pour exprimer $M_{P[T],\mathcal{B},\mathcal{B}}$ pour un polynôme quelconque. Reste à calculer $M_{T^p,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ pour $p = 1, ..., n-1$ à partir de $M_{T,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ (et ce en évitant les multiplications par des matrices $n \times n$ qui "consomment" chacune n^2 multiplications, ce qui coûte bien cher si n est très grand !). Pour ce faire, il est intelligent de réduire T comme suit :

- si T est diagonalisable et si $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base de vecteurs propres ($T(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$), alors

$$M_{T,\mathcal{B},\mathcal{B}} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} ,$$

  où les colonnes de Q sont les vecteurs (colonnes) $\vec{e}_1$,...,$\vec{e}_n$ de $\mathbf{K}^n$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$; on vérifie tout de suite que

$$\begin{aligned} M_{T^p,\mathcal{B},\mathcal{B}} &= \overbrace{Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} \times Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} \times \cdots}^{p\ fois} \\ &= Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^p Q^{-1} \\ &= Q \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix} Q^{-1} ; \end{aligned}$$

d'ailleurs dans ce cas (T diagonalisable), on a, si P est un polynôme quelconque :

$$M_{P[T],\mathcal{B},\mathcal{B}} = Q \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P(\lambda_n) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

– si T est simplement supposée trigonalisable, la décomposition de Dunford (théorème 1.2) s'avère être un outil intéressant aux fins du calcul des puissances successives de T : en effet, si D est diagonalisable, S nilpotent (de période $\nu \leq n$), commutant avec S, avec $T = D+S$, alors, il suit de la formule du binôme que, pour tout $k \in N$, pour toute base $\mathcal{B}$ de E

$$M_{T^p,\mathcal{B},\mathcal{B}} = M^p_{T,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{p!}{l!(p-l)!} M^l_{S,\mathcal{B},\mathcal{B}} M^{p-l}_{D,\mathcal{B},\mathcal{B}} \ ;$$

si

$$M_{D,\mathcal{B},\mathcal{B}} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} \,,$$

on a donc

$$M_{T^p,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{p!}{l!(p-l)!} M^l_{S,\mathcal{B},\mathcal{B}} \times Q \times \begin{pmatrix} \lambda_1^{p-l} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{p-l} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{p-l} \end{pmatrix} \times Q^{-1} \,;$$

on remarque que la dépendance en p dans le membre de droite n'affecte que les coefficients binomiaux et la matrice diagonale en jeu, mais en aucun cas les termes liés à S.

1.7.3 La résolution de systèmes linéaires

Soit T un $\mathbf{K}$-endomorphisme trigonalisable d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et $\vec{W}$ un vecteur de E (considéré ici comme espace but ou espaces des sorties) ; supposons que T soit injectif et que nous voulions déterminer l'entrée $\vec{V}$ telle que $T(\vec{V}) = \vec{W}$. Du point de vue pratique, il s'agit là de quelque chose de très important.

Si T est trigonalisable, il existe une base de E dans laquelle la matrice de T sécrit

$$M_{T,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(notons que les éléments diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont non nuls puisque T est supposé injectif, donc inversible). Si $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)$ sont les coordonnées de $\vec{W}$ dans cette base, les coordonnées du vecteur-entrée $\vec{V}$ (tel que $T(\vec{V}) = \vec{W}$) s'obtiennent donc via la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n \end{pmatrix} ;$$

pareil système se résout de proche en proche (en commencant par le bas) :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\mathbf{w}_n}{\lambda_n} \\ v_{n-1} &= \frac{1}{\lambda_{n-1}}(\mathbf{w}_{n-1} - a_{n-1,n}\mathbf{w}_n) \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

On trouve ainsi le vecteur d'entrées $\vec{V}$ qui a généré en sortie le vecteur $\vec{W}$.

1.7.4 Les systèmes différentiels à coefficients constants

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f_1, ..., f_n$ n fonctions continues sur I. Soit A une matrice (n, n) à coefficients réels ; cette matrice est donc trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Supposons que $(y_1, ..., y_n)$ soient n fonctions de classe C^1 sur I telles que :

$$\forall t \in I\,, \quad \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} . \tag{1.14}$$

On peut écrire, puisque A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} ,$$

les λ_i et les $a_{j,k}$ étant, comme les coefficients de la matrice de passage Q, à coefficients complexes. Si l'on pose

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} ,$$

on peut aussi lire (1.14) comme :

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \\ \vdots \\ z_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} + Q^{-1} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix},$$

oú $g_1, ..., g_n$ sont des fonctions continues à valeurs complexes. Ce système se résout encore de proche en proche à partir du bas par quadratures successives.

Les équations linéaires d'ordre supérieur à coefficients constants se traitent de manière identique : par exemple, une équation du second ordre

$$y'' + a_0 y' + a_1 y = f\,, \qquad (*)$$

où $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ et f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ se traite en posant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

et en remarquant que l'équation différentielle équivaut au système

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_0 \end{pmatrix} \bullet Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Application "physique". Considérons deux fonctions x et y à valeurs complexes , de classe C^1 sur l'intervalle temporel $]0, +\infty[$, solutions du système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

où la matrice à coefficients complexes

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, les deux valeurs propres se situant dans le plan complexe privé de l'axe imaginaire pur. Suivant que les deux valeurs propres sont dans le demi-plan $\operatorname{Re}\lambda > 0$, dans le demi-plan $\operatorname{Re}\lambda < 0$, ou l'une dans l'un, l'autre dans l'autre, on a les trois configurations $(a), (b), (c)$ de la figure 1.1 (pour simplifier, on a représenté les vecteurs propres comme les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$, ce qui est possible en changeant de base) pour les "trajectoires" du champ de forces $(x(t), y(t))$, trajectoires que matérialiserait par exemple des particules de limaille de fer placées dans le plan et soumises à l'action du champ. La première situation est celle de point répulsif, la seconde celle de point attractif, la troisième celle de point "selle" (si l'on regarde l'évolution des points sur les trajectoires lorsque le temps tend vers $+\infty$).

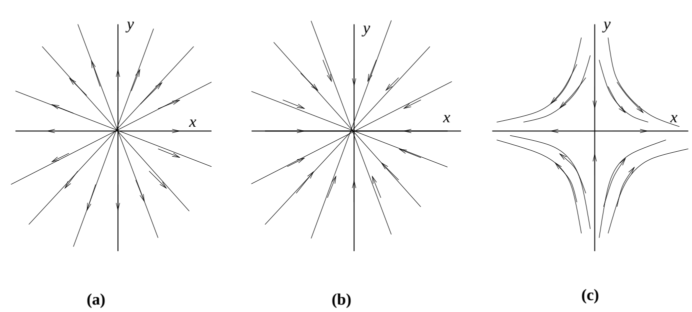

FIG. 1.1 – systèmes différentiels d'ordre 2

FIN DU CHAPITRE I

Chapitre 2

Dualité et orthogonalité

2.1 Le concept de dualité

2.1.1 Le dual E^* d'un K-espace vectoriel E

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ; on appelle **K**-*forme linéaire* (ou *forme linéaire* s'il n'y a pas d'ambigüité concernant le corps de base $\mathbf{K}$) toute application linéaire L de E dans $\mathbf{K}$.

Rappelons qu'une application linéaire (au sens algébrique) de E dans $\mathbf{K}$ est une application L de E dans le corps de base $\mathbf{K}$ telle que :

$$\forall \vec{V}\,,\, \tilde{\vec{V}} \in E\,,\ \forall \lambda\,,\, \tilde{\lambda} \in \mathbf{K}\,,\ L(\lambda \vec{V} + \tilde{\lambda}\tilde{\vec{V}}) = \lambda L(\vec{V}) + \tilde{\lambda} L(\tilde{\vec{V}})\,.$$

L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ des $\mathbf{K}$-formes linéaires d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel hérite lui aussi d'une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel, en effet :

- on peut définir de manière naturelle une addition sur $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ en posant :

  $$\forall L_1\,,\, L_2 \in \mathcal{L}(E, \mathbf{K})\,,\ L_1{+}L_2\ :\ \vec{V} \in E \to L_1(\vec{V}) + L_2(\vec{V})\,;$$

  muni de cette addition $(+)$, $(\mathcal{L}(E, \mathbf{K}), +)$ a une structure de groupe commutatif ;
- on peut définir aussi une action externe du corps $\mathbf{K}$ sur $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ en posant :

  $$\forall \lambda \in \mathbf{K}\,,\ \forall L \in \mathcal{L}(E, \mathbf{K})\,,\ \lambda \bullet L\ :\ \vec{V} \in E \to \lambda L(\vec{V})\,;$$

  muni des deux opérations $(+, \bullet)$, $(\mathcal{L}(E, \mathbf{K}), +, \bullet)$ a une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel (on vérifie immédiatement les divers axiomes).

Définition 2.1 *Étant donné un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E *(sur un corps commutatif* $\mathbf{K}$*), on appelle* <u>espace dual de E</u> *(et l'on note* E^**) l'espace vectoriel* $(\mathcal{L}(E, \mathbf{K}), +, \bullet)$ *introduit ci-dessus.*

2.1.2 Le cas particulier où E est de dimension finie ; bases, bases duales

Dans le cas particulier où E est un $\mathbf{K}$-espace de dimension finie (qui sera celui qui nous intéressera dans ce cours), la représentation matricielle est un outil commode pour "visualiser" les éléments de l'espace vectoriel dual E^* :

- rappelons que, si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base de E (que l'on suppose ici de dimension finie n sur $\mathbf{K}$), tout élément $\vec{V}$ de E se trouve "repéré" par ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et "marqué" en conséquence comme le tableau colonne

$$\vec{V} \ : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix},$$

où $x_1, ..., x_n$ sont précisément les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire les uniques scalaires de $\mathbf{K}$ tels que

$$\vec{V} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_{n-1}\vec{e}_{n-1} + x_n\vec{e}_n\,;$$

- une application linéaire L de E (rapporté à la base $\mathcal{B}$) dans $\mathbf{K}$ (rapporté à la base (1) dont l'unique vecteur est le scalaire 1, soit l'élément unité de $\mathbf{K}$) se trouve identifiée par le biais de sa matrice $M_{L,\mathcal{B},(1)}$, qui s'avère être cette fois un tableau ligne

$$M_{L,\mathcal{B},(1)} \ : \ \Big(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n\Big)\,;$$

- dans ce formalisme matriciel commode (mais qui suppose bien sûr *a priori* le choix d'une base $\mathcal{B}$ de E et l'utilisation de la <u>même</u> base pour représenter à la fois le vecteur d'entrée $\vec{V}$ et l'élément L de E^* sur lequel on le fait agir), on peut écrire :

$$\begin{aligned} L(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) &= M_{L,\mathcal{B},(1)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \Big(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n\Big) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_i\,. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, nous avons donc la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ; le dual E^* est aussi un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. De plus, si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base de E, on obtient une base $(\vec{e_1}^*, ..., \vec{e_n}^*)$ de E^* en définissant, pour $i = 1, ..., n$, l'action de la forme linéaire $\vec{e_i}^*$ par :*

$$\forall j \in \{1, ..., n\}\,,\ \vec{e_i}^*(e_j) = \begin{cases} 1 \ \ si \ j = i \\ 0 \ \ si \ j \neq i\,, \end{cases} \tag{2.1}$$

c'est-à-dire :

$$\vec{e_i}^{\,*}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) = x_i\,; \tag{2.2}$$

la base $\mathcal{B}^* := (\vec{e_1}^{\,*}, ..., \vec{e_n}^{\,*})$ de E^* ainsi construite à partir de la base $\mathcal{B}$ est dite <u>base duale</u> de $\mathcal{B}$.

Preuve. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une base de E. Comme on vient de le voir, un élément L de E^* se trouve identifié (de manière tout-à-fait biunivoque) par le biais de sa matrice ligne $M_{L,\mathcal{B},(1)}$; en fait, l'application linéaire $\vec{e_i}^{\,*}$, $i = 1, ..., n$, dont l'action se trouve explicitée en (2.1) ou (2.2) est telle que

$$M_{\vec{e_i}^{\,*},\mathcal{B},(1)} = \Big(0, ..., 0, \overset{i}{1}, 0, ..., 0\Big)$$

et l'on voit qu'écrire

$$M_{L,\mathcal{B},(1)} \;:\; \Big(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n\Big)$$

équivaut à écrire

$$M_{L,\mathcal{B},(1)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_{\vec{e_i}^{\,*},\mathcal{B},(1)}\,,$$

soit encore

$$M_{L-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{e_i}^{\,*},\mathcal{B},(1)} = 0\,,$$

soit

$$L = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e_i}^{\,*}\,;$$

le système $\mathcal{B}^*$ est donc bien un système générateur de E^*. C'est aussi un système libre puisque

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e_i}^{\,*} = 0 \Longrightarrow \Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e_i}^{\,*}\Big](\vec{e_j}) = \alpha_j = 0 \qquad \forall j \in \{1, ..., n\}\,.$$

La proposition est donc bien démontrée. $\diamondsuit$

Remarque II.1. Remarquons que si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base de E et $\mathcal{B}^* = (\vec{e_1}^{\,*}, ..., \vec{e_n}^{\,*})$ est sa base duale, on peut écrire, pour tout L dans E^*, la formule :

$$L = \sum_{i=1}^{n} L(e_i)\ \vec{e_i}^{\,*} \tag{2.3}$$

(il suffit de tester cette formule en faisant agir les deux membres sur chaque $\vec{e_i}$, puisque les deux membres de (2.3) représentent des applications linéaires et que les $\vec{e_i}$, $i = 1, ..., n$, définissent une base de E).

2.1.3 Transposition d'une application linéaire via la dualité

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, E^* et F^* leurs duaux. Si T est un $\mathbf{K}$-homomorphisme de E dans F, on peut définir un $\mathbf{K}$-homomorphisme de F^* dans E^* en remarquant que, si f^* est un élément de F^*, c'est-à-dire une application linéaire de F dans $\mathbf{K}$, alors on peut définir une application linéaire e^* de E dans $\mathbf{K}$ de la manière suivante :

$$\forall \vec{V} \in E\,,\; e^*(\vec{V}) = f^*(T(\vec{V})) \tag{2.4}$$

(ce qui a un sens puisque $T(\vec{V}) \in F$). On vérifie que l'application

$$f^* \in F^* \to e^* \in E$$

est une appplication $\mathbf{K}$-linéaire, c'est-à-dire un $\mathbf{K}$-homomorphisme de F^* dans E^* : en effet, si f^* et $\tilde{f}^*$ sont deux formes linéaires sur F, λ et $\tilde{\lambda}$ deux scalaires de $\mathbf{K}$ et $\vec{V}$ un vecteur de E, alors

$$[\lambda f^* + \tilde{\lambda}\tilde{f}^*](T(\vec{V})) = \lambda f^*(T(\vec{V})) + \tilde{\lambda}\tilde{f}^*(T(\vec{V}))\,.$$

Ceci nous autorise donc la définition :

Définition 2.2 *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, E^* et F^* leurs duaux, et T un $\mathbf{K}$-homomorphisme de E dans F ; on appelle transposé de T et on note ${}^tT$ le $\mathbf{K}$-homomorphisme de F^* dans E^* défini par la règle :*

$$f^* \in F^* \to {}^tT(f^*) = f^* \circ T \in E^*\,.$$

Remarque II.2. Il est très important de remarquer que si un opérateur T va de E dans F, son transposé ${}^tT$ réalise une action de F^* dans E^* (et non de E^* dans F^* !)

Nous nous retreindrons maintenant au cas des espaces de dimension finie, avec la proposition très importante suivante :

Proposition 2.2 *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives m et n et T un $\mathbf{K}$-homomorphisme de E dans F. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m)$ une base de E, $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n)$ une base de F. Si*

$$M_{T\,,\mathcal{B}\,,\mathcal{C}} = [a_{i,j}]_{1\leq i\leq n\,,\,1\leq j\leq m}$$

désigne la matrice (à n lignes et m colonnes) de l'endomorphisme T lorsque E est rapporté à la base $\mathcal{B}$ et F à la base $\mathcal{C}$, alors la transposée

$${}^tM_{T\,,\mathcal{B}\,,\mathcal{C}}$$

de la matrice $M_{T,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ (obtenue en échangeant les indices de ligne et de colonne) est une matrice cette fois à m lignes et n colonnes représentant précisément la matrice de ${}^tT$ de F^* (rapporté à la base duale $\mathcal{C}^*$) dans E^* (rapporté à la base duale $\mathcal{B}^*$). En résumé :

$$M_{{}^tT\,,\mathcal{C}^*\,,\mathcal{B}^*} = {}^tM_{T\,,\mathcal{B}\,,\mathcal{C}}\,. \tag{2.5}$$

Preuve. On écrit l'action de ${}^tT$ sur $f^* \in F^*$ en utilisant la règle définissante (2.4) :

$$\forall \vec{V} \in E\,,\; {}^tT[f^*](\vec{V}) = f^*(T(\vec{V}))\,;$$

en particulier, pour $i = 1, ..., n$,

$$\forall \vec{V} \in E\,,\; {}^tT[\vec{f}_i^{\,*}](\vec{V}) = \vec{f}_i^{\,*}(T(\vec{V}))\,;$$

prenons par exemple $\vec{V}=\vec{e_j}$, $j=1,...,m$; on a

$$\begin{aligned}\forall i\in\{1,...,n\}\,,\ \forall j\in\{1,...,m\}\,,\ {}^tT[\vec{f_i}^{\,*}](\vec{e_j}) &= \vec{f_i}^{\,*}(T(\vec{e_j}))=\vec{f_i}^{\,*}\Big(\sum_{k=1}^n a_{k,j}f_k\Big)\\ &= \sum_{k=1}^n a_{k,j}\,\vec{f_i}^{\,*}(f_k)\\ &= a_{i,j}\,;\end{aligned}$$

mais alors, si l'on utilise la formule (2.3), on voit que ceci implique

$${}^tT[\vec{f_i}^{\,*}]=\sum_{j=1}^m {}^tT[\vec{f_i}^{\,*}](\vec{e_j})\,\vec{e_j}^{\,*}=\sum_{j=1}^m a_{i,j}\vec{e_j}^{\,*}\,;$$

la i-ème colonne de la matrice de ${}^tT$ de F^* (rapporté à $\mathcal{C}^*$) dans E^* (rapporté à $\mathcal{B}^*$) est donc

$$\begin{pmatrix} a_{i,1}\\ a_{i,2}\\ \vdots\\ a_{i,m-1}\\ a_{i,m}\end{pmatrix}\,;$$

or

$$\Big(a_{i,1},a_{i,2},\dots,a_{i,m-1},a_{i,m}\Big)$$

est exactement la i-ème ligne de la matrice

$$M_{T,\mathcal{B},\mathcal{C}}=[a_{i,j}]_{1\leq i\leq n\,,\,1\leq j\leq m}\,.$$

La proposition est donc bien ainsi démontrée. $\diamondsuit$

Un corollaire de cette proposition est l'effet du changement de base sur le passage base $\to$ base duale :

Proposition 2.3 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$, $\widetilde{\mathcal{B}}$ deux bases de E. Si $[\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}]$ désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\widetilde{\mathcal{B}}$ (les colonnes de cette matrice sont les composantes des vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimés dans la base $\widetilde{\mathcal{B}}$), la matrice de passage $[\mathcal{B}^*\to\widetilde{\mathcal{B}}^*]$ de la base $\mathcal{B}^*$ à la base $\widetilde{\mathcal{B}}^*$ (matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de $\mathcal{B}^*$ exprimés dans la base $\widetilde{\mathcal{B}}^*$) s'écrit :*

$$\Big[\mathcal{B}^*\to\widetilde{\mathcal{B}}^*\Big]=\Big({}^t\Big[\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}\Big]\Big)^{-1}\,. \tag{2.6}$$

Preuve. Il suffit de remarquer que l'endomorphisme Id_E se transforme en Id_{E^*} par transposition. Comme

$$\Big[\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}\Big]=M_{\mathrm{Id_E},\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}}\,,$$

on a, d'après la proposition 2.2,

$${}^t\Big[\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}\Big]=M_{\mathrm{Id_{E^*}},\widetilde{\mathcal{B}}^*,\mathcal{B}^*}=\Big[\widetilde{\mathcal{B}}^*\to\mathcal{B}^*\Big]=\Big(\Big[\mathcal{B}^*\to\widetilde{\mathcal{B}}^*\Big]\Big)^{-1}\,,$$

ce qui est la formule (2.6) voulue. $\diamondsuit$

Remarque II.3. Si $e_1, ..., e_n$ désigne la base canonique de $\mathbf{K}^n$ et $e_1^*, ..., e_n^*$ sa base duale (que l'on peut considérer comme la base canonique de $\mathbf{K}^n$ une fois identifiés tout vecteur colonne et le vecteur ligne correspondant), alors, pour toute base $\mathcal{B} = \{f_1, ..., f_n\}$ de $\mathbf{K}^n$, où

$$f_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, ..., n,$$

on a

$$f_j^* = (\beta_{j1}, ..., \beta_{jn}) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} e_k^*,$$

où la matrice

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{1n} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

est la transposée de l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Remarque II.4. Lorsque $E = \mathbf{R}^n$, E^* s'identifie à une autre copie de $\mathbf{R}^n$, dite copie duale. C'est l'opération optique de diffraction qui transforme les figures dans $\mathbf{R}^n$ (par exemple la figure formée par n vecteurs définissant une base, ce que l'on appelle un repère de $\mathbf{R}^n$) en figures dans la copie (duale) de $\mathbf{R}^n$, une fois que l'on a confondu la base canonique de $\mathbf{R}^n$ avec sa base duale, ce qui revient à dire que l'on identifie les expressions d'un même vecteur de $\mathbf{R}^n$ en ligne et en colonne. De ce point de vue, la dualité se trouve matérialisée physiquement au travers de la transformation modélisant la diffraction, en l'occurrence la transformation de Fourier ; cette remarque souligne l'aspect non seulement théorique, mais aussi très concret, de cet "échange" que réalisent les opérations de dualité ou de transposition.

