COURS MIAS 301 (Analyse)

Alain Yger

4 avril 2005

Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Deux concepts : suites et séries numériques

Une <u>*suite numérique*</u> est par définition une application définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ (ou éventuellement l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à un seuil $n_0 \in \mathbb{N}$) et à valeurs dans $\mathbb{C}$: par exemple les applications :

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} &\rightarrow z^n \quad (z \in \mathbb{C}) \\ n \in \mathbb{N}^* &\rightarrow n^{-z} = \exp(-z \log n) \\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} &\rightarrow \frac{1}{n(n-1)} \end{aligned}$$

définissent des suites numériques ; on notera de manière abrégée une telle suite sous la forme $(u_n)_{n \geq n_0}$, n_0 désignant précisément le seuil en deça duquel le nombre u_n n'est plus défini. On dit que u_n est <u>*le terme général*</u> de la suite. Si le terme général de la suite est toujours un nombre réel, la suite est dite <u>*à valeurs réelles*</u>.

C'est sans doute avec le <u>*paradoxe de Zénon*</u> qu'apparaît (avec les questions qu'il engendre en analyse) le concept de <u>*série numérique*</u>. Rappelons ce paradoxe célèbre : un archer (se trouvant en un point A) lance une flèche dans la direction d'un point B. La flèche, que l'archer lance de A vers B, parcourt d'abord la moitié de la distance qui sépare A et B ; puis il la relance depuis son point d'impact, mais la force de son bras ayant diminué de moitié, la flèche ne parcourt plus cette fois que la moitié de la distance séparant le milieu de $[A,B]$ (où elle était arrivée au premier jet) de B ; le processus continue ainsi, la conclusion (qui constitue le dit paradoxe) est que la flèche n'atteindra de fait jamais son but ! On peut aussi formuler ce paradoxe plus sérieusement en énoncant une assertion mathématique qui est loin d'être si anodine que cela (elle a des conséquences intéressantes concernant par exemple la localisation dans le champ complexe des racines d'un polynôme à coefficients complexes en fonction précisément de ses coefficients) : si $\mathcal{E} = \{\zeta_1, ..., \zeta_n\}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}^*$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} \zeta_j = 0\,,$$

il existe toujours deux éléments distincts ξ et ζ de $\mathcal{E}$ tels que $|\xi|/|\zeta| \in [1/2, 2]$; pour voir cela, supposons que le cardinal de $\mathcal{E}$ vaille n et ordonnons les éléments des $\mathcal{E}$

dans l'ordre des modules décroissants :

$$|\zeta_1| \geq |\zeta_2| \geq ... \geq |\zeta_n| > 0\,;$$

si la conclusion de l'assertion se trouvait en défaut, on aurait :

$$|\zeta_1| > 2|\zeta_2| > 4|\zeta_3| > \cdots > 2^n|\zeta_n|\,.$$

Or

$$\zeta_1 = -\zeta_2 - \zeta_3 - \cdots - \zeta_n\,;$$

l'inégalité triangulaire donne :

$$|\zeta_1| \leq |\zeta_2| + \cdots + |\zeta_n| < \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\Big)|\zeta_1| = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}|\zeta_1|\,,$$

ce qui donne

$$|\zeta_1| < \big(1 - \frac{1}{2^n}\big)|\zeta_1|\,,$$

conclusion contradictoire avec $|\zeta_1| > 0$.

L'axiomatique de $\mathbb{N}$ inclut le fait que tout entier n admet un successeur $n+1$; l'idée de série (on connait les concepts naïf de loi des séries, séries d'évènements, etc...) remonte bien sûr à l'antiquité et constituait (le paradoxe de Zénon en est un exemple) une perception analytique de l'infini.

Définition 1.1 *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique ; on appelle <u>série numérique</u> de <u>terme général u_n</u> la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie selon la règle inductive :*

$$S_n = S_{n-1} + u_n\,, \quad n \geq n_0 + 1\,, \tag{1.1}$$

la condition initiale étant :

$$S_{n_0} = u_{n_0}\,;$$

la série de terme général u_n (que l'on notera aussi $[u_n]_{n\geq n_0}$) est donc la suite

$$[u_n]_{n\geq n_0} := \Big(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\Big)_{n\geq n_0}\,; \tag{1.2}$$

on dit que $S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est la n-ème <u>somme partielle</u> (ou le <u>total cumulé</u> à l'ordre n) de la série de terme général u_n, $n \geq n_0$.

Notons tout de suite que le processus de "capitalisation" des u_k selon la règle (1.1) joue un rôle essentiel : si l'on imagine par exemple les entiers ordonnés suivant l'ordre :

$$0, 1, 3, 2, 5, 7, 9, 4, 11, 13, 15, 17, 6, 19, 21, 23, 25, 27, 8, 29, ...$$

et que l'on "capitalise" suivant cet ordre la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $u_n = (-1)^n$, on vérifiera que la suite ainsi définie par

$$\widetilde{S}_0 = u_0\,,\ \widetilde{S}_1 = u_0 + u_1\,,\ \widetilde{S}_2 = u_0 + u_1 + u_3$$
$$\widetilde{S}_3 = u_0 + u_1 + u_3 + u_2\,,\ \widetilde{S}_4 = u_0 + u_1 + u_3 + u_2 + u_5, ...$$

est une suite dont le terme général n'est pas borné tandis que la série de terme général u_n est, elle, une suite dont le terme général S_n appartient à $\{0,1\}$ ($S_{2k} = 1, S_{2k+1} = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$). Les deux processus de "'capitalisation" de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ donnent naissance à des suites numériques de nature différente, ce qui montre bien que la règle de "capitalisation" imposée en (1.1) joue un rôle essentiel. On y reviendra.

1.2 Comportement asymptotique

Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ une série numérique ; le comportement asymptotique (lorsque n tend vers l'infini) de la suite dont le terme général est $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ (dite aussi <u>*suite des sommes partielles*</u>) permet de classer les séries numériques en trois classes :

- les séries convergentes
- les séries divergentes
- les séries qui ne sont ni convergentes, ni divergentes.

Définition 1.2 *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ la série numérique de terme général u_n, c'est-à-dire la suite de terme général $S_n := \sum_{k=n_0}^n u_k$. On dit que la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est*

- <u>*convergente*</u> *s'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) = S\,, \tag{1.3}$$

  ce qui signifie, rappelons-le,

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow \Big|\sum_{k=n_0}^{n} u_k - S\Big| < \epsilon\,;$$

  on dit alors que S est la <u>somme de la série</u> $[u_n]_{n\geq n_0}$ et l'on note :

$$S = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k\,;$$

  on note

$$S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = R_n$$

  le reste de la série convergente au cran n ;
- <u>*divergente*</u> *si l'on a*

$$\lim_{n\to\infty} |S_n| = \lim_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=n_0}^{n} u_k\Big| = +\infty\,, \tag{1.4}$$

  ce qui signifie, rappelons-le,

$$\forall R > 0\,, \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow \Big|\sum_{k=n_0}^{n} u_k\Big| > R\,.$$

Remarque 1.1. Il existe des séries numériques qui ne sont ni convergentes, ni divergentes, par exemple la série de terme général $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$, est telle que S_n prend les valeurs 1 si n est pair, 0 si n est impair ; il ne saurait exister de S tel que (1.3) soit remplie. La condition (1.4) est aussi trivialement en défaut.

La convergence d'une série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$ impose une contrainte immédiate sur le comportement asymptotique de la suite sous-jacente $(u_n)_{n\geq n_0}$; on a en effet la

Proposition 1.1 *Si $[u_n]_{n\geq n_0}$ est une série numérique convergente, alors*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0\,.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que, pour $n \geq n_0 + 1$,

$$u_n = S_n - S_{n-1}\,;$$

si la série $[u_n]_{n \geq n_0}$ converge, on a

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n\,;$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} u_n = S - S = 0$$

par linéarité de la prise de limite. $\diamondsuit$

Remarque 1.1 On utilise le plus souvent cette proposition *a contrario* pour vérifier la non-convergence d'une série ; notons que le fait que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne tende pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini n'implique toutefois pas la divergence, mais seulement la non-convergence (voir la suite de terme général $(-1)^n$).

ATTENTION !! La proposition 1.1 n'admet pas, on le verra plus loin de réciproque.

Les exemples les plus simples de séries sont les *séries géométriques* :

Exemple 1.1 : les séries géométriques. Soient a et z deux nombres complexes avec $a \neq 0$; on appelle *série géométrique de premier terme a et de raison z* la série $[az^n]_{n\geq 0}$; le paradoxe de Zénon concerne le cas $a = 1$, $z = 1/2$. Si z est un nombre complexe de module différent de 1, on a

$$a \sum_{k=0}^{n} z^k = a\,\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

suivant une identité remarquable bien classique ; si z est de module 1, $z = e^{i\theta}$,

$$a \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = a e^{in\theta/2} \left(\frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right),$$

la fonction de droite étant prolongée par continuité en la valeur $a(n+1)$ aux points $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ (on se souvient de ce que $\sin\xi \sim \xi$ au voisinage de $\xi = 0$). On voit donc que :

- si $|z| < 1$, la série $[az^n]_{n\geq 0}$ est convergente de somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a z^k = \frac{a}{1-z}\,;$$

- si $|z| > 1$ ainsi que si $z = 1$, la série $[az^n]_{n\geq 0}$ est divergente ;
- si $|z| = 1$ et $z \neq 1$ (soit si $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$), on a, pour tout $n \geq 0$,

$$\left| a \sum_{k=0}^{n} z^k \right| \leq \frac{|a|}{\big|\sin(\theta/2)\big|}\,;$$

  on peut affirmer qu'il n'y a pas divergence ; il n'y a pas non plus convergence ; en effet, la suite $(az^n)_{n\geq 0}$ est dans ce cas une suite de nombres tous de module $|a|$ qui ne tend donc pas vers 0 ; on applique la proposition 1.1.