2.1.4 Le crochet de dualité : un premier exemple d'application bilinéaire

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et E^* son dual. À partir de E et E^*, on sait construire un troisième $\mathbf{K}$-space vectoriel important, le produit

$$\mathcal{E} := E \times E^*;$$

rappelons que l'addition et la multiplication externe (par un élément de $\mathbf{K}$) sont définies sur $\mathcal{E}$ par les règles :

$$\begin{aligned} \forall(\vec{V}, e^*), (\vec{\tilde{V}}, \tilde{e}^*) \in \mathcal{E}, \ (\vec{V}, e^*) + (\vec{\tilde{V}}, \tilde{e}^*) \quad &:= \quad (\vec{V} + \vec{\tilde{V}}, e^* + \tilde{e}^*) \\ \forall(\vec{V}, e^*), \forall\lambda \in \mathbf{K}, \ \lambda \bullet (\vec{V}, e^*) \quad &:= \quad (\lambda\vec{V}, \lambda e^*); \end{aligned}$$

ainsi confère-t'on à $(\mathcal{E}, +, \bullet)$ une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel (de dimension le produit des dimensions si E et F sont tous deux de dimension finie).

L'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbf{K}$ définie par

$$(\vec{V}, e^*) \to e^*(\vec{V})$$

est appelée <u>*crochet de dualité*</u> et souvent notée

$$(\vec{V}\,,\,e^*) \to \left\langle \vec{V}\,,\,e^* \right\rangle$$

(attention ! malgé la notation, il n'y a pas de symétrie au sein du crochet). Ce crochet de dualité à la propriété d'être à la fois linéaire en la première variable, soit

$$\forall\,\vec{V},\tilde{\vec{V}} \in E\,,\forall\,\lambda,\tilde{\lambda} \in \mathbf{K}\,,\ \forall e^* \in E^*\,,\quad \left\langle \lambda\vec{V} + \tilde{\lambda}\tilde{\vec{V}}\,,\,e^* \right\rangle = \lambda\left\langle \vec{V}\,,\,e^* \right\rangle + \tilde{\lambda}\left\langle \tilde{\vec{V}}\,,\,e^* \right\rangle,$$

et par rapport à la seconde variable $e^* \in E^*$, soit

$$\forall\,\vec{V} \in E,\ \forall\lambda,\tilde{\lambda} \in \mathbf{K}\,,\ \forall e^*,\tilde{e}^* \in E^*\,,\quad \left\langle \vec{V}\,,\,\lambda e^* + \tilde{\lambda}\tilde{e}^* \right\rangle = \lambda\left\langle \vec{V}\,,\,e^* \right\rangle + \tilde{\lambda}\left\langle \vec{V}\,,\,\tilde{e}^* \right\rangle,$$

On obtient là le prototype de ce que l'on appelle <u>*forme bilinéaire*</u> sur un espace produit (ici en l'occurrence $E \times E^*$) ; on appelle aussi <u>*forme bilinéaire canonique*</u> sur $E \times E^*$ le crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2.1.5 Première approche de la notion d'orthogonalité

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, E^* son dual. Il existe deux applications linéaires tout-à-fait naturelles (et canoniques en ce sens qu'elles ne dépendent que de E et non du choix de bases) attachées au triplet de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels $E, E^*, \mathcal{E} = E \times E^*$; ce sont les applications :

$$\begin{array}{rcll} p_E & : & \mathcal{E} \to E & (\vec{V}, e^*) \to \vec{V} \\ p_{E^*} & : & \mathcal{E} \to E^* & (\vec{V}, e^*) \to e^*\,. \end{array}$$

Dans $E \times E^*$, un sous-espace joue un rôle très important : c'est le sous-espace défini par

$$F := \{(\vec{V}, e^*) \in E \times E^*\,;\, \left\langle \vec{V}\,,\,e^* \right\rangle = 0\}\,;$$

(on l'appelle parfois <u>*sous-espace d'incidence*</u>) ; les restrictions des projections p_E et p_{E^*} à F sont bien sûr surjectives (si $\vec{V} \in E$, $\langle \vec{V}\,,\,0^* \rangle = 0$ et si $e^* \in E^*$, $\langle \vec{0}\,,\,e^* \rangle = 0$) et l'on peut illustrer la situation avec la figure 2.1 ci-dessous ; E et E^* sont deux univers "duaux" que "coiffe" l'univers $F \subset E \times E^*$.

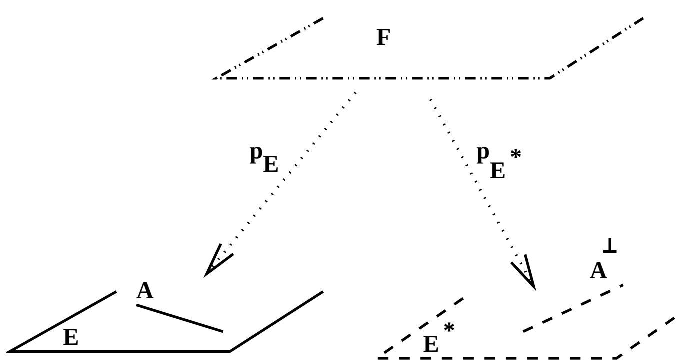

FIG. 2.1 – dualité et orthogonalité

Cette figure nous conduit à introduire une notion intimement liée à la dualité, celle <u>*d'orthogonalité*</u> :

Définition 2.3 *Soit E un* **K***-espace vectoriel, E^* son dual, $F \subset E \times E^*$ le sous-espace d'incidence. L'orthogonal $A^\perp$ d'un sous-ensemble A de E dans E^* est par définition :*

$$A^\perp := p_{E^*}\Big[\big((p_E)_{|F}\big)^{-1}(A)\Big] = \{e^* \in E^* \, ; \, \forall \vec{V} \in A \, , \langle \vec{V} \, , \, e^* \rangle = 0\} \ ;$$

l'orthogonal ${}^\perp A^*$ d'un sous-ensemble A^* de E^* dans A est par définition

$${}^\perp A^* := p_E\Big[\big((p_{E^*})_{|F}\big)^{-1}(A^*)\Big] = \{\vec{V} \in E \, ; \, \forall e^* \in A^* \, , \, \langle \vec{V} \, , \, e^* \rangle = 0\} \, .$$

Remarque II.5. L'orthogonal dans E^* d'un sous-ensemble de E est toujours un sous-espace vectoriel de E^* ; de même l'orthogonal dans E d'un sous-ensemble A^* de E^* est toujours un sous-espace de E.

Si E est un **K**-espace vectoriel de dimension finie, les dimensions d'un sous-espace A et de son orthogonal $A^\perp$ sont telles que

$$\dim A + \dim A^\perp = n \, ;$$

pour voir ceci, on prend une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de E telle que $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k)$ forment une base de A. Les éléments e^* de E^* tels que $\forall \vec{V} \in A \, , \ e^*(\vec{V}) = 0$ sont exactement les éléments de la forme

$$e^* = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \vec{e_i}^{\,*}$$

et la dimension de $A^\perp$ vaut dont bien $n - k$.

2.2 Formes bilinéaires et quadratiques

Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n ; on a vu que E^* était aussi un **K**-espace de dimension n, donc isomorphe à E. Pour réaliser un tel isomorphisme, nous avons le procédé suivant :

- se donner une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de E ;
- construire la base duale $(\vec{e_1}^{\,*}, ..., \vec{e_n}^{\,*})$;
- décider de poser

$$\sigma_{\mathcal{B}}\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e_i}^{\,*}\Big) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \ ;$$

un tel isomorphisme $\sigma_{\mathcal{B}}$ dépend bien sûr du choix de la base $\mathcal{B}$ et ne saurait être canonique.

Une fois acquise l'existence d'un tel isomorphisme, on dispose (avec le crochet de dualité qu'il suffit de transporter pour qu'il agisse sur $E \times E$ au lieu de $E \times E^*$) d'une application bilinéaire $\Theta_{\mathcal{B}}$ de $E \times E$ dans **K**

$$B \ : (\vec{V}, \vec{W}) \to \Big\langle \vec{V} \, , \, \sigma_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{W}) \Big\rangle \, .$$

Si

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$$

et

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_i \, ,$$

on voit que la construction de $\sigma_{\mathcal{B}}$ induit la formule

$$\Theta_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i\,,\,\sum_{i=1}^{n} y_i\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,.$$

La forme bilinéaire $\Theta_{\mathcal{B}}$ que nous venons de construire a, en plus de sa bilinéarité, une particularité intéressante : elle est <u>*symétrique*</u>, au sens où

$$\Theta_{\mathcal{B}}(\vec{V},\vec{W}) = \Theta_{\mathcal{B}}(\vec{W},\vec{V})\,.$$

De plus, elle est <u>*non dégénérée*</u> au sens ou

$$\Theta_{\mathcal{B}}(\vec{V},\vec{W}) = 0 \quad \forall\,\vec{W} \quad \Longrightarrow \vec{V} = 0\,.$$

Ce sont ces diverses notions que nous allons introduire dans ce paragraphe.

2.2.1 Formes bilinéaires ; symétrie, dégénérescence

Commençons par rappeler la notion de $\mathbf{K}$-forme bilinéaire sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel :

Définition 2.4 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ; on appelle <u>$\mathbf{K}$-forme bilinéaire</u> sur E toute application de $E\times E$ dans $\mathbf{K}$ telle que :*

$$\forall\,\vec{V},\tilde{\vec{V}},\vec{W}\in E\,,\forall\,\lambda,\tilde{\lambda}\in\mathbf{K}\,,\ \Theta(\lambda\vec{V}+\tilde{\lambda}\tilde{\vec{V}}\,,\,\vec{W}) \;=\; \lambda\Theta(\vec{V}\,,\,\vec{W})+\tilde{\lambda}\Theta(\tilde{\vec{V}}\,,\,\vec{W}) \tag{2.7}$$

$$\forall\,\vec{V},\vec{W},\tilde{\vec{W}}\in E\,,\forall\,\lambda,\tilde{\lambda}\in\mathbf{K}\,,\ \Theta(\vec{V}\,,\,\lambda\vec{W}+\tilde{\lambda}\tilde{\vec{W}}) \;=\; \lambda\Theta(\vec{V}\,,\,\vec{W})+\tilde{\lambda}\Theta(\vec{V}\,,\,\tilde{\vec{W}})\,. \tag{2.8}$$

La forme Θ est de plus dite <u>symétrique</u> si et seulement si

$$\forall\,\vec{V},\vec{W}\in E\,,\ \Theta(\vec{V},\vec{W}) = \Theta(\vec{W},\vec{V})\,.$$

Exemples 2.1 Dans cette définition, nous ne sommes pas assujettis à supposer E de dimension finie ; aussi nous donnerons des exemples empruntés au cas où E est un espace de fonctions ou de suites :

- **1.** si E est le $\mathbb{R}$-espace des fonctions continues à valeurs réelles sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, alors
$$\Theta\ :\ (f,g)\to\int_a^b f(t)g(t)dt$$
est une forme bilinéaire (symétrique) ;
- **1'.** si E est le $\mathbb{C}$-espace des fonctions continues à valeurs complexes sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, alors
$$\Theta\ :\ (f,g)\to\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$
est une forme linéaire en le premier objet (f), mais non en le second (g) ; de plus cette "pseudo" forme bilinéaire est non symétrique (car $\Theta(f,g)=\overline{\Theta(g,f)}$!) ; une forme de ce type (sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) sera dite sesquilinéaire, nous y reviendrons ;
- **2.** si E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions C^1 sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et telles que $f(a)=f(b)=0$, alors
$$\Theta\ :\ (f,g)\to\int_a^b f(t)g'(t)dt$$
est une forme bilinéaire, mais non symétrique ($\Theta(f,g) = -\Theta(g,f)$ du fait de la formule d'intégration par parties) ;

- **3.** si E est le $\mathbb{C}$-espace des séries numériques $[u_n]_{n\geq 0}$ absolument convergentes, les applications

$$([u_n]_{n\geq 0},[v_n]_{n\geq 0}) \quad\to\quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k v_k$$
$$([u_n]_{n\geq 0},[v_n]_{n\geq 0}) \quad\to\quad \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{l=0}^{k} u_l v_{l-k}\Big)$$

dont on expliquera pourquoi elles sont bien définies (en exploitant le cours d'analyse) sont encore des formes bilinéaires (symétriques) ; l'application

$$([u_n]_{n\geq 0},[v_n]_{n\geq 0}) \to \sum_{k=0}^{\infty} u_k \overline{v_k}$$

est toujours une forme du même type que dans l'exemple **1'**, à nouveau sans symétrie et avec une pseudobilinéarité due à la conjugaison complexe (on a encore ici, comme à l'exemple **1'**, $\Theta(f,g)=\overline{\Theta(g,f)}$) ;
- **4.** si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,....,\vec{e}_n)$ et si $\lambda_1,...,\lambda_n$ sont n scalaires de $\mathbf{K}$, alors :

$$\Theta_{\mathcal{B},\lambda}\ :\ \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i\,,\,\sum_{i=1}^{n} y_i\vec{e}_i\Big) \to \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i y_i$$

est une forme bilinéaire symétrique ;
- **4'.** si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,....,\vec{e}_n)$ et si $\lambda_1,...,\lambda_n$ sont n nombres complexes, alors :

$$\Theta_{\mathcal{B},\lambda}\ :\ \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i\,,\,\sum_{i=1}^{n} y_i\vec{e}_i\Big) \to \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \overline{y_i}$$

est une forme du même type que dans les exemples **1'** et **3'** ; ce n'est pas une vraie bilinéarité (du fait encore de la conjuguaison complexe) et il n'y a pas de symétrie ;
- **5.** Si $E=\mathbf{R}^3$, rapporté au repère orthonormé $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le produit scalaire ordinaire de deux vecteurs :

$$(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}) \to xx'+yy'+zz'$$

est bien sûr une forme bilinéaire symétrique ;
- **5'.** Si E est l'espace-temps $\mathbf{R}^4$ (trois paramètres d'espace x,y,z, un paramètre temporel t) si important en mécanique non plus Newtonienne, mais relativiste, la <u>*forme de Lorentz*</u> :

$$\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix},\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\\ t'\end{pmatrix}\right) \to xx'+yy'+zz'-ctt'$$

(c est la vitesse de la lumière) est encore une forme bilinéaire symétrique.

Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie (que l'on peut donc rapporter à une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$, l'écriture matricielle nous permet de représenter (de manière biunivoque) toute forme bilinéaire. Nous avons en effet le résultat capital suivant :

Proposition 2.4 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, rapporté à une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ et Θ une forme bilinéaire sur E. Il existe une unique matrice carrée $[a_{i,j}]_{1\leq i\leq j\leq n}$ telle que, pour tout $(x_1,...,x_n)\in\mathbf{K}^n$, pour tout $(y_1,...,y_n)\in\mathbf{K}^n$, on ait :*

$$\Theta\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i\,,\,\sum_{i=1}^{n} y_i\vec{e}_i\Big) = \big(y_1,y_2,y_3,...,y_n\big)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

les coefficients $a_{i,j}$ de la matrice en question sont donnés simplement par les formules

$$a_{i,j} = \Theta(\vec{e}_j, \vec{e}_i), \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{2.10}$$

La forme Θ est symétrique si et seulement si la matrice $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique. Cette matrice $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ (permettant d'identifier la forme bilinéaire une fois une base $\mathcal{B}$ de l'espace précisée) est dite matrice de la forme bilinéaire Θ dans la base $\mathcal{B}$ et notée $\mathbf{M}_{\Theta,\mathcal{B}}$ (par analogie avec la notation $M_{L,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ utilisée pour noter la matrice d'une application linéaire lorsque $\mathcal{B}$ est la base choisie pour repérer le vecteur d'entrées et le vecteur de sorties).

Preuve. Si la matrice $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ impliquée dans (2.9) existe, on voit tout de suite, en calculant $\Theta(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ précisément avec cette formule (2.9), que

$$\Theta(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = a_{i,j} \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\},$$

ce qui prouve en même temps l'unicité de la matrice $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ réalisant (2.9) et les formules (2.10). La preuve de (2.9) s'obtient en remarquant juste que la bilinéarité de Θ implique que pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K}^n$, pour tout $(y_1, ..., y_n) \in \mathbf{K}^n$, on a :

$$\Theta\Big(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i, \sum_{i=1}^n y_i\vec{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i y_j \Theta(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \ ;$$

ceci correspond exactement, si l'on développe le calcul matriciel au second membre de (2.7), à l'identité voulue. $\diamondsuit$

Si l'on remplace la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ par la base $\widetilde{\mathcal{B}} = (\vec{\tilde{e}}_1, ..., \vec{\tilde{e}}_n)$ et si l'on note $[\mathcal{B} \to \widetilde{\mathcal{B}}]$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$, la relation entre le système de coordonnées $(X_1, ..., X_n)$ d'un vecteur $\vec{V}$ dans la base $\widetilde{\mathcal{B}}$ en fonction du système $(x_1, ..., x_n)$ de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [\widetilde{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}] \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} ;$$

on voit donc ainsi comment relier les matrices d'une forme bilinéaire Θ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$: on a effet, si $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice de Θ dans la base $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}
&\Theta\Big(\sum_{i=1}^n X_i\vec{\tilde{e}}_i, \sum_{i=1}^n Y_i\vec{\tilde{e}}_i\Big) \\
&= \big(Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_n\big)^t[\widetilde{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}] \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} [\widetilde{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}] \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d'où la formule de changement de base pour une forme bilinéaire

$$\mathbf{M}_{\Theta,\widetilde{\mathcal{B}}} = {}^t[\widetilde{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}] \bullet \mathbf{M}_{\Theta,\mathcal{B}} \bullet [\widetilde{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}]. \tag{2.11}$$

Revenons maintenant au cas général d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel quelconque pour définir les notions de dégénérescence (ou non) et, lorsque l'espace E est de dimension finie, de rang d'une forme bilinéaire.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et Θ une forme bilinéaire sur E ; alors, pour chaque $\vec{V}$ dans E, l'application

$$\vec{W} \in E \to \Theta(\vec{V}\,,\,\vec{W})$$

est une forme linéaire sur K, que nous noterons $\Theta(\vec{V}\,,\,\bullet)$ (ceci résulte de la linéarité de Θ par rapport à la seconde variable, soit des formules (2.8)) ; mais on vérifie aussi immédiatement que l'application

$$\chi_\Theta \;:\; \vec{V} \in E \to \Theta(\vec{V}\,,\,\bullet) \in E^*$$

est un homomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de E dans E^* (ceci résulte cette fois de la linéarité de Θ par rapport à la première variable, soit des formules (2.7)). Cet hoomorphisme ne dépend que de E et de Θ, mais en aucun cas du choix d'une base de E (le choix d'une telle base n'est nullement impliqué dans sa construction). Cet homomorphisme renferme donc (s'il les possède) des propriétés inhérentes à la forme bilinéaire Θ.

Définition 2.5 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et Θ une $\mathbf{K}$-forme bilinéaire sur E. On dit que la forme bilinéaire Θ est <u>non dégénérée</u> si et seulement si le $\mathbf{K}$-homomorphisme*

$$\vec{V} \in E \to \Theta(\vec{V}\,,\,\bullet) \in E^*$$

est injectif de E dans E^*, <u>dégénérée</u> sinon. Si E est de dimension finie, on appelle <u>rang</u> de la forme bilinéaire Θ le rang du $\mathbf{K}$-homomorphisme

$$\vec{V} \in E \to \Theta(\vec{V}\,,\,\bullet) \in E^*\,.$$

Remarque II.6. Toujours si E est de dimension finie n et si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base de E, la matrice de l'homomorphisme

$$\vec{V} \in E \to \Theta(\vec{V}\,,\,\bullet) \in E^*$$

lorsque E est rapporté à la base $\mathcal{B}$ et E^* à la base duale $\mathcal{B}^*$ est la matrice $[\Theta(\vec{e}_j, \vec{e}_i)]_{1\leq i,j\leq n}$ impliquée dans l'identité matricielle (2.9) ; le rang de Θ est donc dans ce cas le rang de cette matrice $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$; c'est aussi, rappelons-le, le rang de sa transposée puisqu'une matrice et sa transposée ont toujours même rang (la taille du plus grand déterminant mineur non nul que l'on sache extraire de la matrice).

2.2.2 Orthogonalité relativement à une forme bilinéaire

Toujours si E est un $\mathbf{K}$-espace de dimension finie, étant donnée une $\mathbf{K}$-forme bilinéaire non dégénérée Θ sur E et χ_Θ l'isomorphisme χ_Θ entre E et E^* (c'est un isomorphisme car c'est un homomorphisme injectif entre deux espaces de même dimension) défini par

$$\chi_\Theta \;: \vec{V} \in E \to \Theta(\vec{V}\,,\,\bullet) \in E^*\,,$$

on peut relier à la forme bilinéaire Θ l'expression du crochet de dualité ; on a effet :

$$\forall\,\vec{W} \in E\,,\ \forall\, e^* \in E^*\,,\quad \left\langle \vec{W}\,,\,e^* \right\rangle := e^*(\vec{W}) = \Theta\Big(\chi_\Theta^{-1}(e^*)\,,\,\vec{W}\Big)\,. \tag{2.12}$$

Si de plus Θ est symétrique, on remarque que si χ_Θ est utilisé pour superposer les deux espaces E et E^* représentés sur la figure 2.1 où nous avons introduit le concept d'orthogonalité, il est naturel d'introduire comme concept d'orthogonalité dans E celui qui précisément se trouve réalisé lorsque E et E^* sont "superposés" via χ_Θ ; en conformité avec la formule (2.12), on dira que deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ de E sont <u>orthogonaux</u> relativement à la forme bilinéaire symétrique Θ (la symétrie est importante car l'on souhaite la symétrie de cette relation d'orthogonalité) si et seulement si

$$\Theta(\vec{V}\,,\,\vec{W}) = 0\,.$$

En fait, on peut étendre ce concept pour les formes bilinéaires toujours symétriques, mais non nécessairement non dégénérées (on oublie aussi la condition pour l'espace E d'être de dimension finie) :

Définition 2.6 *Soit E un* **K***-espace vectoriel et Θ une* **K** *forme bilinéaire symétrique sur E ; on dit que deux éléments $\vec{V}$ et $\vec{W}$ de E sont <u>orthogonaux relativement à Θ</u> si et seulement si*

$$\Theta(\vec{V},\vec{W}) = 0\ ;$$

on note ceci

$$\vec{V}\ \perp_\Theta\ \vec{W}\,.$$

Un vecteur $\vec{V}$ non nul de E et tel que $\Theta(\vec{V},\vec{V}) = 0$ (soit $\vec{V}\ \perp_\Theta\ \vec{V}$) est dit <u>isotrope</u> ; un sous-espace A de E tel que

$$\{\vec{V}\in A\,;\,\forall\,\vec{W}\in A\,,\vec{V}\ \perp_\Theta\ \vec{W}\}\neq\{\vec{0}\}$$

est dit <u>sous-espace isotrope</u> ; si ce n'est pas le cas, on dit que A est un <u>non isotrope</u> (idem pour les vecteurs).

Remarque II.7. Il peut y avoir des vecteurs isotropes même si la forme est non dégénérée (voir certains exemples ci-dessous) ! Par contre, dire que la forme Θ est non-dégénérée équivaut à dire que l'espace E tout entier est non isotrope (si $\vec{V}\perp_\Theta \vec{W} = 0$ pour tout $\vec{W}$ de E, alors $\Theta(\vec{V},\bullet) = 0$, ce qui implique en cas de non-dégénérescence $\vec{V} = \vec{0}$).

Exemples II.2. On reprend ici certains des exemples introduits dans la liste d'exemples 2.1.

- **1.** si E est le **R**-espace vectoriel des fonctions continues (à valeurs réelles) sur $[0,2\pi]$ et Θ la forme bilinéaire

  $$(f,g)\to\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt\,,$$

  on a, si n et m sont deux entiers distincts :

  $$\cos(n(\cdot))\ \perp_\Theta\ \cos(m(\cdot))\qquad \sin(n(\cdot))\ \perp_\Theta\ \sin(m(\cdot))\,;$$

  on verra dans le cours d'analyse que la forme Θ est ici non dégénérée; en tout cas, ce que l'on voit immédiatement ici, c'est qu'il n'y a pas de vecteurs isotropes car :

  $$\int_0^{2\pi} f^2(t)dt = 0 \Longrightarrow f\equiv 0\,;$$

- **5.** Si $E=\mathbf{R}^3$, l'orthogonalité dans $\mathbf{R}^3$ pour la forme bilinéaire

  $$(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k},x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k})\to xx'+yy'+zz'$$

  coïncide avec la notion d'orthogonalité usuelle (c'est la même chose dans $\mathbf{R}^2$) ; la forme ici est non dégénérée;

- **5'.** Si $E = \mathbf{R}^4$ et Θ est la forme de Lorentz :
$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}\right) \to xx' + yy' + zz' - ctt' ,$$
l'ensemble des vecteurs isotropes est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini comme
$$C := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \, ; \, x^2 + y^2 + z^2 - ct^2 = 0\} \, ;$$
c'est un cône de $\mathbf{R}^4$ que l'on appelle <u>*cône du futur*</u> ; notons que la forme est non dégénérée mais qu'il y pourtant des vecteurs isotropes ;
- en revanche, si E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ et si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont n nombres réels strictement positifs, alors, relativement à la forme
$$\Theta_{\mathcal{B},\lambda} \ : \ \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \, , \, \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_i\Big) \to \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i \, ,$$
il ne saurait y avoir de vecteur isotrope.
- si $E = \mathbb{C}^n$ et que l'on considère la forme bilinéaire
$$\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\right) \to \sum_{j=1}^{n} z_j w_j \, ,$$
on voit qu'il y a des vecteurs isotropes (par exemple $(1, i, 0, ..., 0)$), ce qui montre que le cadre $\mathbb{C}^n$ n'est pas un cadre auatant propice que $\mathbf{R}^n$ au maniement de l'orthogonalité au sens usuel("à la Pythagore") ; ceci nous contraindra à introduire plus tard dans le cadre complexe une autre notion, celle de sesquilinéarité.

2.2.3 Formes quadratiques sur un K espace vectoriel

Dans cette section (et les deux suivantes), on supposera toujours que le corps $\mathbf{K}$ est tel que $1 + 1 \neq 0$. C'est bien sûr le cas pour les corps qui nous intéressent ($\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p \neq 2$ par exemple). Le concept de forme quadratique sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel est alors intimement lié à celui de forme linéaire :

Définition 2.7 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ; on appelle forme quadratique sur $\mathbf{K}$ toute fonction $\mathcal{Q}$ de E dans $\mathbf{K}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique Θ sur E avec :*
$$\forall \vec{V} \in E \, , \quad \mathcal{Q}(\vec{V}) = \Theta(\vec{V} \, , \, \vec{V}) \, .$$

Exemples II.3. On peut reprendre tous les exemples II.1 ; deux exemples retiendrons notre attention :
- si E est le $\mathbf{R}$-espace des fonctions continues à valeurs réelles sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, l'application
$$f \to \int_a^b f^2(t) dt$$
est une forme quadratique, capitale en physique puisqu'elle matérialise la notion d'énergie (penser par exemple à l'énergie cinétique $mv^2/2$ qui se présente non pas comme fonction linéaire de la vitesse, mais comme expression quadratique !) ;
- si $E = \mathbf{R}^n$, la forme
$$x \to \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$
qui représente le carré de la distance euclidienne est une forme quadratique ; de même dans l'espace espace-temps $\mathbb{R}^4$ de Lorentz, on a la <u>*forme quadratique de Lorentz*</u> :
$$(x, y, z, t) \to x^2 + y^2 + z^2 - ct^2 \, .$$

En fait (sous les hypothèses faites sur $\mathbf{K}$) la forme bilinéaire attachée à une forme quadratique $\mathcal{Q}$ est unique et il y donc bien correspondance entre formes quadratiques et formes bilinéaires ; c'est la _forme polarisée_ de $\mathcal{Q}$ et on l'obtient en remarquant que si Θ existe, alors forçément

$$\begin{aligned}\Theta(\vec{V}+\vec{W},\vec{V}+\vec{W})-\Theta(\vec{V}-\vec{W},\vec{V}-\vec{W}) &= \Theta(\vec{V},\vec{V})+\Theta(\vec{W},\vec{W})+2\Theta(\vec{V},\vec{W}) \\ &\quad -\big(\Theta(\vec{V},\vec{V})+\Theta(\vec{W},\vec{W})-2\Theta(\vec{V},\vec{W})\big) \\ &= 4\Theta(\vec{V}\,,\,\vec{W})\,,\end{aligned}$$

ce qui donne, puisque $4 = 2\times 2$ a un inverse dans $\mathbf{K}$, la _formule de polarisation_ :

$$\Theta(\vec{V}\,,\,\vec{W}) = \frac{\mathcal{Q}(\vec{V}+\vec{W})-\mathcal{Q}(\vec{V}-\vec{W})}{4}\,.$$

En dimension finie, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.5 *Étant donné un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n rapporté à une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$, une forme quadratique $\mathcal{Q}$ sur E s'exprime en fonction des coordonnées $(x_1,....,x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ comme une fonction polynomiale en n variables homogène de degré 2, soit*

$$\mathcal{Q}\Big(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}x_ix_j \tag{2.13}$$

(ici $a_{i,j}=\Theta(\vec{e}_j,\vec{e}_i)=\Theta(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$ si $\mathcal{Q}(\vec{V})=\Theta(\vec{V},\vec{V})$) ; réciproquement, une telle fonction polynomiale (2.13) *définit une forme quadratique sur E et la forme bilinéaire symétrique associée est la forme définie par :*

$$\Theta\Big(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i\,,\,\sum_{i=1}^n y_i\vec{e}_i\Big) = \big(y_1,y_2,y_3,...,y_n\big)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Preuve. Elle est immédiate (il s'agit juste d'effectuer le calcul matriciel au second membre de (2.14) explicitement lorsque $x_1=y_1,...,x_n=y_n$ pour retrouver la formule (2.13). $\diamondsuit$

Soit $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{Q}$ une forme quadratique sur E.
On appelle _matrice de $\mathcal{Q}$ dans la base $\mathcal{B}$_ et on note $\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}}$ la matrice de la forme bilinéaire symétrique Θ (polarisée de $\mathcal{Q}$) dans la base $\mathcal{B}$; on a donc toujours la formule de changement de base pour les formes quadratiques cette fois :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\widetilde{\mathcal{B}}} = {}^t[\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}]\bullet\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}}\bullet[\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}]\,. \tag{2.15}$$

Exemple II.4. La matrice (dans la base $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$) de la forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$:

$$\mathcal{Q}\ :(x,y,z)\to x^2+2y^2+3z^2-3xy-6yz-xz$$

est

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 2 & -3 \\ -1/2 & -3 & 3\end{pmatrix}$$

2.2.4 Réduction de Gauss des formes quadratiques sur un K-espace vectoriel de dimension finie

On suppose toujours ici que le corps de base $\mathbf{K}$ sur lequel notre espace vectoriel E de référence est construit est tel que $1+1 \neq 0$. Dans cette section, nous allons prouver de manière constructive le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{Q}$ une forme quadratique sur E, de forme polarisée Θ ; il existe une base $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ dans laquelle la matrice de Θ soit diagonale, c'est-à-dire une base de E constituée de vecteurs 2 à 2 orthogonaux relativement à cette forme bilinéaire Θ.*

Preuve. Avant de donner une preuve générale, traitons un exemple concret comme l'exemple 2.3. L'idée est ici d'exploiter à fond la formule du trinôme :

$$\Big[AX^2 + 2B(Y,Z)X\Big] = A\Big(X + \frac{B(Y,Z)}{A}\Big)^2 - \frac{B(Y,Z)^2}{A}$$

lorsque A est un élément non nul de $\mathbf{K}$ et B un polynôme homogène de degré 1 en Y, Z à coefficients dans $\mathbf{K}$ ou la formule

$$\Big[4B(Y,Z)X\Big] = (X + B(Y,Z))^2 - (X - B(Y,Z))^2$$

lorsque B est polynôme homogène de degré 1 en Y, Z à coefficients dans $\mathbf{K}$ pour transformer l'expression quadratique $\mathcal{Q}(x,y,z)$. Ici par exemple :

$$\begin{aligned}
x^2 + 2y^2 - xy + 2xz - 3yz &= \Big[x^2 + 2(-y/2 + z)x\Big] + 2y^2 - 3yz \\
&= (x - y/2 + z)^2 - (-y/2 + z)^2 + 2y^2 - 3yz \\
&= (x - y/2 + z)^2 - (y^2/4 + z^2 - yz) + 2y^2 - 3yz \\
&= (x - y/2 + z)^2 + 7y^2/4 - z^2 - 2yz \\
&= (x - y/2 + z)^2 - \Big[z^2 + 2 \times yz\Big] + 7y^2/4 \\
&= (x - y/2 + z)^2 - (z + y)^2 + y^2 + 7y^2/4 \\
&= (x - y/2 + z)^2 - (z + y)^2 + 11y^2/4\,.
\end{aligned}$$

Si l'on choisit comme nouvelles coordonnées dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
X &= x - y/2 + z \\
Y &= z + y \\
Z &= y
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

on voit qu'en les nouvelles coordonnées (X, Y, Z), la forme sécrit :

$$X^2 - Y^2 + (11/4)\, Z^2 \,.$$

Les trois vecteurs $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1)$, $(3/2, 1, -1)$ (ce sont les trois vecteurs

$$(1, 0, 0)\ ,\ (0, 1, 0)\ ,\ (0, 0, 1)$$

si on les exprime dans les coordonnées (X, Y, Z)) sont donc orthogonaux pour la forme bilinéaire Θ (on le vérifie aisément en exercice) ; ils constituent bien sûr une base puisque nous avons effectué un changement bi-univoque de coordonnées.

Voyons maintenant la preuve générale. Bien sûr, il suffit de montrer le résultat lorsque $E = \mathbf{K}^n$; dans ce cas, on raisonne par récurrence sur n.

- **1.** lorsque $n = 1$, il n'y a rien à faire ;
- **2.** admettons (c'est l'hypothèse de récurrence) que pour toute forme quadratique q sur $\mathbf{K}^{n-1}$, il existe une base de $\mathbf{K}^{n-1}$ constituée de vecteurs orthogonaux relativement à la forme bilinéaire sur $\mathbf{K}^{n-1}$ polarisée de q : ceci revient à dire qu'étant donnée une forme quadratique q sur $\mathbf{K}^{n-1}$ (où les variables sont notées $X_2, ..., X_n$), on peut faire (dans $\mathbf{K}^{n-1}$) un changement linéaire de coordonées $(X_2, ..., X_n) \to (X_2', ..., X_n')$ tel que, dans ces nouvelles nouvelles coordonnées, q s'écrive
$$\mu_2 X_2'^2 + \cdots + \mu_n X_n'^2$$
où $\mu_2, ..., \mu_n \in \mathbf{K}$.
- **3.** Passons maintenant à la preuve au cran n et donnons nous une forme $\mathcal{Q}$ sur $\mathbf{K}^n$ (non identiquement nulle, sinon il n'y a rien à faire), les coordonnées sur $\mathbf{K}^n$ étant notées $(x_1, ..., x_n)$. La forme $\mathcal{Q}$ se présente donc sous la forme :
$$\mathcal{Q}(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j} x_i x_j \,.$$
On choisit un élément $\vec{v}_1$ de $\mathbf{K}^n$ tel que $\mathcal{Q}(\vec{v}_1) \neq 0$ puis l'on complète le système constitué du vecteur $\vec{v}_1$ en une base $\tilde{\mathcal{B}} = (\vec{v}_1, \vec{\tilde{v}}_2, ..., \vec{\tilde{v}}_n)$ de $\mathbf{K}^n$. En les coordonnées $(X_1, ..., X_n)$ dans la nouvelle base $\tilde{\mathcal{B}}$, on voit, en remplaçant
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [\tilde{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}] \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} ,$$
que $\mathcal{Q}$ s'écrit
$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{i,i} X_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \tilde{a}_{i,j} X_i X_j$$
avec $\tilde{a}_{1,1} = \mathcal{Q}(\vec{v}_1) \neq 0$. On écrit alors $\mathcal{Q}$ (toujours en ces nouvelles coordonnées) sous la forme :
$$\Big[\tilde{a}_{1,1} X_1^2 + 2\Big(\sum_{j=2}^{n} \tilde{a}_{1,j} X_j\Big) X_1\Big] + \sum_{j=2}^{n} \tilde{a}_{i,i} X_i^2 + 2 \sum_{2 \le i < j \le n} \tilde{a}_{i,j} X_i X_j$$
et l'on utilise notre "truc" de la formule du trinôme, ce qui nous permet d'écrire $\mathcal{Q}$ (toujours en les coordonnées $(X_1, ..., X_n)$)
$$\tilde{a}_{1,1} \left(X_1 + \frac{\sum_{j=2}^{n} \tilde{a}_{1,j} X_j}{\tilde{a}_{1,1}} \right)^2 + q(X_2, ..., X_n) \,,$$

avec

$$q(X_2, ..., X_n) = -\frac{\Big(\sum\limits_{j=2}^{n} \tilde{a}_{1,j} X_j\Big)^2}{\tilde{a}_{1,1}} + \sum_{j=2}^{n} \tilde{a}_{i,i} X_i^2 + 2 \sum_{2 \le i < j \le n} \tilde{a}_{i,j} X_i X_j \,.$$

On utilise alors l'hypothèse de récurrence qui nous autorise à effectuer un changement de coordonnées $(X_2, ..., X_n) \to (X'_2, ..., X'_n)$ avec

$$X_j = \sum_{l=2}^{n} \beta_{l,j} X'_j \,,\ j = 2, ..., n \,,$$

de manière à ce qu'en les nouvelles coordonnées $(X'_2, ..., X'_n)$, q s'écrive :

$$\mu_2 X_2'^2 + \cdots + \mu_n X_n'^2 \,.$$

Mais alors, si l'on pose

$$X'_1 = X_1 + \frac{1}{\tilde{a}_{1,1}} \left(\sum_{j=2}^{n} \sum_{l=2}^{n} \tilde{a}_{1,j} \beta_{l,j} X'_j \right),$$

on voit qu'en les coordonnées $(X'_1, X'_2, ..., X'_n)$, $\mathcal{Q}$ s'écrit

$$\tilde{a}_{1,1} X_1'^2 + \mu_2 X_2'^2 + \cdots + \mu_n X_n'^2 \,,$$

ce qui est la forme voulue ; la base correspondant au changement de variables $(x_1, ..., x_n) \to (X'_1, ..., X'_n)$ est une base de vecteurs orthogonaux deux à deux pour la forme bilinéaire polarisée de $\mathcal{Q}$.

Le théorème est ainsi démontré, et l'on retiendra bien la méthode algorithmique présentée dans l'exemple (tout aussi importante, sinon plus, que le résultat lui-même !) $\diamondsuit$

2.2.5 La classification des formes quadratiques sur un R-espace vectoriel

Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, les formes quadratiques peuvent être classifiées suivant le <u>*théorème d'inertie de Sylvester*</u> (attribuée au mathématicien anglais, tant algébriste que géomètre et mécanicien, James Joseph Sylvester, 1814-1897) que l'on peut énoncer ainsi :

Théorème 2.2 *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{Q}$ une forme quadratique sur E ; il existe un unique triplet (r, s) d'entiers de $\{0, ..., n\}$ tels que*

- *d'une part $r + s \le n$;*
- *d'autre part, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de $\mathcal{Q}$ dans cette base s'écrive*

$$\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I_s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

où I_r (resp. I_s) désigne la matrice identité de taille (r,r) (resp. de taille (s,s)). Le nombre $r+s$ est le rang de la forme bilinéaire Θ polarisée de $\mathcal{Q}$; on dit que $r+s$ est le rang de la forme quadratique $\mathcal{Q}$. Le couple (r,s) qui "signe" donc la forme quadratique lorsque son rang est fixé est appelé signature de la forme quadratique $\mathcal{Q}$.

Remarque II.8. C'est le fait que les calculs de moments d'inertie

$$\sum_{i=1}^{N} \pm [OM_i]^2 \times |\langle \vec{F}_i \,,\, \vec{u}_i\rangle|$$

($\vec{u}_i$ vecteur unitaire orthogonal à l'axe $0M_i$) en mécanique fassent évidemment apparaître des calculs de formes quadratiques qui justifie la terminologie utilisée pour qualifier le théorème de Sylvester (dit aussi *loi d'inertie de Sylvester*).

Preuve. Montrons tout d'abord l'existence du couple (r,s) ; d'après le théorème 2.1, on sait qu'il existe une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ de E telle que

$$i \neq j \Longrightarrow \Theta(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=0\,.$$

On peut (quitte à réordonner les vecteurs $\vec{e}_i$) supposer

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(\vec{e}_i) &= \Theta(\vec{e}_i,\vec{e}_i) > 0\,,\ i=1,...,r\\
\mathcal{Q}(\vec{e}_i) &= \Theta(\vec{e}_i,\vec{e}_i) < 0\,,\ i=r+1,...,r+s\\
\mathcal{Q}(\vec{e}_i) &= \Theta(\vec{e}_i,\vec{e}_i) = 0\,,\ i=r+s+1,...,n\,.
\end{aligned}$$

Posons, pour $i=1,...,r$ (seulement si $r\geq 1$)

$$\vec{\tilde{e}}_i := \frac{\vec{e}_i}{\sqrt{|\mathcal{Q}(\vec{e}_i)|}} = \frac{\vec{e}_i}{\sqrt{\mathcal{Q}(\vec{e}_i)}}$$

et, pour $i=r+1,...,r+s$ (seulement si $s\geq 1$)

$$\vec{\tilde{e}}_i := \frac{\vec{e}_i}{\sqrt{|\mathcal{Q}(\vec{e}_i)|}} = \frac{\vec{e}_i}{\sqrt{-\mathcal{Q}(\vec{e}_i)}}\,.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
\Theta(\vec{\tilde{e}}_i,\vec{\tilde{e}}_i) &= 1\,,\ i=1,...,r\\
\Theta(\vec{\tilde{e}}_i,\vec{\tilde{e}}_i) &= -1\,,\ i=r+1,...,r+s
\end{aligned}$$

tandis que $(\vec{\tilde{e}}_1,...,\vec{\tilde{e}}_{r+s},\vec{e}_{r+s+1},...,\vec{e}_n)$ est toujours une base $\widetilde{\mathcal{B}}$ de E ; dans cette base, la matrice de $\mathcal{Q}$ s'écrit bien sûr sous la forme (2.16).