Quand bien même la proposition 1.1 n'a pas, ce serait trop beau, de réciproque, il est cependant très important (comme d'ailleurs pour les suites) de disposer d'un critère permettant *a priori* d'assurer la convergence d'une série numérique sans connaître de candidat potentiel à la valeur de sa somme. On rappelle qu'une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy, c'est-à-dire satisfait le *critère de Cauchy* (version "suites numériques") :

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}\,,\ \text{tel que } \forall p, q \geq N(\epsilon)\,,\ |u_p - u_q| < \epsilon\,. \qquad (\mathbf{C_0})$$

Ce résultat se transporte au cadre des séries numériques en le <u>*critère de Cauchy*</u> (version "séries numériques") suivant :

Proposition 1.2 *La série numérique de terme général u_n, $n \geq n_0$, est convergente si et seulement si*

$$(\mathbf{C}) \qquad \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}\,,\ \underline{tel\ que} \\ \underline{pour\ tout\ sous-ensemble\ fini\ d'un\ seul\ tenant} \\ K = \{p, p+1, ..., q\}\ de\ [N(\epsilon), +\infty[\,,\ \Big|\sum_{k \in K} u_k\Big| < \epsilon\,. \end{array} \tag{1.5}$$

Preuve. On applique simplement le critère $(\mathbf{C_0})$ à la suite de terme général

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k\,. \qquad \diamondsuit$$

Le critère de Cauchy se double d'un critère plus simple encore à tester concernant les séries numériques dont le terme général est réel positif (on dit alors que la série est <u>*à termes positifs*</u>).

Proposition 1.3 *La série numérique de terme général u_n, $n \geq n_0$, où les u_n sont tous positifs pour n assez grand, est convergente si et seulement il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall n \geq n_0\,, \quad |S_n| := \Big|\sum_{k=n_0}^{n} u_k\Big| \leq C\,.$$

Preuve.

($\Longrightarrow$) Si la série $[u_n]_{n \geq n_0}$ est convergente, la suite de terme général S_n, $n \geq n_0$, est une suite convergente, donc majorée en module par une constante C.

($\Longleftarrow$) Toute suite de nombres réels croissante majorée est convergente (critère de convergence des suites monotones). Supposons que $u_n \geq 0$ pour $n \geq n_1 \geq n_0$. La suite $(S_n - S_{n_1})_{n \geq n_1}$ (où S_n désigne la n-ème somme partielle de la série $[u_n]_{n \geq n_0}$) est une suite réelle croissante car

$$S_{n+1} = S_n + u_n$$

et que $u_n \geq 0$ pour $n \geq n_1$; cette suite est donc convergente vers une limite $\widetilde{S}$, ce qui prouve la convergence de la série $[u_n]_{n \geq n_0}$ vers $S_{n_1} + \widetilde{S}$. $\diamondsuit$

Remarque 1.2. Si une série numérique $[u_n]_{n \geq n_0}$ est telle qu'il existe $n_1 \geq n_0$ avec $u_n \geq 0$ pour $n \geq n_1$, alors de deux choses l'une :

- soit la série $[u_n]_{n \geq n_0}$ est convergente ;
- soit la suite croissante de nombres positifs $(S_n - S_{n_1})_{n \geq n_1}$ tend vers $+\infty$, ce qui implique la divergence de la série numérique $[u_n]_{n \geq n_0}$.

La troisième alternative n'est pas envisageable dans ce cas particulier ; la remarque vaut aussi si le terme général u_n de la série numérique est réel négatif au delà d'un certain rang n_1 (modulo le fait de remplacer $+\infty$ par $-\infty$ dans la seconde alternative.

Nous sommes en mesure d'introduire à ce niveau une seconde classe de séries numériques type, les <u>*séries de Riemann*</u>, que nous nous proposons de classifier.

Exemple 1.2 (séries de Riemann)

- pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 1$, on peut écrire
$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}\,;$$
(cela résulte de la décroissance sur $]0,+\infty[$ de $t \to 1/t$) ; on a donc, par la relation de Chasles,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \log(n+1)\,;$$
la série $[1/n]_{n\geq 1}$ est une série divergente, dite <u>*série harmonique*</u> ; notons que c'est un exemple de série divergente, <u>mais</u> dont le terme général tend malgré tout vers 0, ce qui prouve bien que la proposition 1.1, comme nous l'avions annoncé, n'a pas de réciproque ;
- si $x \in]0,1[$, on a, en exploitant la même idée, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$,
$$\frac{1}{k^x} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x}$$
(cela résulte de la décroissance sur $]0,+\infty[$ de $t \to 1/t^x$) ; on a donc, toujours par la relation de Chasles,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{1-x}\Big((n+1)^{1-x} - 1\Big)\,;$$
on voit donc que la suite des sommes partielles de la série (à termes positifs) $[1/n^x]_{n\geq 1}$ n'est pas bornée, ce qui prouve la divergence des séries $[1/n^x]_{n\geq 1}$ lorsque $x \in]0,1[$; ces séries sont dites <u>*séries de Riemann divergentes*</u> ; la série harmonique (cas $x = 1$) est aussi de fait considérée dans cette classe ;
- Si x est un nombre réel strictement supérieur à 1, on a, du fait de la décroissance sur $]0,+\infty[$ de la fonction
$$t \to \frac{1}{t^x}$$
que pour tout $k \geq 2$,
$$\frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^x}\,;$$
on a donc, via encore la relation de Chasles,
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^x} \leq \int_1^{n} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{n^{x-1}}\right) \leq \frac{1}{x-1}\,;$$
il résulte donc de la proposition 1.2 que pour tout $x > 1$, la série numérique $[1/n^x]_{n\geq 1}$ est convergente ; ces séries sont les <u>*séries de Riemann convergentes*</u> ;
- si $x \leq 0$, le terme général de la série de Riemann $[1/n^x]_{n\geq 1}$ ne tend pas vers 0 ; la série de Riemann diverge donc dans ce cas d'après la proposition 1.1.

<u>En conclusion, la série de Riemann $[1/n^x]_{n\geq 1}$ avec $x \in \mathbb{R}$ converge si $x > 1$, diverge sinon.</u>

En combinant les propositions 1.2 et 1.3, on a le résultat important suivant :

Théorème 1.1 *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ une série numérique telle que la série numérique*
$$[|u_n|]_{n\geq n_0}$$
(c'est-à-dire la série de terme général $|u_n|$) soit une série convergente, de somme Σ ; la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est alors convergente, de somme S avec $|S| \leq \Sigma$. Une série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$ telle que la série de terme général $|u_n|$, $n \geq n_0$, soit convergente est dite <u>absolument convergente</u> et le théorème s'énonce donc en disant simplement que <u>toute série numérique absolument convergente est convergente</u>.

Preuve. On écrit, pour $n \geq n_0$, $u_n = \xi_n + i\eta_n$ avec ξ_n et η_n dans $\mathbb{R}$; on pose ensuite

$$\begin{aligned} \xi_n^+ &:= \max(\xi_n, 0) \quad \xi_n^- := \max(-\xi_n, 0) \\ \eta_n^+ &:= \max(\eta_n, 0) \quad \eta_n^- := \max(-\eta_n, 0)\,. \end{aligned}$$

On a $|\xi_n| = \xi_n^+ + \xi_n^-$ et $|\eta_n| = \eta_n^+ + \eta_n^-$ tandis que $\xi_n = \xi_n^+ - \xi_n^-$ et $\eta_n = \eta_n^+ - \eta_n^-$, et ce pour tout $n \geq n_0$. Comme

$$\xi_n^+ + \xi_n^- + \eta_n^+ + \eta_n^- = |\xi_n| + |\eta_n| \leq \sqrt{2}|u_n|$$

et que les sommes partielles

$$\sum_{k=n_0}^{n} |u_k|$$

sont par hypothèses majorées par une constante C, la constante $\sqrt{2}\,C$ majore, pour tout $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n} \xi_n^+\,,\ \sum_{k=n_0}^{n} \xi_n^-\,,\ \sum_{k=n_0}^{n} \eta_n^+\,,\ \sum_{k=n_0}^{n} \eta_n^-\,;$$

d'après la proposition 1.3, les séries à termes positifs $[\xi_n^+]_{n\geq n_0}$, $[\xi_n^-]_{n\geq n_0}$, $[\eta_n^+]_{n\geq n_0}$, $[\eta_n^-]_{n\geq n_0}$ sont convergentes ; puisque

$$u_n = (\xi_n^+ - \xi_n^-) + i(\eta_n^+ - \eta_n^-)\,, \quad n \geq n_0\,,$$

la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est convergente, de somme

$$S = \sum_{n=n_0}^{\infty} \xi_n^+ - \sum_{n=n_0}^{\infty} \xi_n^- + i\Big(\sum_{n=n_0}^{\infty} \eta_n^+ - \sum_{k=n_0}^{\infty} \eta_n^-\Big)\,.$$

Ceci achève la preuve de la proposition. $\diamondsuit$

Remarque 1.3. On peut proposer une autre preuve de ce théorème, d'aspect plus simple, mais où se trouve de fait le recours au critère de Cauchy (proposition 1.2) ; si la série $[|u_n|]_{n\geq n_0}$ est convergente, on a en effet, du fait de la proposition 1.2 (sens direct) :

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}\,,\ \text{tel que} \\ &\quad \text{pour tout sous}-\text{ensemble fini K} = \{\mathrm{p}, \mathrm{p}+1, ..., \mathrm{q}\} \text{ de } [N(\epsilon), +\infty[\,,\ \sum_{k\in K} |u_k| < \epsilon\,; \end{aligned}$$

Comme on a, du fait de l'inégalité triangulaire

$$\Big|\sum_{k\in K} u_k\Big| \leq \sum_{k\in K} |u_k|$$

pour tout sous-ensemble fini K de $\mathbb{N}$, on a aussi

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}\,,\ \text{tel que} \\ &\quad \text{pour tout sous}-\text{ensemble fini K} = \{\mathrm{p}, \mathrm{p}+1, ..., \mathrm{q}\} \text{ de } [N(\epsilon), +\infty[\,,\ \Big|\sum_{k\in K} u_k\Big| < \epsilon\,; \end{aligned}$$

en vertu toujours de la proposition 1.2 (cette fois dans l'autre sens), on en déduit la convergence de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$, ce qui prouve bien le théorème 1.1.

Remarquons que l'on a comme corollaire l'intéressant moyen de vérifier la convergence d'une série numérique si l'on sait comparer le module du terme général de cette série au terme général d'une série à termes positifs dont on est assuré de la convergence :

Corollaire 1.1 *Soit* $[u_n]_{n\geq n_0}$ *la série numérique de terme général* u_n *; on suppose qu'il existe un entier* $n_1 \geq n_0$ *et une série numérique positive* $[w_n]_{n\geq n_1}$ *(que l'on qualifie de* *<u>série majorante</u>), convergente et de somme* $\widehat{\Sigma}_w$*, telle que*

$$\forall n \geq n_1\,, \quad |u_n| \leq w_n\,;$$

la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ *est alors convergente, de somme* S*, avec*

$$|S| \leq \Big| \sum_{n_0\leq k<n_1} u_k \Big| + \widehat{\Sigma}_w\,.$$

Exemple 1.3

- si z est un nombre complexe de partie réelle x strictement supérieure à 1, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$\Big|\frac{1}{n^z}\Big| = \frac{1}{n^x}\,;$$

comme la série numérique $[1/n^x]_{n\geq 1}$ est une série de Riemann convergente (voir l'exemple 1.2, item 3), le théorème assure la convergence de la série $[1/n^z]_{n\geq 1}$; Riemann avait ainsi introduit une fonction très intéressante (car au carrefour de l'analyse et de la théorie analytique des nombres, principalement autour des mystères liés à l'organisation de la suite des nombres premiers), la fonction “zeta” définie dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z > 1\}$ par

$$\zeta(z) \;:= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}\,, \quad \mathrm{Re}\, z > 1\,;$$

- en revanche, au stade où nous en sommes, rien ne peut être affirmé concernant le comportement asymptotique (convergence, divergence, ou rien) de la série numérique $[1/n^z]_{n\geq 1}$ lorsque z est un nombre tel que $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$ et $\mathrm{Im}\, z \neq 0$.

Concernant précisément la possibilité de vérifier la divergence de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ lorsque les u_n sont tous réels et de même signe pour n assez grand, on a, de par la remarque 1.2, le pendant suivant au corollaire 1.1 :

Proposition 1.4 *Soit* $[u_n]_{n\geq n_0}$ *la série numérique de terme général* u_n *; on suppose qu'il existe un entier* $n_1 \geq n_0$ *tel que les* u_n *soient tous réels et de même signe si* $n \geq n_1$*, et une série numérique positive* $[w_n]_{n\geq n_1}$ *(dite* *<u>série minorante</u>), divergente et telle que*

$$\forall n \geq n_1\,, \quad |u_n| \geq w_n\,;$$

la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ *est alors divergente.*

Il ressort de ce paragraphe qu'autant décider si une série dont le terme général est réel et de signe fixe au delà d'un certain rang semble une chose aisée, autant décider ce qui se passe pour une série numérique quelconque, pour peu que l'on ne puisse trouver de série majorante $[w_n]_{n\geq n_1}$ pour appliquer le corollaire 1.1, n'est pas chose facile.

Attention ! ! C'est bien dommage, <u>le théorème 1.1 n'admet pas de réciproque</u> ! Par exemple, la suite de terme général $v_n = (-1)^n/n$, $n \geq 1$, tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini ; si l'on pose, pour $n \geq 2$, $u_n = v_n - v_{n-1}$, on a, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \cdots + (v_n - v_{n-1}) = v_n - v_1\,;$$

la série $[u_n]_{n\geq 2}$ ainsi conçue à partir de de la suite convergente $(v_n)_{n\geq 1}$ est dite *<u>télescopique</u>* ; cette série est bien convergente, de somme $-v_1$, ici 1 ; en revanche

$$|u_n| = |v_n - v_{n-1}| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{n}\,;$$

comme la série harmonique $[1/n]_{n\geq 1}$ diverge, la série $[|u_n|]_{n\geq 2}$ est divergente (bien que $[u_n]_{n\geq 2}$ ait été une série convergente).

1.3 Séries à termes positifs ; critères de comparaison

Le premier réflexe que l'on doit avoir face à l'étude du comportement asymptotique d'une série $[u_n]_{n\geq n_0}$ à termes $u_n \in \mathbb{C}$ quelconques est d'examiner dans un premier temps la série à termes positifs $[|u_n|]_{n\geq n_0}$:

- si cette série $[|u_n|]_{n\geq n_0}$ (dont on peut étudier le comportement asymptotique à la lumière des techniques présentées dans cette section concernant l'étude des séries à termes positifs) converge, alors la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ converge aussi (théorème 1.1) ;
- si cette même série $[|u_n|]_{n\geq n_0}$ est telle que son terme général $|u_n|$ ne tende pas vers 0, alors on peut affirmer que la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est non-convergente (sans pouvoir préciser plus).

Comme on le voit, pour peu que la série $[|u_n|]_{n\geq n_0}$ diverge et que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tende vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on ne peut plus rien conclure concernant le comportement asymptotique de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$; ce n'est que dans ce cas que l'on mettra en oeuvre l'"artillerie plus lourde" concernant l'étude des séries à terme quelconque (que nous envisagerons dans la section 1.4).

Dans cette section importante, nous envisagerons l'étude (plus simple) du comportement asymptotique des séries à termes positifs (c'est-à-dire dont le terme général u_n est positif pour n assez grand) ; il est bien sûr immédiat de noter que cette étude s'adapte aussi à celle du comportement asymptotique des séries à termes négatifs (pour n assez grand).

On dispose de deux familles importantes (disons deux "catalogues") de séries à termes positifs : celle des séries géométriques $[x^n]_{n\geq 0}$ avec $x > 0$, celle des séries de Riemann $[1/n^x]$, $x > 0$. Un critère de comparaison serait maintenant le bienvenu pour décider du comportement d'une série à termes positifs (ou au moins positifs à partir d'un certain rang) après avoir comparé son terme général au terme général d'une des séries prises dans l'un de nos deux catalogues. En voici justement un :

Théorème 1.2 *Soient $[u_n]_{n\geq n_0}$ et $[w_n]_{n\geq n_1}$ deux séries numériques dont le terme général est positif pour $n \geq n_2 \geq \max(n_0, n_1)$.*

- *s'il existe $C > 0$ et $N \geq n_2$ tel que*

$$n \geq N \Longrightarrow u_n \leq C w_n\,,$$

la convergence de la série $[w_n]_{n\geq n_1}$ implique celle de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$; de plus, si tel est le cas, alors, pour $n \geq N$, le reste au cran n de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est majoré par C fois le reste au cran n de la série $[w_n]_{n\geq n_0}$, soit

$$n \geq N \Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k\,; \qquad (1.6)$$

- *s'il existe $c > 0$ et $N \geq n_2$ tel que*

$$n \geq N \Longrightarrow u_n \geq c w_n\,,$$

la divergence de la série $[w_n]_{n\geq n_1}$ implique celle de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$;

– *si l'on a $u_n \sim w_n$ lorsque n tend vers l'infini, les deux séries $[u_n]_{n\geq n_0}$ et $[w_n]_{n\geq n_1}$ sont de même nature ; de plus, on a dans ce troisième cas ($u_n \sim w_n$ lorsque $n \to \infty$)*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \tag{1.7}$$

lorsque les deux séries sont convergentes et

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \sim \sum_{k=n_1}^{n} w_k \tag{1.8}$$

lorsque les deux séries sont divergentes.

Preuve. Le premier point est un cas particulier du corollaire 1.1 ; la majoration (1.6) est immédiate, car si $q > n \geq N$,

$$\sum_{k=n+1}^{q} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{q} Cw_k = C \sum_{k=n+1}^{q} w_k\,;$$

ensuite, on passe à la limite lorsque q tend vers l'infini et l'on obtient (1.6). Le second point est un cas particulier de la proposition 1.4. Le dernier cas est une combinaison des deux ; notons d'ailleurs qu'il nous suffit ici de savoir qu'il existe des constantes c et C strictement positives tellesque, pour n assez grand, $cw_n \leq u_n \leq Cw_n$, ce qui est réalisé avec $c = 1-\epsilon$, $C = 1+\epsilon$ pour $n \geq N(\epsilon) \geq n_2$ assez grand lorsque $u_n \sim w_n$ quand n tend vers l'infini. Pour ce qui est de la preuve des assertions (1.7) et (1.8) lorsque $u_n \sim w_n$, distinguons ici les deux cas (les deux séries convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux) :

– dans le cas où les deux séries convergent, on a, si $q > n \geq N(\epsilon)$ l'encadrement

$$(1-\epsilon) \sum_{k=n+1}^{q} w_k \leq \sum_{k=n+1}^{q} u_k \leq (1+\epsilon) \sum_{k=n+1}^{q} w_k\,,$$

puis, en faisant tendre q vers l'infini

$$n \geq N(\epsilon) \implies (1-\epsilon) \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq (1+\epsilon) \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k\,,$$

ce qui prouve (1.7), puisque ϵ peut être choisi arbitrairement petit ;

– dans le cas où les deux séries divergent, on peut écrire encore

$$n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow (1-\epsilon) \sum_{k=N(\epsilon)+1}^{n} w_k \leq \sum_{k=N(\epsilon)+1}^{n} u_k \leq (1+\epsilon) \sum_{k=N(\epsilon)+1}^{n} w_k\,;$$

si $(S_n)_{n\geq n_0}$ et $(W_n)_{n\geq n_1}$ sont définies respectivement comme les suites des sommes partielles de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ et de la série $[w_n]_{n\geq n_1}$, on a donc

$$n \geq N(\epsilon) \implies (1-\epsilon)(S_n - S_{N(\epsilon)}) \leq W_n - W_{N(\epsilon)} \leq (1+\epsilon)(S_n - S_{N(\epsilon)})\,;$$

comme

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{S_n}{W_n}\,\frac{W_n - W_{N(\epsilon)}}{S_n - S_{N(\epsilon)}}\Big) = 1 \tag{1.9}$$

puisque $\lim_{n\to\infty} |S_n| = \lim_{n\to\infty} |W_n| = +\infty$, on voit que pour n assez grand (en tout cas plus grand que $N(\epsilon)$), le nombre complexe

$$z_n := \frac{S_n}{W_n}$$

est aussi voisin que l'on veut de 1 : en effet, on a d'après (1.9), pour n assez grand (et en tout cas supérieur à $N(\epsilon)$),

$$|z_n/t_n - 1| \leq \epsilon/2\,,$$

où

$$t_n := \frac{S_n - S_{N(\epsilon)}}{W_n - W_{N(\epsilon)}}$$

vérifie $|t_n - 1| \leq \epsilon$; on en déduit que z_n se trouve, pour n assez grand, arbitrairement près de 1, donc que $S_n \sim W_n$, ce qui constitue l'assertion (1.8).