Il faut montrer maintenant l'unicité du couple (r,s) ; le rang de la matrice $\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}}$ est le rang de la forme bilinéaire symétrique associée Θ (la forme polarisée de $\mathcal{Q}$) ; la quantité $r+s$ représente donc le rang de cette forme bilinéaire (dès que la matrice de $\mathcal{Q}$ dans une certaine base $\mathcal{B}$ est la matrice (2.16)). Il reste à prouver l'unicité du couple (r,s), une fois que l'on sait que $r+s$ ne dépend que de $\mathcal{Q}$. Supposons donc qu'il existe deux bases $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ et $\widetilde{\mathcal{B}}=(\vec{\tilde{e}}_1,...,\vec{\tilde{e}}_n)$ telles que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -I_s & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\,,\ \mathbf{M}_{\mathcal{Q},\widetilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} I_{\tilde{r}} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -I_{\tilde{s}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $r+s=\tilde{r}+\tilde{s}=\operatorname{rang}(\Theta)$. Les vecteurs $(\vec{e}_{r+s+1},...,\vec{e}_n)$, comme les vecteurs $(\vec{\tilde{e}}_{\tilde{r}+\tilde{s}+1},...,\vec{\tilde{e}}_n)$, constituent une base du noyau $\operatorname{Ker}(\chi_\Theta)$ de l'application

$$\chi_\Theta \ : \ \vec{V} \to \ \Theta(\vec{V},\bullet) \in E^* \,.$$

Soit F un supplémentaire de ce noyau dans E, soit

$$E = F \oplus \operatorname{Ker} \chi_\Theta \,.$$

Posons, pour $i=1,...,r+s$ (seulement si $r+s \geq 1$)

$$\vec{e}_i = \vec{f}_i + \vec{g}_i \,, \ \ \vec{f}_i \in F \,, \ \ \vec{g}_i \in \operatorname{Ker} \chi_\Theta$$

et, pour $i=1,...,\tilde{r}+\tilde{s}$,

$$\vec{\tilde{e}}_i = \vec{\tilde{f}}_i + \vec{\tilde{g}}_i \,, \ \ \vec{\tilde{f}}_i \in F \,, \ \ \vec{\tilde{g}}_i \in \operatorname{Ker} \chi_\Theta \,.$$

Les vecteurs $(\vec{f}_1,...,\vec{f}_{r+s})$, comme les vecteurs $(\vec{\tilde{f}}_1,...,\vec{\tilde{f}}_{\tilde{r}+\tilde{s}})$, forment une base de de F (ce sont des systèmes générateurs de cardinal $\dim F = r+s = \tilde{r}+\tilde{s} = \operatorname{Rang}\Theta$), bien sûr si $r+s=\tilde{r}+\tilde{s} \geq 1$.
Les sous-espaces G et $\tilde{G}$ respectivement engendrés par $(\vec{f}_1,...,\vec{f}_r)$ (ou $\{\vec{0}\}$ si $r=0$) et $(\vec{\tilde{f}}_{\tilde{r}+1},...,\vec{\tilde{f}}_{\tilde{r}+\tilde{s}})$ ont une intersection réduite à $\{\vec{0}\}$. En effet, si $\vec{V}$ est un vecteur non nul de G,

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{r} x_i \vec{f}_i \,,$$

on a

$$\mathcal{Q}(\vec{V}) = \mathcal{Q}\Big(\sum_{i=1}^{r} x_i \vec{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 > 0 \,;$$

d'autre part, si $\vec{W}$ est un vecteur non nul de $\tilde{G}$,

$$\vec{W} = \sum_{i=\tilde{r}+1}^{\tilde{r}+\tilde{s}} y_i \vec{\tilde{f}}_i \,,$$

on a

$$\mathcal{Q}(\vec{W}) = -\sum_{i=\tilde{r}+1}^{\tilde{r}+\tilde{s}} y_i^2 < 0 \,;$$

comme il est impossible qu'un nombre strictement positif soit aussi strictement négatif, les sous-espaces G et $\tilde{G}$ sont en somme directe.
Mais les vecteurs $(\vec{f}_1,...,\vec{f}_r)$ (si $r \geq 1$) forment un système libre car dans ce cas :

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \vec{f}_i = 0 \Longrightarrow \mathcal{Q}\Big(\sum_{i=1}^{r} x_i \vec{f}_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 = 0 \Longrightarrow x_i = 0 \,, \ \ i=1,...,r \,;$$

il en est de même pour les vecteurs $(\vec{\tilde{f}}_{\tilde{r}+1},...,\vec{\tilde{f}}_{\tilde{r}+\tilde{s}})$ (si $s \geq 1$) car dans ce cas :

$$\sum_{i=\tilde{r}+1}^{\tilde{r}+\tilde{s}} y_i \vec{\tilde{f}}_i = 0 \Longrightarrow \mathcal{Q}\Big(\sum_{i=\tilde{r}+1}^{\tilde{r}+\tilde{s}} y_i \vec{\tilde{f}}_i\Big) = -\sum_{i=\tilde{r}+1}^{\tilde{r}+\tilde{s}} y_i^2 = 0 \Longrightarrow y_i = 0 \,, \ \ i=\tilde{r}+1,...,\tilde{r}+\tilde{s} \,.$$

Pour des raisons de dimension, on a donc

$$\dim G + \dim \widetilde{G} = r + \tilde{s} \leq \dim F = r+s = \tilde{r}+\tilde{s} \,;$$

on a donc $\tilde{s} \leq s$ et comme l'on peut permuter les rôles de (r,s) et $(\tilde{r},\tilde{s})$, on a aussi $s \leq \tilde{s}$, soit donc $s = \tilde{s}$ et $r = \tilde{r}$, ce qui prouve bien notre résultat d'unicité et parachève la preuve du théorème d'inertie de Sylvester. $\diamondsuit$

La loi d'inertie de Sylvester se répercute en une classification de l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques réelles : sur cet ensemble, on peut définir la relation d'équivalence suivante, dite de *congruence* : deux matrices symétriques réelles A et B sont dites *congrues* si et seulement si il existe une matrice $n \times n$ inversible réelle P telle que :

$$A = {}^tPBP\,.$$

Attention à ne pas confondre cette relation de congruence avec celle de *similarité*! Deux matrices réelles $n \times n$ A et B sont *semblables* (pas de clause de symétrie ici!) si et seulement si il existe une matrice $n \times n$ réelle inversible P telle que

$$A = P^{-1}BP$$

(ce qui signifie que A et B représentent le même endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans deux bases différentes). Par analogie cependant avec cette dernière formulation, deux matrices $n \times n$ symétriques réelles sont *congrues* si et seulement si elles représentent la même forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ dans deux bases différentes. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 2.3 *Il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation de congruence dans l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques réelles et les couples d'entiers (r,s) tels que $0 \leq r+s \leq n$; plus précisément, dans chaque classe d'équivalence pour cette relation de congruence, figure une et une seule matrice du type*

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I_s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où r,s sont deux entiers entre 0 et n tels que $r+s \leq n$. Classer les matrices symétriques réelles par la relation de congruence équivaut donc à les classer par la signature.

L'assertion du théorème peut être visualisé sur le diagramme 2.2 suivant, où nous avons partitionné l'ensemble des matrices réelles symétriques en autant de sous-ensembles disjoints $C(r,s)$, $0 \leq r \leq n$, $0 \leq s \leq n$, $r+s \leq n$, qu'il y a de choisir ainsi le couple (r,s). Le nombre de choix possibles pour (r,s) est

$$(n+1)[r=0] + n[r=1] + \cdots + 1[r=n, s=0] = 1 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,;$$

chaque sous-ensemble $C(r,s)$ correspond aux matrices symétriques réelles $n \times n$ congrues à la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I_s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ou, si l'on se donne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B}_0$ et si l'on identifie une matrice symétrique réelle A à la forme quadratique ayant A pour matrice dans $\mathcal{B}_0$, aux formes quadratiques sur E admettant la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I_s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

pour matrice dans une certaine base de E.

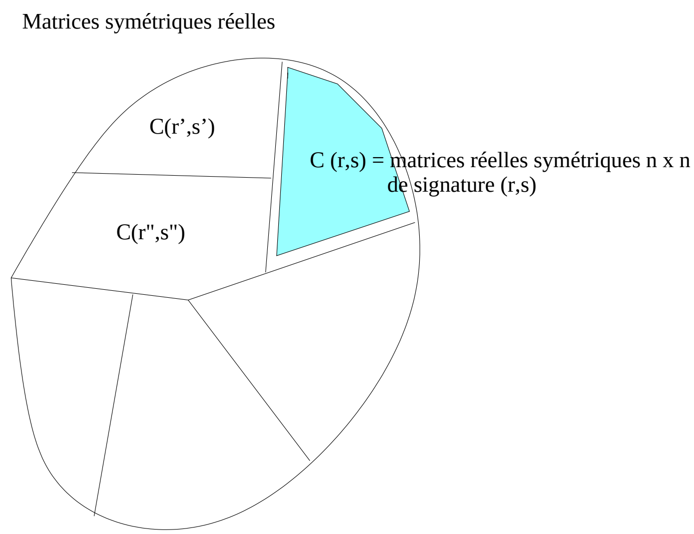

FIG. 2.2 – La classification des matrices symétriques réelles

La classification des formes quadratiques réelles joue un rôle capital dans l'étude locale des fonctions de plusieurs variables. Si la fonction est une fonction de deux variables de classe C^2 au voisinage d'un point (x_0, y_0) et si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0\,,$$

la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$ donne

$$f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\mathcal{Q}_{x_0,y_0}(x,y) + \mathbf{o}(|x|^2 + |y|^2)\,,$$

où $\mathcal{Q}_{x_0,y_0}(x,y)$ désigne la forme quadratique

$$\mathcal{Q}_{x_0,y_0}\ : (x,y) \to \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)x^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)y^2\,,$$

joue, de par sa signature, un rôle clef dans l'étude locale de la fonction f, lorsqu'elle est non dégénérée. C'est la théorie du géomètre américain Marston Morse (1892-1977), que nous esquisseons en donnant un exemple.

Nous allons juste ici illustrer par trois figures les trois configurations que présente (suivant la signature) le graphe d'une fonction

$$(x, y) \to \mathcal{Q}(x, y)$$

où $\mathcal{Q}$ est une forme non-dégénérée : si cette signature vaut $(2, 0)$, alors la fonction présente un minimum global en $(0, 0)$ et le graphe se présente donc comme une cuvette, comme le graphe de

$$(x, y) \to 3x^2 + 2y^2$$

sur la figure 2.3 ci-dessous :

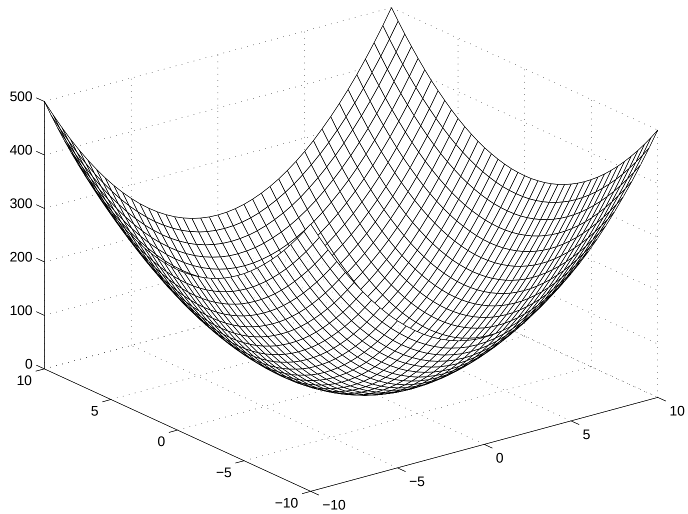

FIG. 2.3 – $(x, y) \to 3x^2 + 2y^2$

Si la signature vaut $(0, 2)$, alors la fonction présente en maximum global en $(0, 0)$ et le graphe se présente donc comme une bosse, comme le graphe de

$$(x, y) \to -3x^2 - 2y^2$$

sur la figure 2.4 ci-dessous :

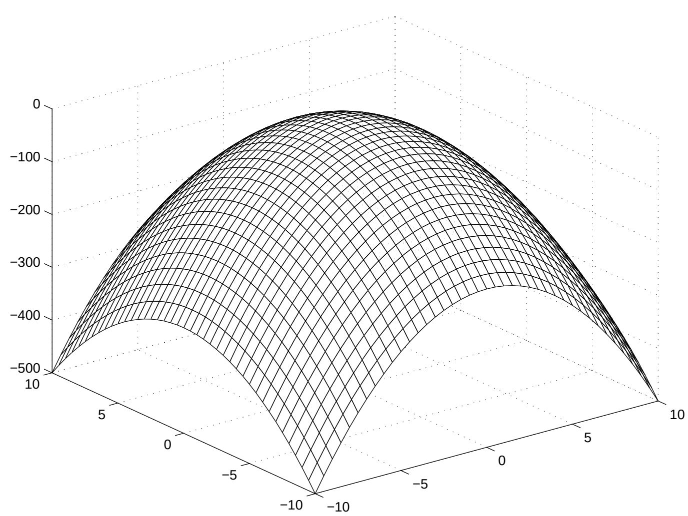

FIG. 2.4 – $(x, y) \to -3x^2 - 2y^2$

Si cette signature vaut $(1, 1)$, alors on obtient le profil du col ou de la selle de cheval, comme le graphe de
$$(x, y) \to 3x^2 - 2y^2$$
sur la figure 2.5 ci-dessous (il n'y a ni maximum ni minimum en $(0, 0)$) :

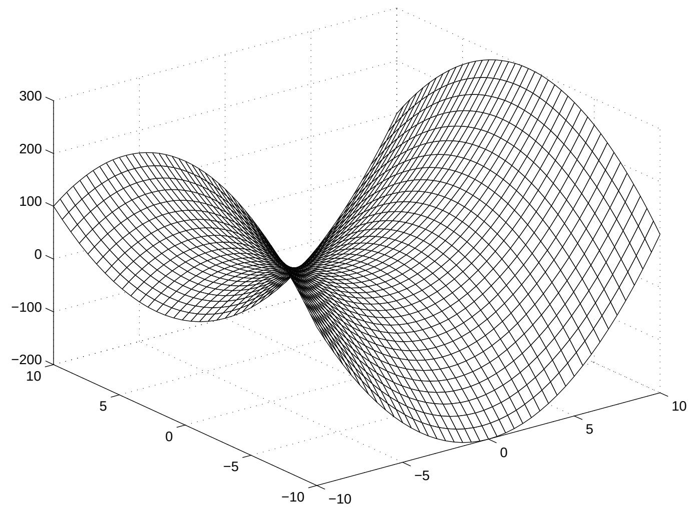

FIG. 2.5 – $(x, y) \to 3x^2 - 2y^2$

2.2.6 Classification des formes quadratiques sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Comme tout nombre complexe non nul a toujours une racine carrée (même deux !), la classification des formes quadratiques sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel se fait simplement par le rang. Le théorème de Sylvester devient dans ce cas l'énoncé plus simple suivant :

Théorème 2.4 *Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{Q}$ une forme quadratique sur E ; il existe un unique entier r de $\{0, ..., n\}$ tel qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de $\mathcal{Q}$ dans cette base s'écrive*
$$\mathbf{M}_{\mathcal{Q},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$
où I_r désigne la matrice identité de taille (r, r). L'entier r est le <u>rang</u> de la forme quadratique.

Preuve. On utilise encore la réduction de Gauss qui nous dit que dans une base bien choisie $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$,
$$\mathcal{Q}(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2$$
avec $\lambda_1 \cdots \lambda_r \neq 0$; on pose $\lambda_i = \mu_i^2$ pour $i = 1, ..., r$ et l'on a donc
$$\mathcal{Q}(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i x_i)^2 .$$

Dans la base $(\vec{\tilde{e}}_1, ..., \vec{\tilde{e}}_r, \vec{e}_{r+1}, ..., \vec{e}_n)$, où

$$\vec{\tilde{e}}_i = \frac{\vec{e}_i}{\mu_i}, \quad i = 1, ..., r,$$

la matrice de $\mathcal{Q}$ est bien de la forme (2.17). Comme r représente le rang de $\mathcal{Q}$, il y a unicité de r et le théorème est démontré. $\diamondsuit$

Sur l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques complexes, on peut encore définir la relation d'équivalence de *congruence* : deux matrices symétriques complexes A et B sont dites congrues si et seulement si il existe une matrice $n \times n$ inversible complexe P telle que :

$$A = {}^tPBP$$

(attention encore une fois à ne pas confondre cette notion avec celle de similarité sur l'ensemble des matrices $n \times n$ complexes). Le théorème 2.4 induit le résultat suivant :

Théorème 2.5 *Il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation de congruence dans l'ensemble des matrices $n\times n$ symétriques complexes et les éléments r de $\{0, ..., n\}$; plus précisément, dans chaque classe d'équivalence pour cette relation de congruence (il y a $n+1$ classes d'équivalence car il y a $n+1$ choix possibles pour un entier r entre 0 et n), figure une et une seule matrice du type*

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Classer les matrices symétriques complexes par la relation de congruence équivaut donc à les classer par le rang.

2.3 Formes sesquilinéaires, hermitiennes, sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, le théorème 2.4 nous assure que toute forme quadratique $\mathcal{Q}$ admet toujours au moins un vecteur isotrope : en effet, on peut choisir une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathcal{Q}$ s'écrive :

$$\mathcal{Q}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k \vec{e}_k\,,\, \sum_{k=1}^{n} z_k \vec{e}_k\Big) = \sum_{k=1}^{r} z_k^2\,,$$

où r est le rang de $\mathcal{Q}$. Si $r < n$, l'espace E est isotrope (car la forme est dégénérée) et tous les vecteurs non nuls du sous-espace

$$\mathbb{C}\vec{e}_{r+1} + \cdots + \mathbb{C}\vec{e}_n$$

sont isotropes ; si $r = n$ et que $t_1, ..., t_{n-1}$ soient $n-1$ nombres complexes tels que

$$t_1^2 + \cdots + t_{n-1}^2 \neq 0$$

(par exemple $n-1$ nombres réels non tous nuls), le nombre complexe

$$-(t_1^2+\cdots+t_{n-1}^2)$$

admet dans $\mathbb{C}$ deux racines carrées :

$$\pm\sqrt{-\sum_{k=1}^{n-1} t_k^2}$$

et les vecteurs

$$\sum_{k=1}^{n-1} t_k \vec{e}_k \pm \sqrt{-\sum_{k=1}^{n-1} t_k^2}\, \vec{e}_n$$

sont deux vecteurs isotropes de E. L'orthogonalité relativement à une forme bilinéaire symétrique non dégénérée Θ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E (ici de dimension finie, mais cela serait *a fortiori* vrai dans un contexte général en dimension quelconque) ne correspond donc pas à l'intuition naïve que l'on pourrait avoir de l'orthogonalité dans un contexte géométrique : on aimerait en effet que dans un tel cadre, si F est un sous-espace de E et $\dim E = n$, alors

$$F^{\perp_\Theta} := \{\vec{V} \in E\,;\, \Theta(\vec{V}\,,\,\vec{W}) = 0 \quad \forall\, \vec{W} \in F\}$$

(qui est, on le sait suite au résultat établi à la fin de la section 2.1, un sous-espace de E de dimension $n - \dim F$) soit en fait un supplémentaire de F dans E, ce qui n'est pas le cas ici si F a le malheur d'être un sous-espace isotrope !

Pour pallier à cet handicap, il nous faut introduire un nouveau concept, différent de celui de la bilinéarité, celui de <u>*sesquilinéarité*</u>.

Définition 2.8 *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel; on appelle <u>sesquilinéaire</u> sur E toute application Ξ de $E\times E$ dans $\mathbb{C}$ telle que :*

$$\forall\, \vec{V}, \vec{\tilde{V}}, \vec{W} \in E\,, \forall\, \lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{C}\,,\ \Xi(\lambda\vec{V} + \tilde{\lambda}\vec{\tilde{V}}\,,\,\vec{W}) = \lambda\Xi(\vec{V}\,,\,\vec{W}) + \tilde{\lambda}\Xi(\vec{\tilde{V}}\,,\,\vec{W}) \tag{2.18}$$

$$\forall\, \vec{V}, \vec{W}, \vec{\tilde{W}} \in E\,, \forall\, \lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{C}\,,\ \Xi(\vec{V}\,,\,\lambda\vec{W} + \tilde{\lambda}\vec{\tilde{W}}) = \overline{\lambda}\Xi(\vec{V}\,,\,\vec{W}) + \overline{\tilde{\lambda}}\Xi(\vec{V}\,,\,\vec{\tilde{W}})\,. \tag{2.19}$$

La forme Ξ est dite de plus <u>vérifier la symétrie hermitienne</u> si et seulement si

$$\forall\, \vec{V}, \vec{W} \in E\,,\ \Xi(\vec{V}, \vec{W}) = \overline{\Xi(\vec{W}, \vec{V})}\,.$$

Remarque II.9. C'est au mathématicien français Charles Hermite (1822-1901) que l'on doit le qualificatif de “forme hermitienne” ou de forme “vérifiant la symétrie hermitienne”. Si Ξ est une forme sesquilinéaire sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et vérifie la symétrie hermitienne, la restriction de Ξ à la diagonale de $E\times E$ (c'est-à-dire à l'ensemble des couples $(\vec{V}, \vec{V})$ lorsque $\vec{V}$ décrit E) est une application à valeurs réelles ; on exploitera cette remarque plus loin lorsque l'on définira (définition 2.9) la notion de forme hermitienne sur E.

Exemples II.4. Dans cette définition, nous ne sommes pas assujettis à supposer E de dimension finie ; aussi nous donnerons des exemples empruntés au cas où E est un espace de fonctions ou de suites (en reprenant les exemples de formes “pseudo-linéaires” introduits dans la liste des exemples 2.1) :

- **1.** si E est le $\mathbb{C}$-espace des fonctions continues à valeurs complexes sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, alors
$$\Xi \;:\; (f, g) \to \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$
est une forme sesquilinéaire (vérifiant la symétrie hermitienne) ;
- **2.** si E est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions C^1 sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et telles que $f(a) = f(b) = 0$, alors
$$\Xi \;:\; (f, g) \to \int_a^b f(t)\overline{g'(t)}dt$$
est une forme sesquilinéaire, ne vérifiant pas la symétrie hermitienne ($\Xi(f, g) = -\overline{\Xi(g, f)}$ du fait de la formule d'intégration par parties) ;
- **3.** si E est le $\mathbb{C}$-espace des séries numériques $[u_n]_{n\geq 0}$ absolument convergentes, les applications
$$\begin{aligned}([u_n]_{n\geq 0}, [v_n]_{n\geq 0}) &\to \sum_{k=0}^{\infty} u_k\overline{v_k}\\ ([u_n]_{n\geq 0}, [v_n]_{n\geq 0}) &\to \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{l=0}^{k} u_l\overline{v_{l-k}}\Big)\end{aligned}$$
sont des formes sesquilinéaires vérifiant la symétrie hermitienne ;
- **4.** si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ et si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont n nombres complexes, alors :
$$\Xi_{\mathcal{B},\lambda} \;:\; \Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\vec{e}_k\,,\, \sum_{k=1}^{n} w_k\vec{e}_k\Big) \to \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\overline{w_k}$$
est une forme sesquilinéaire vérifiant la symétrie hermitienne ;

Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie (que l'on peut donc rapporter à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$), l'écriture matricielle nous permet de représenter (de manière biunivoque) toute forme bilinéaire. Nous avons en effet le résultat capital suivant :

Proposition 2.6 *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ et Ξ une forme sesquilinéaire sur E. Il existe une unique matrice carrée $[a_{i,j}]_{1\leq i\leq j\leq n}$ telle que, pour tout $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, pour tout $(w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$, on ait :*
$$\begin{aligned}&\Xi\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\vec{e}_k\,,\, \sum_{l=1}^{n} w_l\vec{e}_l\Big) =\\ &= \Big(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3, ..., \overline{w}_n\Big)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.20}$$
les coefficients $a_{i,j}$ de la matrice en question sont donnés simplement par les formules
$$a_{i,j} = \Xi(\vec{e}_j, \vec{e}_i)\,, \quad 1 \leq i, j \leq n\,. \tag{2.21}$$
La forme Ξ vérifie la symétrie hermitienne si et seulement si la matrice $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ est telle que
$$\forall i, j \in \{1, ..., n\}\,, \quad a_{j,i} = \overline{a_{i,j}}$$

(une telle matrice carrée est dite *hermitienne). Cette matrice* $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ *(permettant d'identifier la forme sesquilinéaire une fois une base* $\mathcal{B}$ *de l'espace précisée) est dite* *matrice de la forme sesquilinéaire* Ξ *dans la base* $\mathcal{B}$ *et notée* $\mathbf{M}_{\Xi,\mathcal{B}}$.

Preuve. Si la matrice $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ impliquée dans (2.20) existe, on voit tout de suite, en calculant $\Xi(\vec{e}_j,\vec{e}_i)$ précisément avec cette formule (2.20), que

$$\Xi(\vec{e}_j,\vec{e}_i)=a_{i,j}\quad \forall i,j\in\{1,...,n\}\,,$$

ce qui prouve en même temps l'unicité de la matrice $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ réalisant (2.20) et les formules (2.21). La preuve de (2.20) s'obtient en remarquant juste que la sesquilinéarité de Ξ implique que pour tout $(z_1,...,z_n)\in\mathbb{C}^n$, pour tout $(w_1,...,w_n)\in\mathbb{C}^n$, on a :

$$\Xi\Big(\sum_{k=1}^n z_k\vec{e}_k\,,\,\sum_{l=1}^n w_l\vec{e}_l\Big)=\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n z_k\overline{w_l}\,\Xi(\vec{e}_k,\vec{e}_l)\ ;$$

ceci correspond exactement, si l'on développe le calcul matriciel au second membre de (2.20), à l'identité voulue. $\diamondsuit$

Si l'on remplace la base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ par la base $\widetilde{\mathcal{B}}=(\vec{\tilde{e}}_1,...,\vec{\tilde{e}}_n)$ et si l'on note $[\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}]$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$, la relation entre le système de coordonnées $(Z_1,...,Z_n)$ d'un vecteur $\vec{V}$ dans la base $\widetilde{\mathcal{B}}$ en fonction du système $(z_1,...,z_n)$ de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}=[\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}]\begin{pmatrix} Z_1\\ \vdots\\ Z_n\end{pmatrix}\ ;$$

on voit donc ainsi comment relier les matrices d'une forme sesquilinéaire Ξ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$: on a effet, si $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice de Ξ dans la base $\mathcal{B}$,

$$\Xi\Big(\sum_{k=1}^n Z_k\vec{\tilde{e}}_k\,,\,\sum_{l=1}^n W_l\vec{\tilde{e}}_l\Big)=$$

$$\big(\overline{W}_1,\overline{W}_2,\overline{W}_3,...,\overline{W}_n\big)\,{}^t\overline{[\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}]}\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}[\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}]\begin{pmatrix} Z_1\\ Z_2\\ Z_3\\ \vdots\\ Z_n\end{pmatrix}$$

d'où la formule de changement de base pour une forme sesquilinéaire

$$\mathbf{M}_{\Xi,\widetilde{\mathcal{B}}}={}^t\overline{[\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}]}\bullet\mathbf{M}_{\Xi,\mathcal{B}}\bullet[\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}]\tag{2.22}$$

(la "barre" au-dessus d'une matrice de nombres complexes indique que l'on en conjugue tous les coefficients).

Revenons maintenant au cas général d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque pour définir les notions de *dégénérescence (ou non)* et, lorsque l'espace E est de dimension finie, de *rang* d'une forme sesquilinéaire.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et Ξ une forme sesquilinéaire sur E ; la forme Ξ est dite *dégénérée* si et seulement si il existe un vecteur $\vec{V}$ non nul de E tel que

$$\forall\vec{W}\in E\,,\quad \Xi(\vec{V}\,,\vec{W})=0\,;$$

s'il n'existe pas de tel vecteur, on dit que la forme Ξ est *non-dégénérée*.

Si E est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie n, une forme sesquilinéaire Ξ est non dégénérée si et seulement si sa matrice dans une base quelconque est inversible (cette condition ne dépend pas de la base puisque, d'après la formule de changement de base, on a

$$\mathbf{M}_{\Xi,\widetilde{\mathcal{B}}} = |\det[\widetilde{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}]|^2\, \mathbf{M}_{\Xi,\mathcal{B}}\ \Big).$$

Si Ξ est une forme sesquilinéaire sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, l'ensemble

$$K_\Xi := \{\vec{V} \in E\,;\, \Xi(\vec{V},\vec{W}) = 0 \quad \forall \vec{W} \in E\}$$

est un sous-espace vectoriel de E ; si A est la matrice de Ξ dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de E, on voit que

$$K_\Xi := \left\{\vec{V} = \sum_{k=1} z_k \vec{e}_k\,;\, A \bullet \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0\right\};$$

le sous-espace K_Ξ est donc le noyau du $\mathbb{C}$-endomorphisme de E dont A est la matrice dans la base $\mathcal{B}$; le rang de la matrice de Ξ dans une base quelconque de E est donc indépendant de cette base et vaut $n - \dim K_\Xi$; on appelle cet entier le *rang* de la forme sesquilinéaire Ξ.

Étant donnée une forme sesquilinéaire Ξ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, telle que Ξ vérifie la symétrie hermitienne, on a sur E une relation d'*orthogonalité relativement à Ξ* (cette relation est symétrique) en décrétant :

$$\vec{V} \perp_\Xi \vec{W} \Longleftrightarrow \Xi(\vec{V},\vec{W}) = 0\,.$$

Comme pour les formes bilinéaires symétriques, on a la notion d'*isotropie* : un vecteur non nul $\vec{V}$ est dit *isotrope relativement à Ξ* si et seulement si $\Xi(\vec{V},\vec{V}) = 0$; un sous-espace F de E est dit *isotrope relativement à Ξ* si et seulement si

$$F \cap \{\vec{V} \in E\,;\, \vec{V} \perp_\Xi \vec{W}\,, \quad \forall \vec{W} \in F\} \neq \{\vec{0}\}\,.$$

Dire que la forme Ξ est dégénérée équivaut donc à dire que l'espace E lui-même est isotrope.

Donnons maintenant la définition des êtres déduits des formes sesquilinéaires vérifiant la symétrie hermitienne comme le sont les formes quadratiques à partir des formes bilinéaires symétriques.

Définition 2.9 *On appelle forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E toute application $\mathcal{H}$ de E dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une (forçément unique, on le verra !) forme sesquilinéaire Ξ sur E, vérifiant la symétrie hermitienne, et telle que*

$$\forall \vec{V} \in E\,, \quad \mathcal{H}(\vec{V}) = \Xi(\vec{V},\vec{V})\,.$$

L'unicité de la forme Ξ, lorsqu'elle existe, est facile à prouver ; d'ailleurs cette forme Ξ est donnée par la formule dite encore *de polarisation* ; on dit que Ξ est la *polarisée* de la forme hermitienne $\mathcal{H}$. Pour calculer Ξ à partir de $\mathcal{H}$, voici comment on procède : on remarque que si $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont deux vecteurs de E,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\vec{V}+\vec{W}) &= \Xi(\vec{V}+\vec{W},\vec{V}+\vec{W}) = \Xi(\vec{V},\vec{V}) + \Xi(\vec{W},\vec{W}) + \Xi(\vec{V},\vec{W}) + \Xi(\vec{W},\vec{V}) \\
&= \mathcal{H}(\vec{V}) + \mathcal{H}(\vec{W}) + \Xi(\vec{V},\vec{W}) + \overline{\Xi(\vec{V},\vec{W})} \\
&= \mathcal{H}(\vec{V}) + \mathcal{H}(\vec{W}) + 2\,\mathrm{Re}\,[\Xi(\vec{V},\vec{W})]
\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\vec{V}-\vec{W}) &= \Xi(\vec{V}-\vec{W},\vec{V}-\vec{W}) = \Xi(\vec{V},\vec{V}) + \Xi(\vec{W},\vec{W}) - \Xi(\vec{V},\vec{W}) - \Xi(\vec{W},\vec{V}) \\
&= \mathcal{H}(\vec{V}) + \mathcal{H}(\vec{W}) - \Xi(\vec{V},\vec{W}) - \overline{\Xi(\vec{V},\vec{W})} \\
&= \mathcal{H}(\vec{V}) + \mathcal{H}(\vec{W}) - 2\,\mathrm{Re}\,[\Xi(\vec{V},\vec{W})]\,,
\end{aligned}$$

d'où la première formule :

$$\mathrm{Re}\,[\Xi(\vec{V},\vec{W})] = \frac{\mathcal{H}(\vec{V}+\vec{W}) - \mathcal{H}(\vec{V}-\vec{W})}{4}\,;$$

d'autre part, toujours en exploitant la sesquilinéarité de Ξ et le fait que Ξ vérifie la symétrie hermitienne,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\vec{V}+i\vec{W}) &= \Xi(\vec{V}+i\vec{W},\vec{V}+i\vec{W}) = \Xi(\vec{V},\vec{V}) - \Xi(\vec{W},\vec{W}) \\
&\qquad -i(\Xi(\vec{V},\vec{W}) - \Xi(\vec{W},\vec{V})) \\
&= \mathcal{H}(\vec{V}) - \mathcal{H}(\vec{W}) - i(\Xi(\vec{V},\vec{W}) - \overline{\Xi(\vec{V},\vec{W})}) \\
&= \mathcal{H}(\vec{V}) - \mathcal{H}(\vec{W}) + 2\,\mathrm{Im}\,[\Xi(\vec{V},\vec{W})]
\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\vec{V}-i\vec{W}) &= \Xi(\vec{V}-i\vec{W},\vec{V}-i\vec{W}) = \Xi(\vec{V},\vec{V}) - \Xi(\vec{W},\vec{W}) \\
&\qquad +i(\Xi(\vec{V},\vec{W}) - \Xi(\vec{W},\vec{V})) \\
&= \mathcal{H}(\vec{V}) - \mathcal{H}(\vec{W}) + i(\Xi(\vec{V},\vec{W}) - \overline{\Xi(\vec{W},\vec{V})}) \\
&= \mathcal{H}(\vec{V}) - \mathcal{H}(\vec{W}) - 2\,\mathrm{Im}\,[\Xi(\vec{V},\vec{W})]\,,
\end{aligned}$$

d'où la seconde formule

$$\mathrm{Im}\,[\Xi(\vec{V},\vec{W})] = \frac{\mathcal{H}(\vec{V}+i\vec{W}) - \mathcal{H}(\vec{V}-i\vec{W})}{4}\,;$$

finalement, la formule de polarisation est donc :

$$\Xi(\vec{V},\vec{W}) = \frac{\mathcal{H}(\vec{V}+\vec{W}) - \mathcal{H}(\vec{V}-\vec{W}) + i\mathcal{H}(\vec{V}+i\vec{W}) - i\mathcal{H}(\vec{V}-i\vec{W})}{4} \tag{2.23}$$

En dimension finie, on a le résultat suivant :

Proposition 2.7 *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{H}$ une forme hermitienne sur E, de forme polarisée Ξ. Alors, si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base de E, on a*

$$\mathcal{H}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k \vec{e}_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} \, |z_k|^2 + 2 \, \mathrm{Re} \Big[\sum_{1 \le k < l \le n} a_{k,l} z_k \overline{z_l} \Big] , \tag{2.24}$$

où

$$A = [a_{k,l}]_{1 \le k,l \le n} = \mathbf{M}_{\Xi \,,\, \mathcal{B}} \,.$$

On dit que A est la matrice de $\mathcal{H}$ dans la base $\mathcal{B}$ et l'on écrit :

$$A = \mathbf{M}_{\mathcal{H} \,,\, \mathcal{B}} \,.$$

Preuve. Pour obtenir la formule (2.24), il suffit d'écrire, comme Ξ est la forme polarisée de $\mathcal{H}$ et que A (qui est une matrice hermitienne) est la matrice de Ξ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{H}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k \vec{e}_k\Big) = \Xi\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k \vec{\tilde{e}}_k \,,\, \sum_{k=1}^{n} z_k \vec{\tilde{e}}_k\Big)$$

$$= \big(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3, ..., \overline{z}_n\big) \bullet \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ \overline{a_{1,2}} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \overline{a_{1,3}} & \overline{a_{2,3}} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_{1,n}} & \overline{a_{2,n}} & \overline{a_{3,n}} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} ,$$

puis de développer le calcul matriciel figurant au second membre de l'identité ainsi obtenue. $\diamondsuit$

2.4 Produit scalaire, espaces euclidiens ou hermitiens

2.4.1 Le cadre réel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; nous introduisons pour les formes quadratiques sur E trois concepts importants :

- une forme quadratique $\mathcal{Q}$ sur E est *positive* si et seulement si

  $$\forall \vec{V} \in E \,,\ \mathcal{Q}(\vec{V}) \ge 0 \,;$$

  dans le cas particulier où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, une forme quadratique est positive si et seulement si elle est de signature $(r, 0)$, avec r entre 0 et n ;
- une forme quadratique est dite *définie* si et seulement si

  $$\forall \vec{V} \in E \,,\ \mathcal{Q}(\vec{V}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{V} = 0 \ ;$$

  si E est de dimension finie n, on voit immédiatement en utilisant la loi d'inertie de Sylvester (théorème 2.2) qu'une forme quadratique sur E est définie si et seulement si elle est de signature $(n, 0)$ ou $(0, n)$;

– une forme quadratique sur E est dite <u>*définie positive*</u> si et seulement si elle est définie et positive ; si E est de dimension finie n, une forme $\mathcal{Q}$ est définie positive si et seulement si elle est de signature $(n,0)$; on appelle <u>*produit scalaire*</u> sur $E\times E$ la forme bilinéaire polarisée d'une forme définie positive. Par exemple, si E est un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie n, rapporté à une base $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$, la forme
$$\Theta\ :\Big(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i,\sum_{j=1}^n y_j\vec{e}_j\Big)\to\sum_{k=1}^n x_ky_k$$
est un produit scalaire sur $E\times E$; si $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, la forme bilinéaire symétrique
$$\Theta\ :(f,g)\to\int_a^b f(t)g(t)\,dt$$
est un produit scalaire sur $E\times E$ (associé à la forme quadratique correspondant à l'énergie).

Le couple constitué d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et d'un produit scalaire est appelé <u>*structure pré-euclidienne*</u> sur E (ou simplement <u>*euclidienne*</u> si E est de dimension finie) ; on verra plus loin que c'est dans un tel cadre que l'on peut faire de la géométrie réelle "<u>*à la Pythagore*</u>", c'est-à-dire transposer les idées de la géométrie euclidienne classique que l'on fait dans le cadre de $\mathbb{R}^2$ (géométrie euclidienne plane) ou de $\mathbb{R}^3$ (géométrie euclidienne dans l'espace). Si l'on dispose d'une forme quadratique non dégénérée qui ne soit pas un produit scalaire (commer la forme de Lorentz, $Q(x,y,z,t)\ :=\ x^2+y^2+z^2-ct^2$ dans l'espace-temps $\mathbb{R}^4$), on peut néanmoins faire de la géométrie, mais cette fois non euclidienne, c'est-à-dire sans théorème de Pythagore : avec par exemple la forme de Lorentz dans $\mathbb{R}^4$, on fait de la *géométrie Lorentzienne*, qui est la géométrie de la mécanique relativiste, celle dans laquelle se plaçait Einstein, au contraire de la géométrie euclidienne qui soutend la *mécanique Newtonienne* dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Dans le cadre pré-euclidien, l'inégalité ci-dessous, dite <u>*inégalité de Cauchy-Schwarz*</u>, établie par l'analyste français Augustin Cauchy et le géomètre allemand Hermann Schwarz (1843-1921) (on l'appelle aussi inégalité de Cauchy-Bunyakovsky dans la culture de l'ex-monde soviétique) joue un rôle central.

Proposition 2.8 [Cauchy-Schwarz réel] *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{Q}$ une forme quadratique positive sur E, de forme polarisée Θ ; alors*
$$\forall\vec{V}\in E,\quad\forall\vec{W}\in E,\quad|\Theta(\vec{V},\vec{W})|\le\sqrt{\mathcal{Q}(\vec{V})}\,\sqrt{\mathcal{Q}(\vec{V})}\,. \tag{2.25}$$
Si de plus la forme quadratique $\mathcal{Q}$ est définie positive, il y a égalité dans (2.25) *si et seulement si $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont des vecteurs liés.*

Preuve. On utilise le fait que, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on ait
$$\mathcal{Q}(\vec{V}+\lambda\vec{W})\ge 0\,;$$
en développant, il vient
$$\lambda^2\mathcal{Q}(\vec{W})+2\lambda\Theta(\vec{V},\vec{W})+\mathcal{Q}(\vec{V})\ge 0 \tag{2.26}$$
pour tout λ réel. De deux choses l'une :

– soit $\mathcal{Q}(\vec{W}) \neq 0$ et dans ce cas le fait que le trinôme en λ intervenant dans (2.26) reste positif ou nul (c'est-à-dire du signe du coefficient dominant $\mathcal{Q}(\vec{W})$) implique que le discriminant réduit de ce trinôme doit être négatif ou nul, soit

$$(\Theta(\vec{V}, \vec{W}))^2 \leq \mathcal{Q}(\vec{V})\,\mathcal{Q}(\vec{W}),$$

ce qui correspond bien, si l'on prend la racine carrée, à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (2.25) ;

– soit $\mathcal{Q}(\vec{W}) = 0$, mais dans ce cas il est indispensable, pour que la fonction polynomiale du premier degré

$$\lambda \to 2\lambda\Theta(\vec{V}, \vec{W}) + \mathcal{Q}(\vec{V})$$

reste positive ou nulle, que $\Theta(\vec{V}, \vec{W}) = 0$.

On suppose maintenant $\mathcal{Q}$ définie positive. Si l'on a l'égalité dans (2.25), alors de deux choses l'une :

– soit on est dans le premier cas ($\mathcal{Q}(\vec{W}) > 0$) et alors, si le discriminant du trinôme en λ figurant dans (2.26) est nul (c'est-à-dire si l'on a égalité dans (2.25)), ce trinôme admet une recine double réelle λ_0 et l'on a donc

$$\mathcal{Q}(\vec{V} + \lambda_0 \vec{W}) = 0\,;$$

mais comme $\mathcal{Q}$ est définie, il vient $\vec{V} + \lambda_0\vec{W} = \vec{0}$, ce qui prouve que les deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont liés ;

– soit $\mathcal{Q}(\vec{W}) = 0$, mais alors $\vec{W} = \vec{0}$ et les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont bien sûr liés (car l'un d'eux est le vecteur nul).

On voit donc que dans les deux cas, l'égalité dans (2.25) n'est possible que si les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont liés ; s'ils le sont, alors on vérifie tout de suite qu'il y a automatiquement égalité dans (2.25).

On a bien prouvé les deux volets de la proposition. $\diamondsuit$

2.4.2 Le cadre complexe

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ; nous introduisons pour les formes hermitiennes sur E trois concepts inspirés des concepts introduits pour les formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

– une forme hermitienne $\mathcal{H}$ sur E est *positive* si et seulement si

$$\forall \vec{V} \in E\,,\ \mathcal{H}(\vec{V}) \geq 0\,;$$

– une forme hermitienne est dite *définie* si et seulement si

$$\forall \vec{V} \in E\,,\ \mathcal{H}(\vec{V}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{V} = 0\ ;$$

une forme hermitienne définie ne peut avoir aucun vecteur isotrope, elle est certainement non dégénérée ;

– une forme quadratique sur E est dite *définie positive* si et seulement si elle est définie et positive.