Le théorème de comparaison 1.2 est ainsi prouvé. $\diamondsuit$

Attention !! Il convient de prendre garde au fait que, quand bien même $u_n \sim w_n$ pour n assez grand (w_n étant positif lorsque n est assez grand), il n'y a l'équivalence

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \sim \sum_{k=n_1}^{n} u_k$$

que si les séries $[u_n]_{n\geq n_0}$ et $[w_n]_{n\geq n_1}$ sont toutes deux divergentes ; par exemple, si

$$u_n := \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\,, \quad n \geq 1$$

et

$$w_n = \frac{1}{n^2}\,, \quad n \geq 1\,,$$

on a bien sûr $u_n \sim w_n$, mais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n+1}$$

(suite tendant vers 1) tandis que la suite croissante $(W_n)_{n\geq 1}$, où

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

tend vers un nombre certainement supérieur à $1 + 1/4 = 5/4 > 1$.

1.3.1 Comparaison avec les séries géométriques

On rappelle la notion de *valeur d'adhérence d'une suite de nombres réels*, pensée comme suite de points de la *droite réelle achevée* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$:

- un nombre réel α est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ si et seulement l'on peut extraire de la suite des entiers supérieurs ou égaux à n_0 une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que la *suite extraite* $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ converge vers le nombre α ;
- $+\infty$ (resp. $-\infty$) est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ si et seulement l'on peut extraire de la suite des entiers supérieurs ou égaux à n_0 une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que la suite extraite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ;

On rappelle que, suivant le *théorème de Bolzano-Weierstrass*, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite de nombres réels, vue comme suite de points de la droite réelle achevée, est non vide et admet donc (considéré comme sous-ensemble de la droite achevée $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) une borne inférieure (qui peut fort bien être $-\infty$) notée

$$\liminf_{n\to\infty} u_n$$

et une borne supérieure (qui peut fort bien être $+\infty$) notée

$$\limsup_{n\to\infty} u_n \,.$$

Le nom du mathématicien allemand Karl Wilhelm Weierstrass (1815-1897) est intimement lié au développement pendant tout le 19-ème siècle de la théorie des séries, et en particulier des séries de fonctions (le concept d'analyticité lui doit en particulier beaucoup), théorie qui sera notre fil directeur tout au long de ce cours. Berhardt Bolzano (1781-1848) était, lui, un philosophe et mathématicien praguois qui fut, avec Augustin Cauchy, l'un des premiers à développer de manière systématique la théorie des fonctions d'une variable réelle.

Remarque 1.4. On pourra s'assurer que ces notations ne sont pas tout-à-fait usurpées car

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\geq n} u_k\big)\\ \limsup_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geq n} u_k\big)\,.\end{aligned}$$

Exemples. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ est l'ensemble $\{-1,1\}$; on a donc

$$\liminf (-1)^n = -1\,, \quad \limsup (-1)^n = 1\,;$$

si α est un nombre réel irrationnel, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(\pi\alpha n))_{n\geq 0}$ est le segment $[-1,1]$; on a encore

$$\liminf(\sin(\pi\alpha n)) = -1\,, \quad \limsup(\sin(\pi\alpha n)) = 1$$

dans ce cas ; on pourra examiner ce qui se passe si α est un nombre rationnel.

Le théorème de comparaison 1.2, combiné avec ce que l'on sait du comportement asymptotique des séries géométriques (analysé dans l'exemple 1.1), nous permet d'énoncer la *règle de Cauchy* :

Proposition 1.5 [règle de Cauchy] *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ une série à termes positifs. Soit*

$$r \ := \limsup_{n\to\infty} (u_n^{\frac{1}{n}})\,,$$

avec la convention $0^{1/n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si $r < 1$, la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$ converge, tandis que si $r > 1$, cette même série numérique diverge (le terme général ne tend pas vers 0).

Remarque 1.5. Notons que ce critère de comparaison n'est pas assez puissant pour autoriser une conclusion dans le cas litigieux $r = 1$; par exemple, si $u_n = 1/n^x$ avec $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u_n^{\frac{1}{n}} = \exp(-x\frac{\log n}{n})\,,$$

d'où $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = 1$, soit donc $r = 1$; cependant, suivant que $x > 1$ ou $x \leq 1$, il y a convergence ou divergence de la série de Riemann $[1/n^x]_{n\geq 1}$ (voir l'exemple 1.2) ; il nous faudra donc utiliser notre second catalogue de référence (celui des séries de Riemann) pour augmenter notre capacité de décider du comportement asymptotique d'une série à termes positifs via un critère de comparaison.

Remarque 1.6. C'est au mathématicien francais Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) que l'on doit l'apparition de la rigueur mathématique dans le raisonnement en analyse (jusque là basé plus sur l'intuition expérimentale ou les conceptions philosophiques autour par exemple du concept d'infini). Cauchy (comme Weierstrass) contribua énormément au développement de l'analyse complexe ; le point de vue de Cauchy puise plus ses fondements dans des concepts empruntés à la physique (celui par exemple de circulation, d'intégrale curviligne), tandis celui de Weierstrass repose plus sur la théorie des séries. La règle de Cauchy que nous invoquons ici relève plus cependant de ce second point de vue.

Preuve.

- Si $r < 1$, il ne saurait exister de valeur d'adhérence de la suite $(u_n^{1/n})_{n\geq 1}$ dans l'intervalle $]r, 1[$ (puisque la borne supérieure d'un ensemble en est un majorant) ; par conséquent, si l'on choisit $\epsilon < 1 - r$, il existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :
$$n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow u_n^{\frac{1}{n}} \leq r + \epsilon\,, \quad \text{soit encore } u_n \leq (r+\epsilon)^n\,;$$
comme $r + \epsilon < 1$, il suit du théorème 1.2 (item 1) que la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$ est convergente (la série géométrique $[(r+\epsilon)^n]_{n\geq 0}$ l'étant).
- Si $r > 1$, il existe une valeur d'adhérence de la suite $(u_n^{1/n})_{n\geq 1}$ strictement supérieure à 1 (soit $1+\eta$, avec $\eta > 0$ si $1 < r < +\infty$ ou bien $+\infty$ si $r = +\infty$) ; ceci résulte de ce que si l est la borne supérieure d'un ensemble, alors aucun $l' < l$ ne saurait majorer cet ensemble. Il existe donc une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 0}$, tous supérieurs à n_0, tels que
$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}^{\frac{1}{n_k}} = \begin{cases} 1+\eta \text{ si } 1 < r < \infty \\ +\infty \text{ si } r = +\infty\,; \end{cases}$$
pour k assez grand, on a donc
$$u_{n_k}^{\frac{1}{n_k}} \geq 1 + \frac{\eta}{2}\,, \quad \text{soit } u_{n_k} \geq \Big(1+\frac{\eta}{2}\Big)^{n_k}\,,$$
ce qui montre que la suite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ ne tend pas vers 0 ; il résulte de la proposition 1.1 la non-convergence de la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$, soit encore la divergence puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs. Notons que la raison de la divergence est que le terme général ne tende pas vers 0.

La proposition est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

Application importante : Si $(a_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de nombres complexes, la série numérique
$$[a_n z^n]_{n\geq n_0}\,,$$
où z est un nombre complexe arbitraire est

- absolument convergente (donc convergente) lorsque
$$|z| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}\,;$$
- non convergente lorsque
$$|z| > \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}\,;$$

Exemple 1.3 Considérons $\epsilon > 0$ (rationnel) et la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k!} \text{ si } n = k^{1+\epsilon}\,,\ k \in \mathbb{N}^* \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}\ ;$$
on voit que dans ce cas
$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{k\to\infty} \Big(\frac{1}{k!}\Big)^{\frac{1}{k^{1+\epsilon}}} \\ &= \limsup_{k\to\infty} e^{-\frac{\log(k!)}{k^{1+\epsilon}}} = 1 \end{aligned}$$
puisque
$$\frac{\log(k!)}{k^{1+\epsilon}} \leq \frac{k\log k}{k^{1+\epsilon}} = \frac{\log k}{k^{\epsilon}}$$
et que cette dernière quantité tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ puisque toute fonction puissance impose sa limite au logarithme ; on voit que la série numérique $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ converge absolument lorsque $|z| < 1$, ne converge pas lorsque $|z| > 1$.

Il existe une seconde règle de comparaison du même type, dite <u>*règle de d'Alembert*</u>, un petit peu moins pratique cependant puisqu'elle oblige à introduire à la fois une limite inférieure et une limite supérieure.

Remarque 1.7. On a déjà rencontré l'encyclopédiste Jean Lerond d'Alembert (1717-1783) à propos du théorème fondamental de l'algèbre ; c'est dans l'article intitulé *Différentiel* (volume 4 de l'Encyclopédie) qu'il développa ses idées sur les limites et la dérivée qui le conduisirent à énoncer dans *Opuscules mathématiques* (volume 5 de l'Encyclopédie) la règle que nous mentionnons ci-dessous.

Proposition 1.6 [règle de d'Alembert] *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ une série numérique à termes positifs ; on désigne par $(n_k)_{k\geq 0}$ la suite (strictement croissante) des indices n tels que $u_n > 0$.*

– *si*
$$\limsup_{k\to\infty} \frac{u_{n_{k+1}}}{u_{n_k}} < 1\,,$$
la série $[u_n]_{n\geq 0}$ est convergente ;

– *si*
$$\liminf_{k\to\infty} \frac{u_{n_{k+1}}}{u_{n_k}} > 1\,,$$
la série $[u_n]_{n\geq 0}$ est divergente (le terme général ne tend pas vers 0).

Preuve.

– Dans le premier cas, il ne saurait exister de valeur d'adhérence de la suite $(u_{n_{k+1}}/u_{n_k})_{k\geq 0}$ dans l'intervalle $]r, 1[$ (puisque la borne supérieure d'un ensemble en est un majorant) ; par conséquent, si l'on choisit $\epsilon < 1 - r$, il existe $K(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :
$$k \geq K(\epsilon) \Longrightarrow u_{n_{k+1}} \leq (r+\epsilon) u_{n_k}\ ;$$
on a donc, pour tout $k \geq K(\epsilon) + 1$,
$$u_{n_k} \leq (r+\epsilon) u_{n_{k-1}} \leq (r+\epsilon)^2 u_{n_{k-2}} \leq \cdots \leq (r+\epsilon)^{k-K(\epsilon)} u_{n_{K(\epsilon)}}\ ;$$
comme $r + \epsilon < 1$, il suit du théorème 1.2 (item 1) que la série numérique $[u_{n_k}]_{k\geq 0}$ est convergente (la série géométrique $[(r+\epsilon)^k]_{k\geq 0}$ l'étant) ; comme les u_n autres que les u_{n_k} sont supposés nuls, la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$ est bien convergente.