On appelle encore <u>*produit scalaire*</u> sur $E \times E$ (E étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) la forme sesquilinéaire (et vérifiant la symétrie hermitienne) polarisée d'une forme hermitienne définie positive sur E. Si par exemple E est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie n, rapporté à une base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$, la forme

$$\Xi\ :\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k \vec{e}_k, \sum_{l=1}^{n} w_l \vec{e}_l\Big) \to \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_l}$$

est un produit scalaire sur $E \times E$; si $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$, la forme sesquilinéaire (vérifiant la symétrie hermitienne)

$$\Xi\ : (f,g) \to \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

est un produit scalaire sur $E \times E$ (associé à la forme hermitienne correspondant à l'énergie).

Le couple constitué d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et d'un produit scalaire est appelé <u>*structure pré-hilbertienne*</u> sur E (ou simplement <u>*hilbertienne*</u> si E est de dimension finie, ce en référence au mathématicien allemand David Hilbert, 1862-1943, qui contribua à forger les aspects opérationnels de ce concept) ; on verra plus loin que c'est dans un tel cadre que l'on peut faire de la géométrie complexe "<u>*à la Pythagore*</u>".

Dans le cadre préhilbertien, subsiste l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; on a en effet la proposition suivante, tout-à-fait analogue à la proposition 2.9 :

Proposition 2.9 [Cauchy-Schwarz complexe] *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\mathcal{H}$ une forme hermitienne positive sur E, de forme polarisée Ξ ; alors*

$$\forall \vec{V} \in E, \quad \forall \vec{W} \in E, \quad |\Xi(\vec{V}, \vec{W})| \leq \sqrt{\mathcal{H}(\vec{V})}\,\sqrt{\mathcal{H}(\vec{V})}\,. \tag{2.27}$$

Si de plus la forme hermitienne $\mathcal{H}$ est définie positive, il y a égalité dans (2.27) *si et seulement si $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont des vecteurs liés.*

Preuve. On utilise le fait que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on ait

$$\mathcal{H}(\vec{V} + \lambda \vec{W}) \geq 0\,;$$

en développant, il vient

$$|\lambda|^2 \mathcal{H}(\vec{W}) + 2\mathrm{Re}\,[\lambda\, \Xi(\vec{W}, \vec{V})] + \mathcal{H}(\vec{V}) \geq 0 \tag{2.28}$$

pour tout λ complexe ; on peut en particulier prendre $\lambda = te^{i\theta}$, avec θ fixé dans $\mathbb{R}$ tel que

$$|\Xi(\vec{V}, \vec{W})| = \mathrm{Re}\,[e^{i\theta}\, \Xi(\vec{W}, \vec{V})]\,; \tag{2.29}$$

on a alors, pout tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{H}(\vec{W})t^2 + 2t\mathrm{Re}\,[e^{i\theta}\, \Xi(\vec{W}, \vec{V})] + \mathcal{H}(\vec{V}) = \mathcal{H}(\vec{W})t^2 + 2t\,|\Xi(\vec{V}, \vec{W})| + \mathcal{H}(\vec{V}) \geq 0 \tag{2.30}$$

et l'on conclut comme pour la preuve de la proposition 2.9.

On suppose maintenant $\mathcal{H}$ définie positive ; on se donne $\vec{V}$, $\vec{W}$ et θ comme dans (2.29). Si l'on a l'égalité dans (2.27), alors de deux choses l'une :

- soit on est dans le premier cas ($\mathcal{H}(\vec{W}) > 0$) et alors, si le discriminant du trinôme en t figurant dans (2.30) est nul (c'est-à-dire si l'on a égalité dans (2.27)), ce trinôme admet une recine double réelle λ_0 et l'on a donc
$$\mathcal{Q}(\vec{V} + t_0 e^{i\theta} \vec{W}) = 0\,;$$
mais comme $\mathcal{Q}$ est définie, il vient $\vec{V} + t_0 e^{i\theta}\vec{W} = \vec{0}$, ce qui prouve que les deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont liés ;
- soit $\mathcal{Q}(\vec{W}) = 0$, mais alors $\vec{W} = \vec{0}$ et les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont bien sûr liés (car l'un d'eux est le vecteur nul).

On voit donc que dans les deux cas, l'égalité dans (2.27) n'est possible que si les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont liés ; s'ils le sont, alors on vérifie comme dans le cas réel qu'il y a automatiquement égalité dans (2.27).

On a bien prouvé les deux volets de la proposition. $\diamondsuit$

La raison pour laquelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz, tant dans le cadre réel que dans le cadre complexe, joue un rôle si crucial en mathématiques (toutes spécialités confondues) est certainement qu'elle se situe au carrefour de l'algèbre (théorie des formes quadratiques ou hermitiennes), de l'analyse (la positivité dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ y joue un rôle capital et il s'agit d'une inégalité, donc d'un concept de nature *a priori* analytique) et enfin de la géométrie (le cadre où s'exerce dans toute sa puissance le théorème de Pythagore).

2.4.3 Orthogonalité relativement à un produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $E \times E$ (on utilisera toujours cette notation entre crochets pour désigner un produit scalaire). On notera $\|\ \ \|^2$ la forme (quadratique ou hermitienne, mais en tout cas définie positive) dont le produit scalaire est la polarisée. Si F est un sous-espace de E, on notera aussi $F^\perp$ l'orthogonal de F relativement à ce produit scalaire, c'est-à-dire
$$F^\perp := \{\vec{V} \in E\,;\, \forall\, \vec{W} \in F\,, \langle \vec{V}\,,\, \vec{W}\rangle = \langle \vec{W}\,,\, \vec{V}\rangle = 0\}\,.$$

Dans le cadre des espaces (pré)-euclidiens ou (pré)-hilbertien, on a le très classique *théorème de Pythagore*, fondement de toute la géométrie dans ces espaces, qu'ils soient espaces sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

Théorème 2.6 [Pythagore] *Soit E un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel équipé d'un produit scalaire $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$ et F un sous-espace non réduit à $\{\vec{0}\}$ de E. Alors F est non-isotrope relativement à ce produit scalaire et tout élément $\vec{V}$ du sous-espace $F \oplus F^\perp$ s'écrit de manière unique sous la forme :*
$$\vec{V} = \mathrm{pr}_F(\vec{V}) + \mathrm{pr}_{F^\perp}(\vec{V}) \tag{2.31}$$
avec $\mathrm{pr}_F(\vec{V}) \in F$, $\mathrm{pr}_{F^\perp}(\vec{V}) \in F^\perp$,
$$\langle \mathrm{pr}_F(\vec{V})\,,\, \mathrm{pr}_{F^\perp}(\vec{V})\rangle = 0$$
et
$$\|\vec{V}\|^2 = \|\mathrm{pr}_F(\vec{V})\|^2 + \|\mathrm{pr}_{F^\perp}(\vec{V})\|^2\,; \tag{2.32}$$

les deux vecteurs $\mathrm{pr}_F(\vec{V})$ *et* $\mathrm{pr}_{F^\perp}(\vec{V})$ *sont appelés* *projections orthogonales* *de* $\vec{V}$ *sur* F *et de* $\vec{V}$ *sur* $F^\perp$*. Si de plus* E *est de dimension finie, on a*

$$E = F \oplus F^\perp$$

et l'endomorphisme

$$\vec{V} \in E \to \mathrm{pr}_F(\vec{V})$$

est appelé *projection orthogonale sur le sous-espace* F.

Remarque II.10. Il suit du théorème de Pythagore que si E est de dimension finie

$$\|\vec{V} - \mathrm{pr}_F(\vec{V})\|^2 = \min_{\vec{W} \in F} \|\vec{V} - \vec{W}\|^2 \,; \tag{2.33}$$

en effet, si $\vec{W}$ est un vecteur de F, les deux vecteurs $\vec{V} - \mathrm{pr}_F(\vec{V})$ (ce vecteur est dans $F^\perp$ car c'est $\mathrm{pr}_{F^\perp}(\vec{V})$) et $\mathrm{pr}_F(\vec{V}) - \vec{W}$ (avec $\vec{W}$ dans F) sont orthogonaux (le second vecteur étant dans F) ; comme

$$\vec{V} - \vec{W} = (\vec{V} - \mathrm{pr}_F(\vec{V})) + (\mathrm{pr}_F(\vec{V}) - \vec{W})$$

on a, d'après la formule de Pythagore (2.32),

$$\|\vec{V} - \vec{W}\|^2 = \|\vec{V} - \mathrm{pr}_F(\vec{V})\|^2 + \|\mathrm{pr}_F(\vec{V}) - \vec{W}\|^2 \geq \|\vec{V} - \mathrm{pr}_F(\vec{V})\|^2 \,,$$

d'où notre affirmation (2.33) ; cette remarque sera très importante du point de vue pratique car c'est elle qui sera à la base de la *méthode des moindres carrés*, si essentielle en analyse numérique ou plus généralement en mathématiques appliquées.

Preuve. Si $\vec{V}$ est un vecteur non nul de F tel que $\vec{V} \in F^\perp$, on a $\|\vec{V}\|^2 = \langle \vec{V}\,,\, \vec{V} \rangle = 0$ et donc, puisque la forme est définie positive, $\vec{V} = \vec{0}$. Ainsi F et $F^\perp$ sont-ils tels que $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$. Tout vecteur $\vec{V}$ de $F \oplus F^\perp$ s'écrit bien de manière unique

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

avec $\vec{V}_1 \in F$ et $\vec{V}_2 \in F^\perp$. On peut donc bien définir $\mathrm{pr}_F(\vec{V})$ comme le vecteur $\vec{V}_1$ et $\mathrm{pr}_{F^perp}(\vec{V})$ comme le vecteur $\vec{V}_2$. On a bien sûr $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$, soit $\langle \vec{V}_1\,,\, \vec{V}_2 \rangle = 0$ et

$$\begin{aligned}
\|\vec{V}\|^2 &= \|V_1\|^2 + \|V_2\|^2 + \langle \vec{V}_1\,,\, \vec{V}_2 \rangle + \langle \vec{V}_2\,,\, \vec{V}_1 \rangle \\
&= \|\vec{V}_1\|^2 + \|\vec{V}_2\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[\langle \vec{V}_1\,,\, \vec{V}_2 \rangle\right] \\
&= \|\vec{V}_1\|^2 + \|\vec{V}_2\|^2 \,.
\end{aligned}$$

Soit maintenant E de dimension finie et $G = F \oplus F^\perp$; si $G \neq E$, il existe un vecteur $\vec{W}$ de $E \setminus G$; nous allons "corriger" ce vecteur par un élément de G pour en faire un vecteur non nul et orthogonal à G (nous reprendrons plus loin cette idée de construction pour en faire la pierre angulaire du *procédé de Gram-Schmidt*). Soit $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_p)$ une base de G ; considérons le vecteur

$$\vec{\widetilde{W}} = \vec{W} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, \vec{e}_k \,,$$

$\lambda_1, ..., \lambda_p$ étant p éléments pour l'instant arbitraires du corps de base $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; ce vecteur $\vec{\widetilde{W}}$ sera orthogonal à G (et certainement non nul puisque $\vec{W} \notin G$) si et seulement si il est orthogonal à tous les $\vec{e}_k$, $k = 1, ..., p$, c'est-à-dire si $(\lambda_1, ..., \lambda_p)$ est solution du système linéaire de p équations à k inconnues :

$$\sum_{k=1}^{p} \langle \vec{e}_k \, , \, \vec{e}_l \rangle \, \lambda_k = \langle \vec{W} \, , \, \vec{e}_l \rangle \ , \qquad l = 1, ..., p \, . \tag{2.34}$$

Or la restriction du produit scalaire à $G \times G$ est une forme bilinéaire si le corps de base est $\mathbb{R}$ (ou sesquilinéaire si le corps de base est $\mathbb{C}$) non dégénérée (puisqu'il n'y a pas de vecteur isotrope relativement à la forme quadratique ou hermitienne définie positive associée) ; la matrice

$$\Big[\langle \vec{e}_k \, , \, \vec{e}_l \rangle \Big]_{1 \leq k,l \leq p}$$

est donc de rang p et le système (2.34) est un système de Cramer. Il existe donc un unique choix de scalaires $(\lambda_1, ..., \lambda_p)$ tels que le vecteur

$$\vec{\tilde{W}} = \vec{W} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, \vec{e}_k$$

soit non nul et orthogonal à G. Le vecteur $\vec{W}$ correspondant à ce choix de paramètres est donc un vecteur non nul orthogonal à G, donc à F et $F^{\perp}$; ce vecteur est donc $F^{\perp}$ (il est orthogonal à F), ce qui est contradictoire avec le fait que $\vec{\tilde{W}}$ n'appartienne pas à $G = F + F^{\perp}$. $\diamondsuit$

Le fait que le cadre euclidien ou hilbertien soit un cadre dans lequel on peut mimer les idées classiques de la géométrie "à la Pythagore" de $\mathbb{R}^3$ pour les transposer à un contexte plus abstrait est fondamental. Même s'il faut prendre garde à certains pièges (surtout d'ailleurs en dimension infinie, c'est-à-dire lorsque les espaces sont des espaces de fonctions), on peut s'aider de diagrammes simples copiés du modèle qu'est $\mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire usuel pour avoir l'intuition de raisonnements ou d'algorithmes cruciaux en mathématiques tant pures qu'appliquées ; en voici un exemple : supposons que E soit un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-espace euclidien (resp. hilbertien), disons de dimension finie, et que F_1 et F_2 soient deux sous-espaces tels que F_1 et $F_2^{\perp}$ fassent entre eux un angle strictement positif, ce que l'on peut quantifier en disant par exemple qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\forall \, \vec{V} \in F_1 \, , \; \forall \, \vec{W} \in F_2^{\perp} \, , \quad |\langle \vec{V} \, , \, \vec{W} \rangle| \leq (1 - \theta) \, \|\vec{V}\| \, \|\vec{W}\|$$

(comme nous l'avons illustré sur la figure 2.6, où nous avons schématisé les sous-espaces par des droites). Supposons que $\vec{V}$ soit un élément (inconnu) de F_1 dont on connaisse la projection orthogonale sur F_2, $\vec{V}_0 = \mathrm{pr}_{F_2}[\vec{V}]$; alors nous pouvons suggérer à l'aide du diagramme inspiré des idées pythagoriciennes une démarche itérative $\vec{V}_0 \to \vec{V}_1 \to \vec{V}_2 \to ...$ (voir la figure) pour se rapprocher du vecteur inconnu $\vec{V}$; c'est la méthode dite <u>*des projections itérées*</u> si intéressante en mathématiques appliquées que nous avons voulu suggérer ici pour souligner toute l'importance pratique de "l'algorithmique hilbertienne".

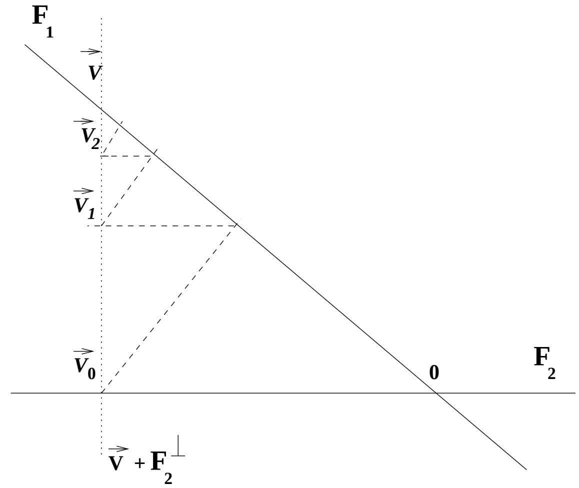

FIG. 2.6 – *Un exemple pratique d'algorithmique hilbertienne*

2.4.4 Le théorème de dualité

Si E est un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-espace vectoriel de dimension finie équipé d'un produit scalaire $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ et si $\vec{V}$ est un vecteur de E, l'application

$$\vec{W} \to \langle \vec{W} \, , \, \vec{V} \rangle$$

est une forme linéaire sur E, c'est-à-dire un élément du dual E^* de E (remarquons que l'on ne pourrait en dire autant de $\vec{W} \to \langle \vec{V} \, , \, \vec{W} \rangle$ puisque dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$, pareille application n'est plus linéaire, mais seulement antilinéaire, au sens où les scalaires complexes sont conjugués).

En fait, tout élément de E^* se représente de cette manière, ce que nous formalisons avec le très important <u>*théorème de Riesz*</u>, du dans un contexte bien plus général que celui des espaces vectoriels de dimension finie que nous évoquons ici) au mathématicien austro-hongrois Frigyes Riesz (1880-1956) :

Théorème 2.7 [théorème de F. Riesz] *Soit E un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-espace vectoriel de dimension finie n équipé d'un produit scalaire (c'est-à-dire d'une structure euclidienne, resp. hermitienne) et L un élément du dual de E ; il existe un unique vecteur $\vec{V} = \vec{V}(L)$ dans E tel que*

$$\forall \vec{W} \in E \, , \quad L(\vec{W}) = \langle \vec{W} \, , \, \vec{V} \rangle \, ;$$

si $L \neq 0$, le vecteur $\vec{V} = \vec{V}(L)$ est un vecteur directeur de la droite vectorielle $[\mathrm{Ker}\,(L)]^\perp$; l'application $\Phi \; : L \to \vec{V}(L)$ est un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) isomorphisme entre E et E^* (resp. anti-isomorphisme au sens où $\Phi(\lambda \vec{V}) = \overline{\lambda} \Phi(\vec{V})$ et $\Phi(\vec{V} + \vec{\tilde{V}}) = \Phi(\vec{V}) + \Phi(\vec{\tilde{V}})$).

Preuve. Soit L un élément non nul du dual de E, c'est-à-dire une forme linéaire non identiquement nulle sur E ; alors le noyau de L est un sous-espace de dimension 1 de E (ceci en vertu du théorème du rang, puisque l'image de E par L est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, donc est de dimension 1). Le sous-espace $[\mathrm{Ker}\,(L)]^\perp$ est donc, d'après le théorème de Pythagore, une droite vectorielle, engendrée par un vecteur non nul $\vec{e}(L)$. Considérons les deux formes linéaires sur E :

$$\begin{aligned} \vec{W} &\to L(\vec{W}) \\ \vec{W} &\to \langle \vec{W}\,,\,\vec{e}(L)\rangle\,; \end{aligned}$$

ces deux formes linéaires ont toutes deux pour noyau le sous-espace $\mathrm{Ker}\,(L)$, la première par construction même, la seconde puisque l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par $\vec{e}(L)$ est de dimension $n-1$ et contient le noyau de L qui lui aussi est de dimension $n-1$). Ces deux formes linéaires (toutes les deux non nulles) sont donc proportionnelles (car on peut les exprimer dans une base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de E telle que $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n-1})$ constituent une base de leur noyau commun) ; il existe donc $\lambda \neq 0$ dans le corps de base ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tel que

$$\forall\, \vec{W} \in E\,,\ L(\vec{W}) = \lambda \left\langle \vec{W}\,,\,\vec{e}(L)\right\rangle = \left\langle \vec{W}\,,\,\overline{\lambda}\vec{e}(L)\right\rangle;$$

le vecteur $\vec{V}(L) = \overline{\lambda}\vec{e}(L) \neq \vec{0}$ est donc bien tel que

$$\forall\, \vec{W} \in E\,,\ L(\vec{W}) = \langle \vec{W}\,,\,\vec{V}(L)\rangle$$

et l'existence de $\vec{V}(L)$ dans la première assertion du théorème de Riesz est prouvée ; l'unicité de $\vec{V}(L)$ tient au fait que le produit scalaire est non dégénéré ; que l'application

$$L \in E^* \to \vec{V}(L)$$

soit linéaire dans le cas réel (resp. anti-linéaire dans le cas complexe) est alors évident (ceci résulte de la linéarité à gauche du produit scalaire) ; cette application étant linéaire (resp. antilinéaire) et surjective, c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ (resp. anti-isomorphisme de $\mathbb{C}$)-espaces vectoriels. $\diamondsuit$

2.4.5 Adjoint d'un endomorphisme

Soit E est un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-espace vectoriel de dimension finie équipé d'un produit scalaire $\langle \cdot\,,\,\cdot\rangle$ et T un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) endomorphisme de E. Considérons, si $\vec{V}$ est un vecteur de E, l'application :

$$\vec{W} \in E \to \left\langle T(\vec{W})\,,\,\vec{V}\right\rangle;$$

c'est (puisque T est un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-endomorphisme de E) une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), donc un élément $L[T, \vec{V}]$ du dual E^* de E que l'on peut représenter (grâce au théorème de Riesz) sous la forme

$$L[T, \vec{V}](\vec{W}) = \left\langle \vec{W}\,,\,\vec{u}[T, \vec{V}]\right\rangle$$

où $\vec{u}[T, \vec{V}]$ est un certain vecteur (d'ailleurs unique) de E ; l'application

$$\vec{V} \to \vec{u}[T, \vec{V}]$$

est aussi un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-endomorphisme de E (ceci résulte encore de la clause d'unicité dans la première assertion du théorème de Riesz), que l'on notera T^*, et qui se trouve parfaitement défini par la règle :

$$\forall\, \vec{V}\,,\,\vec{W} \in E\,, \qquad \langle T(\vec{W})\,,\,\vec{V}\rangle = \langle \vec{V}\,,\,T^*(\vec{W})\rangle\,.$$

Ceci conduit à la définition naturelle :

Définition 2.10 *Soit E un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-espace vectoriel de dimension finie n équipé d'un produit scalaire (c'est-à-dire d'une structure euclidienne, resp. hermitienne) et T un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-endomorphisme de E ; il existe un unique endomorphisme T^* de E, dit adjoint de T tel que*

$$\forall \vec{V}\,,\,\vec{W}\in E\,,\qquad \langle T(\vec{W})\,,\,\vec{V}\rangle = \langle \vec{V}\,,\,T^*(\vec{W})\rangle\,; \tag{2.35}$$

un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-endomorphisme T de E est dit autoadjoint (on dit aussi symétrique dans le cas où le corps de base est $\mathbb{R}$, hermitien dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$) si $T = T^*$; l'endomorphisme T est dit normal si $TT^* = T^*T$ (T commute avec son adjoint).