– Dans le second cas, on est certain (du fait de la définition de la limite inférieure) qu'il existe $\eta > 0$ tel que l'invervalle $[0, 1+\eta[$ ne contienne aucune valeur d'adhérence de la suite $(u_{n_{k+1}}/u_{n_k})_{k\geq 0}$; il existe donc $K(\eta) \in \mathbb{N}$ tel que
$$k \geq K(\eta) \Longrightarrow u_{n_{k+1}} \geq \Big(1+\frac{\eta}{2}\Big) u_{n_k} \,;$$
par itération, on a donc, pour tout $k \geq K(\eta)+1$,
$$u_{n_k} \geq \Big(1+\frac{\eta}{2}\Big) u_{n_{k-1}} \geq \Big(1+\frac{\eta}{2}\Big)^2 u_{n_{k-2}} \leq \cdots \leq \Big(1+\frac{\eta}{2}\Big)^{k-K(\eta)} u_{n_{K(\eta)}} \,;$$
comme $\eta > 0$, la suite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ ne tend pas vers 0, mais au contraire vers $+\infty$; il résulte de la proposition 1.1 la non-convergence de la série numérique $[u_{n_k}]_{k\geq 0}$, soit encore sa divergence puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs ; on donc divergence de la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$.

Ceci achève la preuve du critère de d'Alembert. $\diamondsuit$

Application importante : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes non nuls et z un nombre complexe ; la série numérique
$$[a_n z^n]_{n\geq n_0} \,,$$
où z est un nombre complexe arbitraire est

– absolument convergente (donc convergente) lorsque
$$|z| < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \,;$$
– non convergente lorsque
$$|z| > \frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \,;$$

Exemple 1.4 Soit $a_n = 1/n!$ (avec la convention $0! = 1$) ; on a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \,;$$
la série numérique $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ converge donc pour tout nombre complexe z d'après l'application de la règle de d'Alembert énoncée ci-dessus ; on peut remarquer la différence cruciale avec le comportement de la série numérique introduite dans l'exemple 1.3 ; la suite des coefficients est essentiellement la même dans les deux cas ($a_n = 1/n!$) mais l'on y avait alors introduit des "trous" constitués de zéros en ne retenant que les valeurs de n qui étaient des carrés parfaits.

1.3.2 Comparaison avec les séries de Riemann

Si $[u_n]_{n\geq n_0}$ est une série numérique à terme général strictement positif telle que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \,,$$
la règle de d'Alembert proposée dans la proposition 1.6 ne permet pas de décider du comportement de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$. C'est donc l'occasion d'utiliser notre second catalogue-test, celui des séries de Riemann. Voici un exemple de critère, dit *règle de Raabe-Duhamel* (Joseph Ludwig Raabe, 1801-1859, est un mathématicien suisse, qui travailla à l'étude des séries numériques, tandis que Jean-Marie Constant Duhamel, 1787-1872, fut enseignant à l'école Polytechnique où il succéda à Poisson et est surtout connu pour ses contributions d'ordre pédagogique) :

Proposition 1.7 [règle de Raabe-Duhamel] *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ est une série numérique à terme général strictement positif telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1\,;$$

on suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathbf{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

lorsque n tend vers l'infini ; alors

- *si $\alpha > 1$, la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est convergente ;*
- *si $\alpha < 1$, la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est divergente.*

Remarque 1.6. Reste encore un cas litigieux ($\alpha = 1$) ; une information plus précise concernant le comportement de la suite u_{n+1}/u_n au voisinage de l'infini (par exemple la connaissance d'un développement à l'ordre 2 en les puissances de $1/n$) pourraît aider à lever cette indétermination dans certains cas ; l'idée serait de poursuivre plus avant le scénario que nous décrivons ici dans la preuve de la proposition.

Preuve.

- dans le premier cas, on choisit $x \in]1, \alpha[$ (c'est possible puisque $\alpha > 1$) ; on fait un développement à l'ordre 1 en fonction des puissances de $1/n$ (n tendant vers $+\infty$) de
$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^x \frac{u_{n+1}}{u_n}\,;$$
cela donne
$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^x \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{x-\alpha}{n} + \mathbf{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)\,;$$
comme $x - \alpha < 0$, on est certain que pour n assez grand
$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^x \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1\,,$$
soit que la suite
$$n \longrightarrow n^x u_n$$
finit par être décroissante passé un certain seuil ; il existe donc une constante C telle que, pour n assez grand
$$u_n \leq \frac{C}{n^x}\,;$$
le théorème 1.2 (item 1) et la convergence de la série numérique de Riemann $[1/n^x]_{n\geq 1}$ (puisque $x > 1$, voir exemple 1.2, item 3) assurent la convergence de la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$;
- dans le second cas, on choisit $x \in]\alpha, 1]$ (c'est possible car cette fois $\alpha < 1$) ; on fait encore un développement à l'ordre 1 en fonction des puissances de $1/n$ (n tendant vers $+\infty$) de
$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^x \frac{u_{n+1}}{u_n}\,;$$
cela donne toujours
$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^x \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{x-\alpha}{n} + \mathbf{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)\,;$$

comme $x-\alpha>0$ cette fois, on est certain que pour n assez grand

$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^x \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1\,,$$

soit que la suite

$$n \to n^x u_n$$

finit par être croissante passé un certain seuil ; il existe donc une constante c telle que, pour n assez grand

$$u_n \geq \frac{c}{n^x}\ ;$$

le théorème 1.2 (item 2) et la divergence de la série numérique de Riemann $[1/n^x]_{n\geq 1}$ (puisque $x \leq 1$, voir exemple 1.2, item 1 ou 2) assurent la divergence de la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$.

La règle de Raabe-Duhamel est ainsi prouvée. $\diamondsuit$

1.3.3 Confrontation série/primitive

La méthode qui a inspiré (exemple 1.2) l'étude asymptotique des séries de Riemann pour $x>0$ peut-être exploitée dans d'autres situations : cette méthode se trouvait basée sur la confrontation entre le processus de "capitalisation" (on dit aussi de sommation ou encore d'intégration discrète) et celui de primitivisation, c'est-à-dire de recherche (et d'étude du comportement) de primitives de fonctions continues. On a en effet la :

Proposition 1.8 *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ une série numérique à termes positifs dont la suite des termes généraux est décroissante à partir d'un certain rang N ; soit f une fonction continue décroissante sur $[N,+\infty[$ telle que pour tout $n\geq N$, $u_n=f(n)$ (par exemple la fonction affine par morceaux interpolant au point n le nombre u_n mais l'on peut imaginer, comme dans le cadre de l'étude des séries de Riemann, une fonction f implicitement déduite de l'expression analytique de u_n fonction de n) ; la fonction f admet donc une primitive F sur $[N,+\infty[$, croissante sur cet intervalle (c'est la primitive d'une fonction positive). On a, pour tout $n>N$,*

$$\sum_{k=N}^{n} u_k \quad \geq \quad F(n+1)-F(N) \tag{1.10}$$

$$\sum_{k=N+1}^{n} u_k \quad \leq \quad F(n)-F(N)\,; \tag{1.11}$$

il en résulte

– *que si*

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty\,,$$

la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est divergente et que l'on a l'équivalent suivant pour les sommes partielles :

$$S_n := \sum_{n=n_0}^{n} u_k \sim F(n)\ ;$$

– *que si*

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = l < +\infty\,,$$

la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ *est convergente et que l'on a l'encadrement suivant pour le reste :*

$$l - F(n+1) \leq R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq l - F(n)\,.$$

La preuve de cette proposition repose juste sur le fait que si p et q sont des entiers tels que $p \geq N$ et $q > p$, on a

$$\sum_{k=p}^{q} u_k \ \geq\ \int_p^{q+1} f(t)dt = F(q+1) - F(p) \tag{1.12}$$

$$\sum_{k=p+1}^{q} u_k \ \leq\ \int_p^{q} f(t)dt = F(q) - F(p)\,. \tag{1.13}$$

Ces deux inégalités se lisent graphiquement ; pour la première, le nombre u_k est assimilé à la surface du rectangle $[k,k+1]\times[0,f(k)]$ (hachuré verticalement sur la figure 1) ; pour la seconde, le même nombre u_k est assimilé à la surface du rectangle $[k-1,k]\times[0,f(k)]$ (hachuré horizontalement sur la figure 1) ; ce réflexe qui consiste à penser u_k comme la surface d'un rectangle traduit le passage du discret au continu. Ensuite, les inégalités résultent du principe de comparaison des intégrales : si g et h sont deux fonctions continues positives sur un intervalle $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$, alors

$$g \geq h \text{ sur } [\alpha,\beta] \Longrightarrow \int_\alpha^\beta g(t)dt \geq \int_\alpha^\beta h(t)dt\,.$$

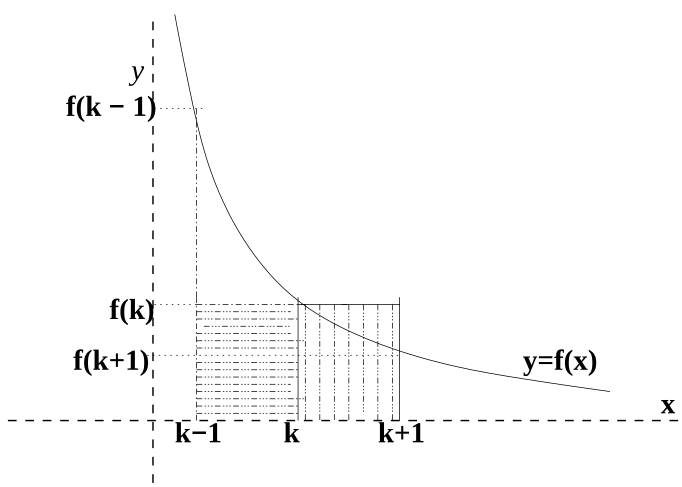

Fig. 1.1 – Comparaison série -intégrale

On fixe d'abord $p = N$ et $q = n$ dans les deux inégalités (1.12) et (1.13), ce qui donne (1.10) et (1.11).

– Si

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty\,,$$

on voit avec la première inégalité (1.10) que les sommes partielles de la série $[u_n]_{n\geq N}$ tendent vers $+\infty$, d'où la divergence de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ avec l'équivalence voulue en combinant (1.10) et (1.11) puisque $F(n+1)\sim F(n)$ vu que la différence de ces deux nombres est majorée par u_n, soit par u_N lorsque $n\geq N$;
– si maintenant

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = l < +\infty\,,$$

la seconde inégalité (1.11) nous assure que les sommes partielles de la série $[u_n]_{n\geq N}$ sont toutes majorées par $l - F(N)$, ce qui prouve la convergence de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$.

Ensuite, pour avoir (dans le second cas) l'encadrement du reste, on prend $p=n$ et l'on fait tendre q vers l'infini dans (1.13), ce qui donne la majoration voulue pour R_n ; puis on prend $p=n+1$ et l'on fait encore courir q vers l'infini cette fois dans (1.12), ce qui donne la minoration de R_n cherchée. La preuve de la proposition est ainsi complète. $\diamondsuit$

Exemple 1.4. Si $u_n = 1/(n\log n)$ pour n entier supérieur ou égal à 2, la série $[u_n]_{n\geq 2}$ est divergente puisque la fonction $F(t)=\log[\log(t)]$ (qui est une primitive de $1/(t\log t)$ sur $[2,\infty[$) vérifie $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = +\infty$. Plus généralement, les séries de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}\,,\quad n\geq 2\,,$$

où α et β sont deux nombres réels, sont convergentes si $\alpha>1$, divergentes si $\alpha<1$ (ce quelque soit la valeur de β) ; si $\alpha=1$, la série est divergente si $\beta\leq 1$ et convergente si $\beta>1$ (on pourra vérifier cela en exercice en utilisant la proposition 1.8). On pourra d'ailleurs donner un équivalent du reste de la série (si elle est convergente) et de la somme partielle d'ordre n (si elle est divergente). Ces séries sont dites *séries de Bertrand*; le mathématicien francais Joseph Bertrand (l'un des pionniers de la théorie des probabilités), 1822-1900, les introduisit et on les retrouve fréquemment dans la théorie des probabilités (théoème centrale limite ou loi du logarithme itéré).

1.4 Séries à termes quelconques non alsolument convergentes

Comme on l'a vu, pour peu que la série $[|u_n|]_{n\geq n_0}$ diverge et que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tende vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on ne peut plus rien conclure concernant le comportement asymptotique de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$; c'est par exemple le cas si

$$u_n = u_n(\theta) = \frac{e^{in\theta}}{n}\,,\quad n\geq 1\,,$$

où $\theta\not\equiv 0$ (modulo 2π). Ce n'est que dans ces cas litigieux (la série $[|u_n|]_{n\geq n_0}$ diverge et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$) que l'on invoquera l'un des deux critères ci-dessous, celui des *séries alternées* ou celui (qui le généralise) *d'Abel*.

1.4.1 Le critère des séries alternées

Une éventuelle alternance de signe présente dans l'expression des termes successifs d'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ de nombres réels tend naturellement à "brider" le comportement asymptotique de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$; on peut penser au processus de capitalisation : on gagne g_1, puis on perd p_1 (mais moins que ce que l'on vient de gagner), puis l'on gagne à nouveau g_2 (moins toutefois que ce que l'on vient de perdre p_1), etc... ; on peut penser sous ces conditions, le total cumulé

$$g_1 - p_1 + g_2 - p_2 \cdots + g_n$$

tendra vers une limite lorsque n tend vers l'infini, ce si toutefois la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. C'est ceci qu'exprime le *critère des séries alternées*.

Théorème 1.3 **[critère des séries alternées]** *Soit $(a_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombres complexes, tous réels positifs pour $n \geq n_1$, avec*

$$n \geq n_1 \Longrightarrow a_n \geq a_{n+1} \geq 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,;$$

alors la série $[(-1)^n a_n]_{n\geq n_0}$ est convergente ; de plus, pour $N \geq n_1$, le reste

$$R_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

est du signe de $(-1)^{N+1} a_{N+1}$ (premier terme négligé) et est tel que

$$|R_N| \leq a_{N+1}\,.$$

Preuve. Soit, pour N entier tel que $N \geq n_0$, S_N la N-ième somme partielle

$$S_N := \sum_{k=n_0} (-1)^k a_k\,.$$

Si n est un entier tel que $2n-1 \geq n_1$, on a

$$S_{2n-1} - S_{2n+1} = \sum_{k=n_0}^{2n-1} (-1)^k a_k - \sum_{k=n_0}^{2n+1} (-1)^k a_k = -a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0\ ;$$

de même

$$S_{2n} - S_{2n+2} = \sum_{k=n_0}^{2n} (-1)^k a_k - \sum_{k=n_0}^{2n+2} (-1)^k a_k = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0\ ;$$

d'autre part,

$$S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2} \geq 0\,;$$

on a donc, pour n tel que $2n-1 \geq n_1$, le jeu d'inégalités :

$$S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}\,. \tag{1.14}$$

On considère les deux suites

$$\lambda_n := S_{2n-1}\,,\ 2n-1 \geq n_1$$

et

$$\mu_n := S_{2n}\,,\ 2n-1 \geq n_1\,;$$

la première est croissante (car $\lambda_{n+1} = S_{2n+1}$), la seconde est décroissante (car $\mu_{n+1} = S_{2n+2}$) et l'on a, pour tout n tel que $2n-1 \geq n_1$,

$$\lambda_n \leq \mu_n \, ,$$

avec aussi

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0 \; ;$$

du fait que $\mathbb{R}$ vérifie l'axiome des segments emboîtés (toute intersection décroissante de segments emboîtés dont le diamètre tend vers 0 est réduite à un singleton), les deux suites $(\lambda_n)_n$ et $(\mu_n)_n$ qui sont dites *adjacentes* ont une limite commune S. Ceci montre la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq n_1}$, donc de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$.

Si S est la somme de cette série $[u_n]_{n\geq n_0}$, on a d'après (1.14), pour $2n-1 \geq n_1$,

$$S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n} \, .$$

On a donc

$$0 \leq S - S_{2n+1} = R_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2}$$

et

$$0 \geq S - S_{2n} = R_{2n} \geq S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \, ,$$

ce qui prouve que R_N est bien toujours du signe de $(-1)^{N+1} a_{N+1}$ (premier terme négligé) et est en valeur absolue majoré par a_{N+1} dès que $N \geq n_1$. Ceci achève la preuve du théorème 1.3. $\diamondsuit$

Exemple 1.5. La série harmonique $[1/n]_{n\geq 1}$ est divergente, mais la série $[(-1)^{n-1}/n]_{n\geq 1}$ est une série alternée convergente ; on calculera plus tard dans ce cours la valeur de sa somme S, qui de fait vaudra $\log 2$. Si l'on veut calculer $\log 2$ avec 8 décimales exactes, on utilise le fait que la différence entre $\log 2$ et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

est du signe de $(-1)^n$ et est en valeur absolue majorée par $1/(n+1)$; pour que cette différence soit plus strictement plus petite que $10^{-8}/2$ (c'est-à-dire pour que le nombre rationnel $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ représente $\log 2$ avec au moins 8 premières décimales exactes), il suufit donc que $n+1 > 2\times 10^8$. Ici bien sûr, la convergence de la somme de la série vers $\log 2$ est lente. On fait appel à des techniques du même ordre (mais avec des séries dont on cherche à "accélérer" la convergence pour limiter le temps de calcul) pour calculer par exemple le nombre π. La formule de Machin (mathématicien francais, 1680-1752) donne par exemple

$$\pi = 16 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} (1/5)^{2k+1} - 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} (1/239)^{2k+1}$$

et fournit plus rapidement des approximations de π par les sommes partielles (il s'agit de la différence de deux sommes de séries alternées).

1.4.2 L'intégration par parties discrète

Nous nous préparons (dans la sous-section 1.4.3) à énoncer des critères (de convergence de séries numériques) attribués au mathématicien norvégien Niels Henrik Abel, 1802-1829. Les travaux d'Abel, contemporains de ceux d'Evariste Galois, ont profondément marqué tant la pensée algébrique que géométrique et ont initié le concept de géométrie algébrico-analytique. Abel exploita systématiquement l'idée inhérente à la preuve des critères en question, idée consistant à mettre en parallèle les opérations de dérivation et de primitivisation (portant sur les fonctions) et celles de *dérivation discrète* et de *sommation* portant sur les suites. C'est cette idée que nous présentons ici.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique ; la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq n_0}$, où

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

joue, pour cette suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ donnée, un rôle tout-à-fait analogue à celui que jouerait la fonction primitive

$$F \ : x \to \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

pour la fonction continue f sur $[x_0, +\infty[$; à la place de la formule classique

$$F'(x) = f(x) \, , \quad x > x_0$$

qui permet de retrouver f à partir de F, on a les formules

$$u_{n+1} = S_{n+1} - S_n \, , \quad n \geq n_0 \, , \quad u_{n_0} = S_{n_0} \, ,$$

qui permettent de retrouver la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ à partir de la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$; il est donc raisonnable d'appeler *dérivation discrète à droite* l'opération

$$(S_n)_{n\geq n_0} \to (S_{n+1} - S_n)_{n\geq n_0} = (u_n)_{n\geq n_0} \, .$$

Si f et g sont deux fonctions continuement dérivables sur un intervalle $[a, b]$, on a la très utile formule *d'intégration par parties*

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt \, .$$

Le *lemme d'Abel* est exactement le pendant discret de cette formule capitale.