On remarque tout de suite que $(T^*)^* = T$ car

$$\begin{aligned}\forall \vec{V}\,,\,\vec{W}\in E\,,\qquad \left\langle T^*(\vec{W})\,,\,\vec{V}\right\rangle &= \overline{\left\langle \vec{V}\,,\,T^*(\vec{W})\right\rangle} = \overline{\left\langle T(\vec{V})\,,\,\vec{W}\right\rangle} = \left\langle \vec{W}\,,\,T(\vec{V})\right\rangle \\ &= \left\langle \vec{W}\,,\,(T^*)^*(\vec{V})\right\rangle,\end{aligned}$$

d'où

$$[T^*]^* = T \tag{2.36}$$

puisque le produit scalaire est non-dégénéré ; d'autre part, si T_1 et T_2 sont deux endomorphismes de E, on a immédiatement :

$$\forall \vec{V}\,,\,\vec{W}\in E\,,\qquad \left\langle (T_1\circ T_2)(\vec{W})\,,\,\vec{V}\right\rangle = \left\langle T_2(\vec{W})\,,\,T_1^*(\vec{V})\right\rangle = \left\langle \vec{W}\,,\,T_2^*[T_1^*(\vec{V})]\right\rangle,$$

d'où la formule

$$(T_1\circ T_2)^* = T_2^*\circ T_1^*\,. \tag{2.37}$$

En particulier, l'opérateur $T^*\circ T$ (si T est un $\mathbb{R}$, resp $\mathbb{C}$-endomorphisme de E) est toujours autoadjoint car

$$(T^*\circ T)^* = T^*\circ (T^*)^* = T^*\circ T$$

en combinant (2.35) et (2.37). Ceci nous servira ultérieurement lorsque l'on verra le bon comportement des endomorphismes autoadjoints (même plus généralement normaux) vis-à-vis de la réduction.

Exemples II.5.

- si $E = \mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right\rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j\,,$$

  un endomorphisme T est autoadjoint (ici symétrique) si et seulement si sa matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est symétrique ($A = {}^tA$) ; en particulier (ceci est un exemple très important du point de vue pratique), si $\vec{V}_1,\dots,\vec{V}_n$ sont n vecteurs de $\mathbf{R}^N$, avec

$$\vec{V}_j := \begin{pmatrix} x_{j,1}\\ \vdots\\ x_{j,N}\end{pmatrix}\,,\quad j = 1,\dots,n\,,$$

(par exemple n mesures d'une même expérience physique) et si

$$a_{i,j} = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} x_{i,l}\, x_{j,l}\,,$$

la matrice $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ (dite *matrice de corrélation des vecteurs $\vec{V_j}$*) est la matrice d'un endomorphisme symétrique ; si par exemple l'on souhaite étudier la polarisation d'une onde sismique (générée par une secousse) et que l'on dispose de trois enregistrements (pris dans le sens Est-Ouest, Nord-Sud, Vertical), disposer d'une réduction de l'opérateur symétrique (de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$) de corrélation correspondant s'avère un outil puissant ;

– si $E = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}\,,$$

un endomorphisme T est autoadjoint (ici hermitien) si et seulement si sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est hermitienne ($A = \overline{{}^tA}$) ; en particulier (ceci est un exemple très important du point de vue pratique), si $\vec{V}_1,...,\vec{V}_n$ sont n vecteurs de $\mathbb{C}^N$, avec

$$\vec{V_j} := \begin{pmatrix} z_{j,1} \\ \vdots \\ z_{j,N} \end{pmatrix}, \quad j = 1, ..., n\,,$$

(par exemple n mesures d'une même expérience physique à résultats complexes) et si

$$a_{i,j} = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} z_{i,l}\, \overline{z_{j,l}}\,,$$

la matrice $[a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ (dite *matrice de corrélation des vecteurs $\vec{V_j}$*) est la matrice d'un endomorphisme hermitien.

Endomorphisme et endomorphisme adjoints sont aussi reliés via la proposition intéressante suivante :

Proposition 2.10 *Soit E un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-espace vectoriel de dimension finie n équipé d'un produit scalaire (c'est-à-dire d'une structure euclidienne, resp. hermitienne) et T un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-endomorphisme de E ; on a*

$$(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \operatorname{Im}(T^*)$$

et

$$\operatorname{Im} T = [\operatorname{Ker} T^*]^{\perp}\,.$$

Preuve. Il suffit de prouver la première égalité et d'y remplacer ensuite T par T^* pour obtenir la seconde. Soit

$$\vec{V} = T^*(\vec{W})$$

un vecteur de $\operatorname{Im} T^*$ et $\vec{u}$ dans le noyau de T ; on a

$$\langle \vec{V}\,,\, \vec{u}\rangle = \langle T^*(\vec{W})\,,\, \vec{u}\rangle = \langle \vec{W}\,,\, (T^*)^*(\vec{u})\rangle = \langle \vec{W}\,,\, T(\vec{u})\rangle = 0\,,$$

ce qui prouve que $\vec{W} \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$; on a donc bien l'inclusion

$$\operatorname{Im} T^* \subset (\operatorname{Ker} T)^{\perp}\,.$$

Ceci implique

$$\mathrm{rang}\,(T^*) = \dim(\mathrm{Im}\,T^*) \leq \dim(\mathrm{Ker}\,T)^\perp = n - \dim(\mathrm{Ker}\,T) = \mathrm{rang}\,(T)$$

(on utilise ici le théorème de Pythagore assurant la supplémentarité de F et $F^\perp$ pour tout sous-espace F de E) ; en prenant T^* à la place de T, on a aussi

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}\,((T^*)^*) &= \mathrm{rang}\,(T) = \dim(\mathrm{Im}\,T) \\ &\leq \dim(\mathrm{Ker}\,T^*)^\perp = n - \dim(\mathrm{Ker}\,T^*) = \mathrm{rang}\,(T^*)\,; \end{aligned}$$

les endomorphismes T et T^* ont donc même rang r ; or

$$\dim(\mathrm{Ker}\,T)^\perp = n - \dim(\mathrm{Ker}\,T) = \mathrm{rang}\,(T) = \mathrm{rang}\,(T^*)$$

(on utilise encore le théorème de Pythagore assurant la supplémentarité de F et $F^\perp$ pour tout sous-espace F de E). Comme $(\mathrm{Ker}\,T)^\perp$ a même dimension que le sous-espace $\mathrm{Im}\,T^*$ qu'il contient, il lui est de fait égal et la proposition est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

2.4.6 Endomorphismes orthogonaux ou unitaires relativement à un produit scalaire

Une propriété importante que l'on puisse exiger d'un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) endomorphisme T d'un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) espace de dimension finie E (équipé d'une structure euclidienne ou hermitienne) est qu'il préserve le produit scalaire, outil fondamental de travail lorsque l'on prétend faire de la géométrie dans le cadre euclidien ou hermitien $(E, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$; ceci équivaut à dire :

$$\forall\,\vec{V}\,,\,\vec{W} \in E\,, \qquad \langle T(\vec{V})\,,\,T(\vec{W})\rangle = \langle \vec{V}\,,\,\vec{W}\rangle\,;$$

Mais on a, par définition de l'adjoint de T,

$$\langle T(\vec{V})\,,\,T(\vec{W})\rangle = \langle \vec{V}\,,\,T^*T(\vec{W})\rangle\,;$$

on doit donc avoir $T^*T = \mathrm{Id}_E$, ce qui signifie que les deux opérateurs T et T^* sont inverses l'un de l'autre (l'espace est de dimension finie, donc inversible à gauche équivaut à inversible à droite). Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 2.11 *Soit E un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-espace vectoriel de dimension finie n équipé d'un produit scalaire (c'est-à-dire d'une structure euclidienne, resp. hermitienne) et T un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-endomorphisme de E ; un endomorphisme T de E préserve le produit scalaire, donc est tel que*

$$\forall\,\vec{V}\,,\,\vec{W} \in E\,, \qquad \langle T(\vec{V})\,,\,T(\vec{W})\rangle = \langle \vec{V}\,,\,\vec{W}\rangle$$

si et seulement si $T^* \circ T = T \circ T^* = \mathrm{Id}_E$; dans le cas euclidien (i.e le corps de base est $\mathbb{R}$), un tel endomorphisme (en fait isomorphisme) est dit <u>orthogonal</u> (relativement au produit scalaire) ; dans le cas hermitien (i.e le corps de base est $\mathbb{C}$), un tel endomorphisme (en fait isomorphisme) est dit <u>unitaire</u>.

Exemples II.6.

- si $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \,, \tag{2.38}$$

un endomorphisme T est orthogonal si et seulement si sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vérifie

$$A^{-1} = {}^tA\,; \tag{2.39}$$

une telle matrice est dite *orthogonale* ; l'ensemble des matrices orthogonales, équipé avec la loi interne qu'est la multiplication des matrices, constituent un sous-groupe du groupe GL $(n, \mathbb{R})$ des matrices inversibles réelles de type (n, n) ; ce sous-groupe est appelé *groupe orthogonal* d'ordre n et noté $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$; si A est dans $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, on a $(\det A)^2 = 1$, soit $\det A = \pm 1$. On dit que A est une matrice orthogonale directe si $\det A = 1$; les matrices orthogonales directes forment un sous-groupe SO (n, R) distingué (et d'indice 2) dans $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. Dans le cas $n = 2$, le groupe SO $(2, \mathbb{R})$ est le groupe des rotations vectorielles de $\mathbb{R}^2$ et le groupe O $(2, \mathbb{R})$ est le groupe engendré par ces rotations et l'application $(x, y) \to (-x, y)$ par exemple (ou n'importe quelle symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par l'origine).
- si $E = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j \quad \overline{w_j} \,, \tag{2.40}$$

un endomorphisme T est unitaire si et seulement si sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vérifie

$$A^{-1} = \overline{{}^tA}\,; \tag{2.41}$$

une telle matrice est dite *unitaire* ; l'ensemble des matrices unitaires, équipé avec la loi interne qu'est la multiplication des matrices, constituent un sous-groupe du groupe GL $(n, \mathbb{C})$ des matrices inversibles complexes de type (n, n) ; ce sous-groupe est appelé *groupe unitaire* d'ordre n et noté $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$; si A est dans $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$, on a $|\det A|^2 = 1$, soit $|\det A| = 1$; les matrices unitaires de déterminant 1 forment un sous-groupe SU (n, C) (dit *groupe spécial* d'ordre n) du groupe unitaire d'ordre n.

2.4.7 Bases orthonormées

Soit E un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-espace vectoriel de dimension finie n équipé d'un produit scalaire $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Soit $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une base de E. Le procédé algorithmique décrit dans la preuve du théorème suivant (dit *procédé de Gram-Schmidt*) permet de construire à partir de $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une nouvelle base $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ telle que

$$\langle \vec{v}_k \,, \vec{v}_l \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq l \\ 1 \text{ si } k = l\,. \end{cases}$$

Un tel système est dit *orthonormé* relativement au produit scalaire.

Les systèmes orthonormés facilitent grandement les calculs soutendant la géométrie dans le cadre euclidien : par exemple, si $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ est un tel système

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} z_k \vec{v}_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2$$

et

$$\forall \vec{V} \in E\,, \qquad \mathrm{pr}_{\mathrm{Vect}\,(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p)}\,(\vec{V}) = \sum_{k=1}^{p} \langle \vec{V} \,, \vec{v}_k \rangle \, \vec{v}_k$$

pour $p = 1, ..., n$; en particulier

$$\forall \vec{V} \in E \,, \qquad \vec{V} = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{V} \,,\, \vec{v}_k \rangle \, \vec{v}_k \,.$$

Exemples II.7.

- pour les deux exemples $E = \mathbb{R}^n$ et $E = \mathbb{C}^n$ présentés dans les séries d'exemples II.5 et II.6 (avec le produit scalaire (2.38) dans le premier cas, (2.40) dans le second), les bases canoniques sont orthonormées ;
- Si E_N désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ du type

$$f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ik\theta} \,, \qquad a_{-N}, ..., a_N \in \mathbb{C} \,,$$

  avec le produit scalaire

$$\langle f \,,\, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} \, d\theta \,,$$

  le système

$$\left(e^{-iN(\cdot)}, ..., e^{iN(\cdot)} \right)$$

  est une base orthonormée ;
- si F_N désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus n, avec le produit scalaire

$$\langle P \,,\, Q \rangle := \int_{-1}^{1} P(t) Q(t) \, dt \,,$$

  le système constitué des <u>*polynômes de Legendre*</u>

$$L_k(t) = \frac{\sqrt{k + \frac{1}{2}}}{2^k k!} \, \frac{d^k}{dt^k} \left[(1 - t^2)^k \right] , \qquad k = 0, ..., N \,,$$

  forme un système orthonormé (on verra comment le retrouver avec le procédé de Gram-Schmidt décrit dans la preuve du théorème suivant).

Qu'un $\mathbb{R}$-espace euclidien $(E, \langle \cdot \,,\, \cdot \rangle)$ de dimension n admette une base orthonormée n'est pas nouveau pour nous car nous savons (d'après la loi d'inertie de Sylvester) que toute forme quadratique $\mathcal{Q}$ sur E de signature $(n, 0)$ s'écrit dans une base judicieuse $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$

$$\mathcal{Q}(X_1 \vec{v}_1 + \cdots + X_n \vec{v}_n) = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 \,,$$

ce qui veut bien dire que la base $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ est orthonormée. Par contre, pour un $\mathbb{C}$-espace hilbertien $(E, \langle \cdot \,,\, \cdot \rangle)$ de dimension n, le résultat est ici nouveau.

Théorème 2.8 [algorithme de Gram-Schmidt] *Soit E un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-espace vectoriel de dimension finie n équipé d'un produit scalaire $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$. Soit $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une base de E. Il existe un procédé algorithmique (dit de <u>Gram-Schmidt</u>) permettant de construire un système orthonormé $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ de E tel que, pour tout $p = 1, ..., n$, $\vec{v}_p$ soit dans le sous-espace engendré par $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_p$.*

Preuve. Voici comment on procède : on pose

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{\langle \vec{e}_1 \,,\, \vec{e}_1 \rangle}} = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}$$

(ceci est licite car $\|\vec{e}_1\|^2 > 0$ puisque $\vec{e}_1 \neq 0$, puisque partie prenante d'une base de E) ; supposons construits $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p$, avec p entre 1 et $n-1$; on cherche tout d'abord un vecteur $\vec{w}_{p+1}$ de la forme

$$\vec{w}_{p+1} = \vec{e}_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \vec{v}_k$$

qui soit orthonogal à Vect $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p) =$ Vect $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_p)$; pour cela, il faut que

$$\forall\, l \in \{1, ..., p\}\,, \qquad \langle \vec{e}_{p+1}\,,\, \vec{v}_l \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \vec{v}_k\,,\, \vec{v}_l \right\rangle = \lambda_l\,;$$

le vecteur

$$\vec{e}_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \langle \vec{e}_{p+1}\,,\, \vec{v}_k \rangle\, \vec{v}_k$$

(qui d'ailleurs est la projection orthogonale de e_{p+1} sur l'orthogonal du sous-espace engendré par $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_p)$ ou $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p)$ –c'est pareil par construction préliminaire des $\vec{v}_k$, $k = 1, ..., p$) est non nul et orthogonal à tous les $\vec{v}_k$, $k = 1, ..., p$; on pose alors, ce qui est licite :

$$\vec{v}_{p+1} := \frac{\vec{e}_{p+1} - \sum\limits_{k=1}^{p} \langle \vec{e}_{p+1}\,,\, \vec{v}_k \rangle\, \vec{v}_k}{\left\| \vec{e}_{p+1} - \sum\limits_{k=1}^{p} \langle \vec{e}_{p+1}\,,\, \vec{v}_k \rangle\, \vec{v}_k \right\|}\,.$$

Il est clair que l'on construit ainsi un système orthonormé ayant les propriétés exigées. $\diamondsuit$

Exemple II.8. Si F_N désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus n, avec le produit scalaire

$$\langle P\,,\, Q \rangle := \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt\,,$$

l'algorithme de Gram-Schmidt, conduit à partir de la base $(1, t, ..., t^N)$, fournit le système orthonormé des polynômes de Legendre introduits dans le troisième exemple de la liste II.7.

Étant donnée une base orthonormée d'un $\mathbb{R}$-espace euclidien (resp. d'un $\mathbb{C}$-espace hilbertien) de dimension finie n et un endomorphisme T de E, il est facile de lire dans cette base la matrice de T^* et donc de vérifier si l'opérateur est autoadjoint, normal ou unitaire. On a en effet la proposition suivante :

Proposition 2.11 *Soit E un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-espace vectoriel de dimension finie n équipé d'un produit scalaire $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$. Soit $\mathcal{B} := (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ une base orthonormée de E (relativement à ce produit scalaire) et T un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-endomorphisme de E dont $A = M_{T,\mathcal{B}}$ est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ (les colonnes de A sont les coordonnées des vecteurs $T(\vec{v}_j)$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$). Alors la matrice de T^* dans cette même base $\mathcal{B}$ est*

$$M_{T^*,\mathcal{B}} = \overline{{}^tA}$$

(cette matrice est dite <u>adjointe</u> de A ou parfois <u>trans-conjuguée</u> de A) ; dans le cas réel (cadre euclidien) l'opérateur T est donc symétrique si A est symétrique, orthogonal si A est une matrice orthogonale ($A \in O(n, \mathbb{R})$), normal si A commute avec sa transposée ${}^tA$; dans le cas complexe (cadre hilbertien), l'opérateur T est donc hermitien si A est hermitienne, unitaire si A est une matrice unitaire ($A \in U(n, \mathbb{C})$), normal si A commute avec $\overline{{}^tA}$.

Preuve. Cette proposition est immédiate car le produit scalaire s'exprime dans la base orthonormée sous la forme

$$\Big\langle \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{v}_k \, , \, \sum_{l=1}^{n} y_l \vec{e}_l \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

dans le cas réel ou

$$\Big\langle \sum_{k=1}^{n} z_k \vec{v}_k \, , \, \sum_{l=1}^{n} w_l \vec{e}_l \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$$

dans le cas complexe. $\diamondsuit$

Remarque II.11. Tout $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) espace euclidien (resp. hermitien) de dimension finie transformant une base orthonormée de E en une base orthonormée (au sens du produit scalaire sur $E \times E$) est un endomorphisme unitaire ; d'ailleurs, la réciproque est vraie : un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-endomorphisme de E est unitaire (relativement au produit scalaire choisi sur $E \times E$) si et seulement si il transforme une base orthonormée de E en une base orthonormée.

2.4.8 Décomposition spectrale des opérateurs normaux

Les opérateurs normaux d'un $\mathbb{C}$-espace hilbertien de dimension finie (le produit scalaire étant noté $\langle \, , \, \rangle$) ont la très intéressante propriété d'être diagonisables : mieux, il est possible de trouver une base de vecteurs propres constituant (toujours pour ce produit scalaire) un système orthonormé. Ce résultat aura, on le verra, des conséquences très intéressantes concernant la réduction des formes quadratiques (dans le cadre réel) ou hermitiennes (dans le cadre complexe) ou celle, par ricochet, des matrices réelles symétriques (dans le cadre réel) ou complexes hermitiennes (dans le cadre complexe). C'est au mathématicien suédois Erik Ivar Fredholm (1866-1927) que revient l'étude spectrale d'opérateurs "intégraux" du type :

$$f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}) \to \Big[Tf : \; t \in [0,1] \to \int_0^1 K(t,s) f(s) \, ds \Big] \, ,$$

où K désigne une fonction continue de $[0,1] \times [0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Le $\mathbb{C}$-espace E est ici l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ équipé du produit scalaire correspondant à l'énergie

$$\langle f \, , \, g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

On peut, au moins formellement, calculer l'adjoint de T et remarquer que, sous une hypothèse algébrique supplémentaire que l'on précisera concernant le noyau K, T et T^* commutent, ce qui est une des particularités importantes de ces opérateurs intégraux. Ici cependant, on se limitera au cadre (plus simple) des $\mathbb{C}$-espaces de dimension finie (ce qui exclut donc le cadre $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ qui est celui des opérateurs dont Fredholm étudiait la réduction) et l'on énoncera le théorème important suivant, que le cadre proposé par Fredholm illustre lorsque l'on remplace E par l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$:

Théorème 2.9 [Théorème de Fredholm] *Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie n équipé d'un produit scalaire $\langle \, , \, \rangle$, donc d'une structure hilbertienne. Soit T un $\mathbb{C}$-endomorphisme normal de $(E, \langle \, , \, \rangle)$ (T commute avec son adjoint relativement à la structure hilbertienne). Il existe alors un système orthonormé (relativement au produit scalaire $\langle \, , \, \rangle$) $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ de E tel que la matrice de T dans la base*

$(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ soit une matrice diagonale. De plus, si T est un opérateur de E dont la matrice est diagonale dans une base orthonormée relativement au produit scalaire, alors T est un opérateur normal de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.

Preuve. La seconde assertion est facile : supposons que T se diagonalise dans une base orthonormée $\mathcal{B}$; la matrice de T^* dans cette base $\mathcal{B}$ étant l'adjointe de la matrice (diagonale) de T dans cette base, c'est dont encore une matrice diagonale ; comme deux matrices diagonales commutent, T commute bien avec son adjoint et est donc un opérateur normal.

Reste à prouver la première assertion, plus intéressante. La preuve se fait par récurrence sur la dimension n de l'espace vectoriel.