Lemme 1.1 [lemme d'Abel] *Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$, $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites de nombres complexes et*

$$(S_n)_{n\geq n_0}$$

la suite des sommes partielles de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$; pour $q > p > n_0$, on a

$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = v_q S_q - v_p S_{p-1} - \sum_{k=p}^{q-1} (v_{k+1} - v_k) S_k \, . \tag{1.15}$$

Preuve. L'astuce consiste juste à écrire, pour $k = p, ..., q$,

$$u_k = S_k - S_{k-1} \, ;$$

on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{q} u_k v_k &= \sum_{k=p}^{q} v_k (S_k - S_{k-1}) \\ &= v_p(S_p - S_{p-1}) + v_{p+1}(S_{p+1} - S_p) + \cdots + v_{q-1}(S_q - S_{q-1}) + v_q(S_q - S_{q-1}) \\ &= -v_p S_{p-1} + \sum_{k=p}^{q-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + v_q S_q \, . \end{aligned}$$

Le lemme d'Abel n'est donc qu'un jeu d'écriture, correspondant à une version discrète de la formule d'intégration par parties. $\diamondsuit$

1.4.3 Les critères d'Abel

Dans le terme général de la série $[(-1)^n a_n]_{n\geq n_0}$ faisant l'objet du critère des séries alternées, le point clef (lié précisément à l'idée d'alternance) est que la suite des sommes partielles de la série $[(-1)^n]_{n\geq 0}$ est une suite bornée, tandis que la suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ décroit, elle, vers 0. Le premier *critère d'Abel* généralise cet état de fait.

Théorème 1.4 [premier critère d'Abel] *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ et $[v_n]_{n\geq n_0}$ deux séries numériques telles que :*

- *la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ des sommes partielles de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est une suite bornée, soit*
$$\exists C > 0\,,\ \textit{tel que}\ \forall n \geq n_0\,,\ |S_n| \leq C\,;$$
- *la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est une suite à termes tous positifs pour $n \geq n_1$, tendant vers 0 à l'infini, et telle que*
$$n \geq n_1 \Longrightarrow v_n \geq v_{n+1} \geq 0\,.$$

Alors la série $[u_n v_n]_{n\geq n_0}$ est convergente et l'on a la majoration du reste
$$\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k v_k\Big| \leq 2C v_{n+1}$$
pour $n \geq n_1$.

Preuve. On va montrer que la série $[u_n v_n]_{n\geq n_0}$ satisfait le critère de Cauchy **(C)** de la proposition 1.2 ; la conclusion du théorème résultera alors précisément de cette proposition 1.2. Soit $q > p > n_1$; on a, d'après le lemme d'Abel 1.1 et l'inégalité triangulaire
$$\Big|\sum_{k=p}^{q} u_k v_k\Big| \leq C\Big(v_p + v_q + \sum_{k=p}^{q-1}(v_k - v_{k+1})\Big) = 2C v_p \tag{1.16}$$
(on a utilisé ici la première hypothèse sur la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$) ; en utilisant maintenant la seconde hypothèse sur cette suite, on voit que, pourvu que $p \geq N(\epsilon)$,
$$\Big|\sum_{k=p}^{q} u_k v_k\Big| \leq \epsilon\,;$$
le critère de Cauchy est vérifié, donc aussi la convergence de la série $[u_n v_n]_{n\geq n_0}$. Si l'on fixe $p = n+1$ et que l'on fasse tendre q vers l'infini dans (1.16), on trouve la majoration voulue pour le reste à l'ordre n de la série $[u_n v_n]_{n\geq n_0}$. $\diamondsuit$

Exemple 1.6 Si $(a_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de nombres complexes tous réels positifs au delà du cran n_1, tendant vers 0 à l'infini, avec de plus
$$n \geq n_1 \Longrightarrow a_n \geq a_{n+1} \geq 0$$
et si $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv 0$ (modulo 2π), les calculs de l'exemple 1.1 montrent que les sommes partielles de la série $[e^{in\theta}]_{n\geq 0}$ sont bornées en module ; les séries
$$[a_n e^{in\theta}]_{n\geq n_0}\,,\ [a_n \cos(n\theta)]_{n\geq n_0}\,,\ [a_n \sin(n\theta)]_{n\geq n_0}\,,$$
sont donc toutes convergentes d'après le critère d'Abel (théorème 1.4 ci-dessus).

Un énoncé comme le théorème 1.4 est loin d'être le seul énoncé que l'on puisse déduire du lemme d'Abel ; voici par exemple un *second critère d'Abel*, que nous retrouverons comme le premier lors de l'étude non plus des séries numériques, mais des séries de fonctions :

Théorème 1.5 [second critère d'Abel] *Soient $[u_n]_{n\geq n_0}$, $[v_n]_{n\geq n_0}$ deux séries numériques telles que :*

- *la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est une série convergente ;*
- *la série télescopique $[v_n - v_{n+1}]_{n\geq n_0}$ est une série absolument convergente.*

Alors la série $[u_n v_n]_{n\geq n_0}$ est convergente.

Preuve. La preuve utilise différemment le lemme d'Abel 1.1. On note R_n le reste au cran n de la série convergente $[u_n]_{n\geq n_0}$; mais au lieu de jouer avec la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$, on joue cette fois avec la suite $(R_n)_{n\geq n_0}$ des restes et l'on écrit

$$u_k = R_{k-1} - R_k$$

pour $k > n_0$ au lieu de $u_k = S_k - S_{k-1}$ comme dans la preuve du lemme d'Abel. Si $p > q > n_0$, on a donc, comme dans la preuve du lemme d'Abel 1.1 :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = \sum_{k=p}^{q} v_k(R_{k-1} - R_k) \\
= \;& v_p(R_{p-1} - R_p) + v_{p+1}(R_p - R_{p+1}) + \cdots + v_{q-1}(R_{q-2} - R_{q-1}) + v_q(R_{q-1} - R_q) \\
= \;& v_p R_{p-1} + \sum_{k=p}^{q-1} R_k(v_{k+1} - v_k) - v_q R_q\,.
\end{aligned}$$

Par hypothèses, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon)$ tel que

$$n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow |R_n| \leq \epsilon\,;$$

si $p \geq N(\epsilon)$ et $q > p$, on a donc (grâce à l'inégalité triangulaire)

$$\Big|\sum_{k=p}^{q} u_k v_k\Big| \leq \epsilon(|v_p| + |v_q| + \sum_{k=n_0}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|).$$

Comme

$$|v_p| = \Big|\sum_{k=n_0}^{p-1} (v_k - v_{k+1}) - v_{n_0}\Big|$$

et

$$|v_q| = \Big|\sum_{k=n_0}^{q-1} (v_k - v_{k+1}) - v_{n_0}\Big|\,,$$

on a

$$|v_p| + |v_q| \leq 2\Big(|v_{n_0}| + \sum_{k=n_0}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|\Big).$$

On a donc

$$\Big|\sum_{k=p}^{q} u_k v_k\Big| \leq \epsilon(2|v_{n_0}| + 3\sum_{k=n_0}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|).$$

La série $[u_n v_n]_{n\geq n_1}$ vérifie encore le critère de Cauchy, donc converge (proposition 1.2). $\diamondsuit$

1.5 Opérations sur les séries numériques

Les séries numériques du type $[u_n]_{n\geq 0}$ (on peut toujours compléter une série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$ en une telle série en décidant $u_0 = \dots = u_{n_0-1} = 0$) constituent un $\mathbb{C}$-espace vectoriel : on peut définir en effet la somme de deux séries numériques $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$ comme la série :

$$[u_n]_{n\geq 0} + [v_n]_{n\geq 0} \ := [u_n + v_n]_{n\geq 0} \ ;$$

de même, si λ est un nombre complexe et $[u_n]_{n\geq 0}$ une série numérique, on définit

$$\lambda \cdot [u_n]_{n\geq 0} \ := [\lambda u_n]_{n\geq 0} \,;$$

les deux opérations (l'addition et la multiplication externe) confèrent à l'ensemble des séries numériques la structure attendue de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. L'espace des séries numériques à coefficients réels, hérite, lui, d'une structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Notons que la somme de deux séries convergentes est convergente (de somme la somme des deux séries) et qu' *a contrario*, la somme d'une série convergente et d'une série non convergente est une série non convergente (cela sert souvent pour décider de la non-convergence d'une série numérique).

En ce qui concerne l'opération de "multiplication" des séries, nous en avons une somme toute très naturelle, celle par exemple qu'opère un logiciel de calcul lorsqu'on lui soumet deux vecteurs lignes

$$U := [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_{N-1}] \quad , \quad V := [v_0 \ v_1 \ \dots \ v_{N-1}]$$

et qu'on lui soumet la routine

```
W=U .* V
```

Il s'agit ici du produit "terme à terme", dit aussi *produit de Hadamard* (Jacques Hadamard, arithméticien et analyste francais, commenca sa carrière à l'université de Bordeaux de 1893 à 1897) :

Définition 1.3 *Le produit de Hadamard des séries numériques* $[u_n]_{n\geq 0}$ *et* $[v_n]_{n\geq 0}$ *est par définition la série numérique* $[u_n v_n]_{n\geq 0}$.

Cette opération (naturelle lorsqu'il s'agit de multiplier les suites numériques) n'est cependant pas appropriée si l'on a en tête le processus de "capitalisation" sous-jacent au concept de série.

Pour concevoir une opération plus naturelle, revenons au concept naïf de "série d'évenements" et supposons que $\mathcal{L}$ soit un appareil physique qui transforme les suites numériques $(u_n)_{n\geq 0}$ en suites numériques du même type, et ce en agissant de manière linéaire. Les suites numériques d'entrée et de sortie peuvent être supposées indexées par le temps (qui prend les valeurs discrètes $t = 0$, $t = 1$,...) et il est naturel de supposer que les paramètres de la machine sont immuables dans le temps (on dit alors que $\mathcal{L}$ est une *boîte noire*). Alors, si la machine répond à la suite d'entrées

$$e_0 = 1 \,, e_1 = e_2 = \dots = e_n = \dots = 0$$

en renvoyant en sortie la suite $(v_n)_{n\geq 0}$, on voit aisément qu'elle se doit de répondre à une suite d'entrées $(u_n)_{n\geq 0}$ en renvoyant la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\,. \tag{1.17}$$

L'importance de cette opération (dite <u>*convolution discrète*</u>) au niveau des suites

$$\Big((u_n)_{n\geq 0}\,,\,(v_n)_{n\geq 0}\Big) \to (u_n)_{n\geq 0} \,*\, (v_n)_{n\geq 0} = (w_n)_{n\geq 0}$$

(où w_n est défini par (1.17)) dans le traitement de l'information numérique justifie le fait qu'on la répercute au niveau non plus des suites, mais des séries. On définit ainsi le <u>*produit de Cauchy*</u> de deux séries numériques. La proposition 1.9 justifiera (dans le contexte des séries positives) que c'est bien le produit des sommes des deux séries à termes positifs $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ que l'on obtient en regardant la somme de la série associée précisément à la suite $(u_n)_{n\geq 0} * (v_n)_{n\geq 0}$.