- si $n = 1$, on peut prendre pour $\vec{v}$ un vecteur directeur de E tel que $\langle \vec{v}\,,\, \vec{v}\rangle = 1$;
- on suppose $n > 1$ et le résultat vrai si E est un espace vectoriel de dimension $k < n$; soit T un $\mathbb{C}$-endomorphisme normal de E ; on sait (voir le chapitre 1 du cours) que T est toujours trigonalisable (puisque tout polynôme à coefficients complexes se scinde dans $\mathbb{C}[X]$ en facteurs du premier degré), ce qui implique que T admet un vecteur propre $\vec{v}_1$ (que l'on peut supposer, quitte à le remplacer par $\vec{v}_1/\|\vec{v}_1\|$, tel que $\|\vec{v}_1\| = 1$), associé à une valeur propre $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. D'après le théorème de Pythagore, on a, si $E_{\lambda_1} := \mathrm{Ker}\,(\lambda_1 \mathrm{Id}_E - T)$ désigne le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_1,

$$E = E_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_1}^{\perp}\,.$$

  il se trouve que $T(E_{\lambda_1}^{\perp}) \subset E_{\lambda_1}^{\perp}$: soit en effet $\vec{V} \in E_{\lambda_1}^{\perp}$; on a, pour tout $\vec{W} \in E_{\lambda_1}$,

$$\langle T(\vec{V})\,,\, \vec{W}\rangle = \langle \vec{V}\,,\, T^*(\vec{W})\rangle\ ;$$

  or

$$T(\vec{W}) = \lambda_1 \vec{W} \Longrightarrow T^*T(\vec{W}) = \lambda_1 T^*(\vec{W}) \Longleftrightarrow (T - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)(T^*(\vec{W})) = \vec{0} \tag{2.42}$$

  (puisque T et T^* commutent) ; ceci implique que si $\vec{W} \in E_{\lambda_1}$, $T^*(\vec{W})$ appartient encore à E_{λ_1}, d'où $T(\vec{V}) \perp \vec{W}$ d'après (2.42). Le sous-espace $E_{\lambda_1}^{\perp}$ hérite d'une structure de $\mathbb{C}$-espace hermitien (de dimension $n - \dim E_{\lambda_1} < n$) si l'on considère sur $E_{\lambda_1}^{\perp} \times E_{\lambda_1}^{\perp}$ la restriction $\langle\ ,\ \rangle_1$ du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Soit T_1 la restriction de T à E_{λ_1} ; la règle permettant la définition de l'adjoint montre que l'adjoint de T_1 (dans ce nouveau cadre hermitien $(E_{\lambda_1}^{\perp}, \langle\ ,\ \rangle_1)$ est la restriction de T^* à $E_{\lambda_1}^{\perp}$; on voit que le fait que T commute avec T^* implique que T_1, considéré comme $\mathbb{C}$-endomorphisme de l'espace hermitien $(E_{\lambda_1}^{\perp}, \langle\ ,\ \rangle_1)$, est un endomorphisme normal. Il existe donc (grâce à l'hypothèse inductive, applicable ici car la dimension $n - k$ de $E_{\lambda_1}^{\perp}$ est strictement inférieure à n) une base $v_{k+1}, ..., v_n$ de $E_{\lambda_1}^{\perp}$ constituée de vecteurs propres pour T_1 et orthonormée relativement au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_1$. Le procédé de Gram-Schmidt permet, lui, de construire à partir d'une base quelconque du type $(\vec{v}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k)$ de E_{λ_1}, une base orthonormée (relativement au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ cette fois) $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k)$ de E_{λ_1}. Il est immédiat de constater que $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, ..., \vec{v}_n)$ est une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres pour T.

La preuve par induction sur n du théorème est ainsi complète. $\diamondsuit$

Ce résultat se répercute sur la réduction des matrices comutant avec leur adjointe, puis des formes hermitiennes en les deux résultats suivants :

Corollaire 2.1 *Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients complexes commutant avec son adjointe ; il existe une matrice $n \times n$ unitaire $U \in U(n, \mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ à coefficients complexes telles que*

$$A = U \bullet D \bullet U^* = U \bullet D \bullet U^{-1} ;$$

en particulier, A est diagonalisable dans une base de vecteurs propres orthonormée pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$.

Preuve. On considère l'espace $\mathbb{C}^n$ équipé de son produit scalaire usuel

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k} , \tag{2.43}$$

produit scalaire pour lequel la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est bien sûr orthonormée. Si A est une matrice $n \times n$ à coefficients complexes commutant avec sa matrice adjointe, c'est, d'après la proposition 2.11, la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$) d'un $\mathbb{C}$-endomorphisme normal. L'opérateur T admet donc une base de vecteurs propres $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ orthonormée relativement à ce produit scalaire. La matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à cette base $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ est donc (ceci vient de la remarque II.11) la matrice d'un $\mathbb{C}$-endomorphisme unitaire de $\mathbb{C}^n$ (pour la structure hilbertienne induite par le produit scalaire (2.43)), c'est donc une matrice unitaire $P = U \in U(n, \mathbb{C})$, donc telle que $U^* = U^{-1}$. Comme

$$A = P \bullet D \bullet P^{-1} = U \bullet P \bullet U^{-1}$$

où D est la matrice diagonale constitué des valeurs propres attachées aux vecteurs propres $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$, on a bien le résultat voulu. $\diamondsuit$

Remarque II.12. Si A est de plus hermitienne, les valeurs propres de A sont réelles et la matrice D dans le corollaire 2.1 est réelle ; en effet, si $\vec{V}$ est un vecteur propre (associé à la valeur propre λ)

$$\langle T(\vec{V}) , \vec{V} \rangle = \lambda \|\vec{V}\|^2 = \langle \vec{V} , T^*(\vec{V}) \rangle = \langle \vec{V} , T(\vec{V}) \rangle = \langle \vec{V} , \lambda \vec{V} \rangle = \overline{\lambda} \|\vec{V}\|^2 ,$$

d'où $\lambda = \overline{\lambda}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples II.9.

- si A est une matrice $n \times n$ à coefficients complexes, la matrice $A \bullet A^*$ est une matrice hermitienne ; on remarque d'ailleurs que les valeurs propres de $A \bullet A^*$ sont réelles positives (ou nulles) puisque

$$\langle \vec{V} , (A \bullet A^*)(\vec{V}) \rangle = \langle A^*(\vec{V}) , A^*(\vec{V}) \rangle \geq 0 \tag{2.44}$$

  pour tout $\vec{V}$ dans E. Les racines positives ou nulles $\mu_1, ..., \mu_n$ des valeurs propres de $A \bullet A^*$ sont dites *valeurs singulières* de la matrice A (ou de l'opérateur T dont A représente la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$) ; on remarque d'ailleurs que l'on peut écrire

$$A \bullet A^* = U \bullet \mathrm{diag}\,(\mu_1^2, ..., \mu_n^2) \bullet U^* = \Big(U \bullet \mathrm{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_n)\Big) \bullet \Big(U \bullet \mathrm{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_n)\Big)^* ; \tag{2.45}$$

si A (donc A^*) est inversible, les nombres réels $\mu_1^2, ..., \mu_n^2$ sont tous strictement positifs car

$$\langle A^*(\vec{V}) \, , \, A^*(\vec{V}) \rangle = 0 \Longrightarrow A^*(\vec{V}) = 0 \Longrightarrow \vec{V} = 0$$

et la matrice diag $(\mu_1, ..., \mu_n)$ est inversible. Comme l'on a (du fait de (2.44) et (2.45))

$$\forall \vec{V} \in E \, , \ \langle A^*(\vec{V}) \, , \, A^*(\vec{V}) \rangle = \Big\langle \Big(U \bullet \text{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_n) \Big)^* [\vec{V}] \, , \, \Big(U \bullet \text{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_n) \Big)^* [\vec{V}] \Big\rangle \, ,$$

la matrice

$$A^* \bullet [(U \bullet \text{diag}(\mu_1, ..., \mu_n))^*]^{-1} = A^* \bullet [\text{diag}(\mu_1, ..., \mu_n)]^{-1} \bullet U^* = V$$

est unitaire et l'on peut écrire

$$A^* = V \bullet (\text{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_n) \bullet U)^* = V \bullet \text{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_n) \bullet U^* \, ,$$

soit

$$A = U \bullet \text{diag}(\mu_1, ..., \mu_n) \bullet V^* \, , \tag{2.46}$$

où U et V sont des matrices unitaires. Une décomposition de A sous la forme (2.46), où

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n > 0$$

et $U, V \in U(n, \mathbb{C})$ est dite <u>*décomposition en valeurs singulières*</u> de A ; d'ailleurs une telle décomposition existe toujours (avec les $\mu_j \geq 0$ cette fois) lorsque A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang strictement inférieur à n : on utilise le fait que l'opérateur correspondant à A réalise un isomorphisme entre $(\text{Ker}\, T)^{\perp}$ et $\text{Im}\, T = (\text{Ker}\,(T^*))^{\perp}$ et l'on choisit ainsi des bases orthormées $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ et $(\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n)$ (obtenues en complétant des bases judicieusement choisies de $(\text{Ker}\, T)^{\perp}$ et $\text{Im}\, T$) de manière à ce la matrice de T écrites dans les bases $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ (choisie comme base de l'espace de départ) et $(\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n)$ (choisie comme base de l'espace d'arrivée) soit diagonale. La recherche d'une décomposition en valeur singulières, qu'un logiciel de calcul implémente en $[U, D, V] = \text{svd}(A)$ ("Singular Value Decomposition") est un outil important du point de vue de l'analyse numérique ; d'ailleurs cet algorithme s'implémente sur les matrices de nombres complexes non nécessairement carrées.

– Si $\vec{V}_1$,...,$\vec{V}_n$ sont n vecteurs de $\mathbb{C}^N$, avec

$$\vec{V}_j := \begin{pmatrix} z_{j,1} \\ \vdots \\ z_{j,N} \end{pmatrix} \, , \quad j = 1, ..., n \, ,$$

(par exemple n mesures d'une même expérience physique à résultats complexes) et si

$$a_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} z_{i,l} \, \overline{z_{j,l}} \, ,$$

la matrice $[a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ (dite <u>*matrice de corrélation des vecteurs $\vec{V}_j$*</u>) est une matrice hermitienne, donc diagonalisable dans une base orthonormée ; c'est par exemple cette propriété que l'on exploite pour déterminer la polarisation d'une onde sismique si l'on dispose des mesures dans les trois directions Nord-Sud, Est-Ouest, Verticale ; la réduction des matrices de corrélation est un outil essentiel en mathématiques appliquées.

Corollaire 2.2 *Soit E un $\mathbb{C}$-espace hermitien, le produit scalaire étant noté $\langle \, , \, \rangle$ et $\mathcal{H}$ une forme hermitienne sur E ; il existe une base $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ de E, orthonormée relativement à ce produit scalaire, et telle que, dans cette base, on ait*

$$\mathcal{H}\Big(\sum_{k=1}^{n} Z_k \vec{v}_k \Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, |Z_k|^2 \, ,$$

où $\lambda_k := \mathcal{H}(\vec{v}_k)$, $k = 1, ..., n$.

Preuve. Soit $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une base orthormée de E et $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}$ la matrice de $\mathcal{H}$ dans cette base (le coefficient $a_{i,j}$ de cette matrice est par définition le nombre $\Xi(\vec{e}_j, \vec{e}_i)$, où Ξ désigne la forme sesquilinéaire et possédant la symétrie hermitienne obtenue en polarisant $\mathcal{H}$) est une matrice hermitienne et l'on peut donc appliquer le corollaire 2.1, disant que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{H},\mathcal{B}} = U \bullet D \bullet U^* ,$$

où U est unitaire. Dans la base $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$, où $\vec{v}_j = U(\vec{e}_j)$, $j = 1, ..., n$, la forme hermitienne s'écrit

$$\mathcal{H}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k \vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, |Z_k|^2$$

où

$$D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Le corollaire est bien ainsi démontré. $\diamondsuit$

Exemple II.10. Si $\vec{V}_1, ..., \vec{V}_n$ sont n vecteurs de $\mathbb{C}^N$ (ou plus généralement d'un $\mathbb{C}$-espace hilbertien E de dimension N), la forme hermitienne positive sur $\mathbb{C}^n$

$$\mathcal{H} \,:\, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \to \left\| \sum_{k=1}^{n} z_k \, \vec{V}_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} z_k \, \vec{V}_k \, , \, \sum_{l=1}^{n} z_l \, \vec{V}_l \right\rangle$$

(de matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ la matrice de Gram des vecteurs $\vec{V}_j$, $j = 1, ..., n$) s'exprime dans une judicieuse base orthonormée $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ de $\mathbb{C}^n$ sous la forme

$$\mathcal{H}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k \vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, |Z_k|^2$$

où les nombres réels positifs (ou nuls) $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les valeurs propres de la matrice de Gram des $\vec{V}_j$, $j = 1, ..., n$. Les éléments de E définis par

$$\vec{W}_j := \sum_{k=1}^{n} v_{j,k} \vec{V}_k$$

si

$$\vec{v}_j = \begin{pmatrix} v_{j,1} \\ \vdots \\ v_{j,n} \end{pmatrix}$$

sont les *modes propres* relatifs à la famille $\vec{V}_1, ..., \vec{V}_N$. Celui qui correspond à la plus grande valeur propre est la combinaison linéaire de $\vec{V}_1, ..., \vec{V}_n$ qui réalise le meilleur compromis (au sens des moindres carrés si $E = \mathbb{C}^N$) pour synthétiser en un seul élément les diverses données $\vec{V}_1, ..., \vec{V}_n$. En un sens, stocker les modes propres correspondant aux premières valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_q$ est une manière intelligente de stocker les informations contenues de manière statistique dans la liste de données $\vec{V}_1, ..., \vec{V}_n$; lorsque $q << n$, il y a donc un gain évident au niveau de la compression d'information, ce qui est évidemment très appréciable du point de vue pratique.

Dans le cadre euclidien (donc réel), les endomorphismes normaux ne sont pas diagonalisables : par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire usuel de la géométrie euclidienne plane

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 ,$$

l'opérateur de rotation d'angle θ, de matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est un opérateur normal (il est même orthogonal donc $T \circ T^* = T^* \circ T = \mathrm{Id}$), mais non diagonalisable (il n'y a d'ailleurs pas de valeur propre réelle) si $\theta \not\equiv 0$ (modulo π). Cependant, les corollaires 2.1 et 2.2 subsistent dans le cadre réel.

Corollaire 2.3 *Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients réels symétrique ; il existe une matrice $n \times n$ orthogonale $O \in O(n, \mathbb{R})$ et une matrice diagonale*

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

de nombres réels telles que

$$A = O \bullet D \bullet O^* = O \bullet D \bullet O^{-1} ;$$

en particulier, A est diagonalisable dans une base de vecteurs propres orthonormée pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve. On remarque que A considérée comme matrice à coefficients complexes est hermitienne et l'on applique le corollaire 2.1. Il existe une base de $\mathbb{C}^n$, constituée de vecteurs $\vec{V}_1, ..., \vec{V}_n$ de $\mathbb{C}^n$, orthonormée pour le produit scalaire de $\mathbb{C}^n$, avec $\vec{V}_j$ vecteur propre du $\mathbb{C}$-endomorphisme $\widehat{T}$ de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique. Si $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$ sont les sous-espaces propres de $\widehat{T}$ correspondant aux valeurs propres distinctes (et réelles car T est hermitien) $\lambda_1, ..., \lambda_p$, on voit que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{p} E_{\lambda_j} ,$$

ce qui implique

$$\mathbb{R}^n = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \mathrm{Re}\,(\vec{V}) \, ; \, \vec{V} \in E_{\lambda_j} \right\} ; \tag{2.47}$$

or, comme la matrice dans la base canonique de $\widetilde{T}$ est réelle (c'est A) le $\mathbb{R}$-sous-espace de $\mathbb{R}^n$

$$F_{\lambda_j} := \left\{ \mathrm{Re}\,(\vec{V}) \, ; \, \vec{V} \in E_{\lambda_j} \right\}$$

constitué des vecteurs partie réelle d'un élément de E_{λ_j} (on vérifie tout de suite que c'est bien un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel car E_{λ_j} est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) est constitué de vecteurs propres pour le $\mathbb{R}$-endomorphisme T de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base canonique. On a donc, compte-tenu de la proposition 1.5, que T est diagonalisable puisque

$$\sum_{j=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(\lambda_j \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - T) = n$$

à cause de (2.47). Les sous-espaces propres (réels cette fois) F_{λ_j} sont orthogonaux (dans $\mathbb{R}^n$ cette fois) car on a $F_{\lambda_j} \subset E_{\lambda_j}$ (si l'on considère $\mathbb{R}^n$ inclus dans $\mathbb{C}^n$) et que la restriction du produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$). On construit un système orthonormé de vecteurs propres en construisant (via le procédé de Gram-Schmidt) une base orthonormée pour chaque sous-espace propre $\mathrm{Ker}\,(\lambda_j \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - T)$, $j = 1, ..., p$, puis ensuite en juxtaposant ces divers systèmes. C'est d'ailleurs là la manière pratique de faire : chercher les sous-espaces propres, trouver dans chacun d'eux des bases de vecteurs propres, appliquer enfin Gram-Schmidt pour orthonormaliser ces bases. $\diamondsuit$

Remarque II.13. Les valeurs singulières (exemple II.9,(1)) d'une matrice symétrique réelle sont les valeurs absolues des valeurs propres de cette matrice.

Corollaire 2.4 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace euclidien, le produit scalaire étant noté $\langle\, ,\, \rangle$ et $\mathcal{Q}$ une forme quadratique sur E ; il existe une base $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ de E, orthonormée relativement à ce produit scalaire, et telle que, dans cette base, on ait*

$$\mathcal{Q}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k \vec{v}_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k^2 ,$$

où $\lambda_k := \mathcal{Q}(\vec{v}_k)$, $k = 1, ..., n$.

Preuve. Soit $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une base orthormée de E et $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}$ la matrice de $\mathcal{Q}$ dans cette base (le coefficient $a_{i,j}$ de cette matrice est par définition le nombre $\Theta(\vec{e}_j, \vec{e}_i)$, où Θ désigne la forme bilinéaire symétrique obtenue en polarisant $\mathcal{Q}$) ; c'est une matrice réelle symétrique et l'on peut donc appliquer le corollaire 2.3, disant que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{H},\mathcal{B}} = O \bullet D \bullet O^* ,$$

où $O \in O(n, \mathbb{R})$ est orthogonale. Dans la base $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$, où $\vec{v}_j = O(\vec{e}_j)$, $j = 1, ..., n$, la forme quadratique s'écrit

$$\mathcal{Q}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k \vec{v}_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k^2$$

où

$$D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Le corollaire est bien ainsi démontré. $\diamondsuit$

Remarque II.14. Ce corollaire complète, dans le cas $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, le théorème de Gauss 2.1 : non seulement il est possible de trouver une base orthogonale relativement à la forme bilinéaire Θ correspondant à une forme quadratique $\mathcal{Q}$ donnée, mais encore on peut faire en sorte que la base trouvée soit aussi orthonormée relativement à un produit scalaire donné *a priori* sur E (ce qui fait qu'en travaillant dans E, on travaille dans le cadre euclidien). La base trouvée est simultanément orthogonale pour Θ et orthonormée pour le produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$. C'est pourquoi on appelle la conclusion du corollaire 2.4 le *principe de réduction simultanée* des formes quadratiques (on réduit simultanément la forme quadratique donnée et la forme $\|\ \|^2$ induite par le produit scalaire).

Exemples II.11.

- si $\vec{V}_1,...,\vec{V}_n$ sont n vecteurs de $\mathbf{R}^N$, avec

$$\vec{V}_j := \begin{pmatrix} x_{j,1} \\ \vdots \\ x_{j,N} \end{pmatrix} , \quad j = 1, ..., n ,$$

(par exemple n mesures d'une même expérience physique) et si

$$a_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} x_{i,l}\, x_{j,l} ,$$

la matrice $[a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ (dite *matrice de corrélation des vecteurs $\vec{V}_j$*) est la matrice d'un endomorphisme symétrique ; c'est donc une matrice symétrique réelle diagonalisable (sur $\mathbf{R}^n$), d'ailleurs dans une base orthonormée de vecteurs propres (corollaire 2.3) ;

- si $\vec{V}_1, ..., \vec{V}_n$ sont n vecteurs de $\mathbf{R}^N$ (ou plus généralement d'un $\mathbb{R}$-espace euclidien E de dimension N), la forme quadratique positive sur $\mathbf{R}^n$

$$\mathcal{Q} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \Big\| \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{V}_k \Big\|^2 = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{V}_k , \sum_{l=1}^{n} x_l \vec{V}_l \Big\rangle$$

(de matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ la matrice de Gram des vecteurs $\vec{V}_j$, $j = 1, ..., n$) s'exprime (corollaire 2.4) dans une judicieuse base orthonormée $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ de $\mathbf{R}^n$ sous la forme

$$\mathcal{Q}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, X_k^2$$

où les nombres réels positifs (ou nuls) $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les valeurs propres de la matrice de Gram des $\vec{V}_j$, $j = 1, ..., n$. Les éléments de E définis par

$$\vec{W}_j := \sum_{k=1}^{n} v_{j,k} \vec{V}_k$$

si

$$\vec{v}_j = \begin{pmatrix} v_{j,1} \\ \vdots \\ v_{j,n} \end{pmatrix}$$

sont les *modes propres* relatifs à la famille $\vec{V}_1, ..., \vec{V}_N$; comme dans le cas complexe (exemples II.10), ils jouent un rôle important dans l'approximation simultanée au sens des moindres carrés des vecteurs de données réelles $\vec{V}_1, ..., \vec{V}_N$.

FIN DU CHAPITRE II ET DU COURS D'ALGÈBRE