Définition 1.4 *Le <u>produit de Cauchy</u> des séries numériques $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$ est par définition la série numérique $[w_n]_{n\geq 0}$, avec*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad w_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} v_k u_{n-k}\,.$$

La seconde raison (de nature plus algébrique cette fois) pour laquelle l'idée du produit de Cauchy s'impose est la suivante : pour calculer le produit des deux expressions formelles

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k X^k$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k X^k\,,$$

on fait appel aux règles de calcul algébrique (penser aux produits de polynômes ou de développements limités) pour affirmer que le "produit" des deux expressions est

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k X^k\,,$$

où $w_k := \sum\limits_{l=0}^{k} u_l v_{k-l}$; on retrouve bien le produit de Cauchy.

Il se trouve que le produit de Cauchy se plie mieux au respect du comportement asymptotique des entrées que ne le fait le produit de Hadamard (notons que les critères d'Abel sont souvent utiles pour vérifier la convergence du produit de Hadamard de deux séries numériques).

En ce qui concerne le produit de Cauchy, nous avons tout d'abord l'important résultat suivant :

Proposition 1.9 *Le produit de Cauchy $[w_n]_{n\geq 0}$ de deux séries numériques $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$ absolument convergentes est une série absolument convergente, de somme*

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\Big)$$

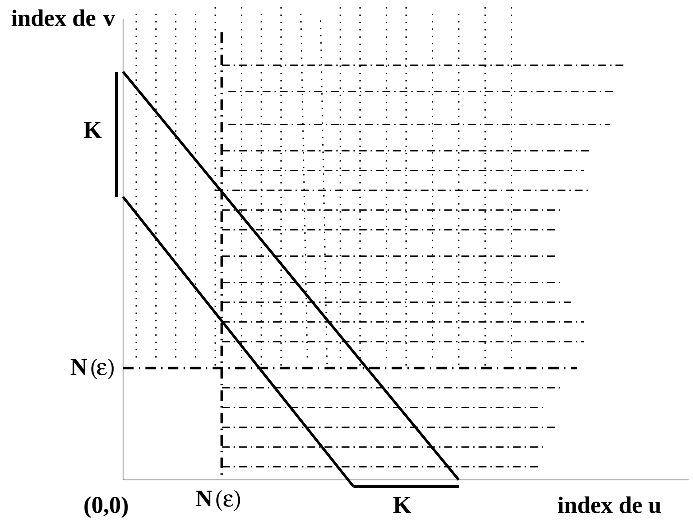

FIG. 1.2 – Absolue convergence du produit de Cauchy

avec donc l'estimation

$$|S| \leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|\Big) \times \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |v_k|\Big)\,.$$

Preuve. Considérons tout d'abord deux séries $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$, toutes les deux absolument convergentes. D'après le critère de Cauchy (proposition 1.2), il existe $N(\epsilon)$ telle que, pour tout sous-ensembles finis sans trous K_1 et K_2 de $\mathbb{N}$ inclus $[N(\epsilon), +\infty[$, on ait

$$\max\Big(\sum_{k\in K_1} |u_k|\,,\ \sum_{k\in K_2} |v_k|\Big) \leq \epsilon\,.$$

Soit K un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ sans trous inclus dans $[2N(\epsilon), +\infty[$;

$$\begin{aligned}\sum_{n\in K}\Big|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\Big| \leq \sum_{n\in K}\sum_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}| &\leq \sum_{p=N(\epsilon)}^{\sup K}\ \sum_{q=0}^{\sup K} |u_p||v_q| + \sum_{q=N(\epsilon)}^{\sup K}\ \sum_{p=0}^{\sup K} |u_p|\,|v_q| \\ &\leq \epsilon\sum_{q=0}^{\infty}|v_q| + \epsilon\sum_{p=0}^{\infty}|u_p|\,. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Pour comprendre cette majoration, on s'aidera de la figure 2 : la somme des termes $|u_p|\,|v_q|$ lorsque $p+q\in K$ a été majorée par la somme de ces mêmes termes lorsque (p,q) appartient au domaine entouré en gras, elle même majorée par la somme :

- des $|u_p|\,|v_q|$ lorsque $p \geq N(\epsilon)$ (domaine hachuré en pointillé horizontalement)
- des $|u_p|\,|v_q|$ lorsque $q \geq N(\epsilon)$ (domaine hachuré en pointillé verticalement)

La quantité à droite de (1.18) pouvant être rendue arbitrairement petite (quand ϵ est choisi assez petit), on conclut toujours d'après le critère de Cauchy que la série $[w_n]_{n\geq 0}$ obtenue comme le produit de Cauchy des deux séries absolument convergentes $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$ est aussi absolument convergente, donc convergente.

Pour calculer la somme, on remarque que

$$\Big|\sum_{k\leq 2n} w_k - \Big(\sum_{k=0}^{n} u_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big)\Big| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}|u_p||v_q| + \sum_{q=n+1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}|v_q||u_p|\ ;$$

le second membre de cette inégalité est égal à

$$\Big(\sum_{q=0}^{\infty}|v_q|\Big)\,R_n([u])+\Big(\sum_{p=0}^{\infty}|u_p|\Big)\,R_n([v])$$

où $(R_n([|u|]))_{n\geq 0}$ (resp. $(R_n([|v|]))_{n\geq 0}$) désigne la suite des restes de la série convergente $[|u_n|]_{n\geq 0}$ (resp. $[|v_n|]_{n\geq 0}$) et tend donc vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On en déduit donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k\leq 2n} w_k\Big) &= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}u_k\times\sum_{k=0}^{n}v_k\Big)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}u_k\times\sum_{k=0}^{\infty}v_k\,,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la proposition. $\diamondsuit$

De fait, nous disposons d'un résultat plus fort, où seule l'absolue convergence de l'une des deux séries $[u_n]_{n\geq 0}$ ou $[v_n]_{n\geq 0}$ s'avère nécessaire : c'est le *théorème de Mertens*, attribué au théoricien des nombres prussien Franz Mertens (1840-1927) :

Proposition 1.10 [théorème de Mertens] *Soit $[u_n]_{n\geq 0}$ une série numérique absolument convergente et $[v_n]_{n\geq 0}$ une série numérique convergente. Le produit de Cauchy des deux séries $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$, soit la série de terme général*

$$w_n := \sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}v_ku_{n-k}$$

est une série convergente.

Remarque 1.7. On verra au chapitre suivant que, sous les hypothèses de cette proposition, la somme de la série produit de Cauchy $[w_n]_{n\geq 0}$ est encore le produit des sommes des séries $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$.

Preuve. On va utiliser pour la preuve le critère de Cauchy (proposition 1.2) : d'après ce critère, on sait qu'étant donné $\epsilon>0$, il existe $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$, tel que, pour tout sous-ensembles fini (sans trous) K_1 et K_2 de $\mathbb{N}$ inclus dans $[N(\epsilon),+\infty[$, on ait

$$\max\Big(\sum_{k\in K_1}|u_k|\,,\,\Big|\sum_{k\in K_2}v_k\Big|\Big)\leq\epsilon$$

(ceci résulte de la convergence de la série numérique $[v_n]_{n\geq 0}$ et de l'absolue convergence de la série $[u_n]_{n\geq 0}$). D'autre part, la convergence de la série $[v_n]_{n\geq 0}$ implique l'existence d'une constante C telle que

$$\forall n\in\mathbb{N}\;,\;\Big|\sum_{k=0}^{n}v_k\Big|\leq C\,.$$

Soit K un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ sans trous inclus dans $[2N(\epsilon),+\infty[$: en s'inspirant de la figure 1.3, on écrit

$$\sum_{n\in K}\Big(\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}\Big)=\sum_{p=0}^{N(\epsilon)}\Big(\sum_{q=\mu_1(p)}^{\mu_2(p)}v_q\Big)u_p+\sum_{p=N(\epsilon)+1}^{\sup K}\Big(\sum_{q=\mu_1(p)}^{\mu_2(p)}v_q\Big)u_p\,;$$

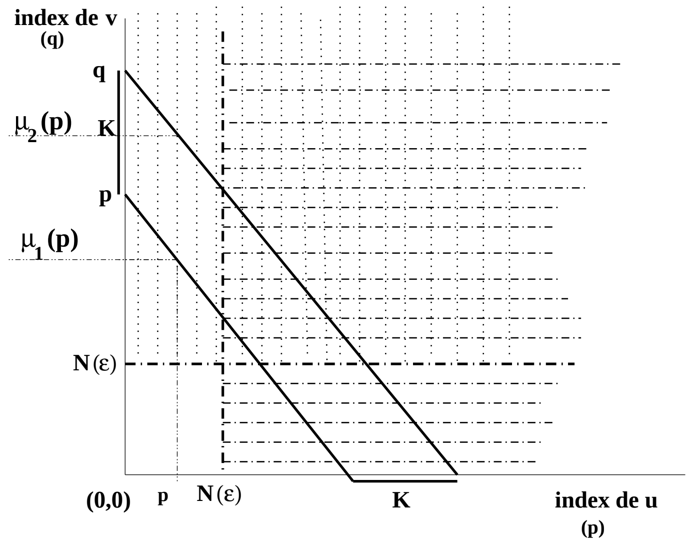

FIG. 1.3 – Preuve du théorème de Mertens

on a, compte-tenu du choix de $N(\epsilon)$ et de l'inégalité triangulaire :

$$\Big|\sum_{p=0}^{N(\epsilon)}\Big(\sum_{q=\mu_1(p)}^{\mu_2(p)} v_q\Big)u_p\Big| \leq \sum_{p=0}^{N(\epsilon)}|u_p|\Big|\sum_{q=\mu_1(p)}^{\mu_2(p)} v_q\Big| \leq \epsilon\sum_{p=0}^{\infty}|u_p|$$

(en effet, pour tout $p = 0, ..., N(\epsilon)$, on voit sur la figure 1.3 que $\{\mu_1(p), ..., \mu_2(p)\}$ est inclus dans $[N(\epsilon), +\infty[$) ; on a aussi

$$\Big|\sum_{p=N(\epsilon)+1}^{\sup K}\Big(\sum_{q=\mu_1(p)}^{\mu_2(p)} v_q\Big)u_p\Big| \leq \sum_{p=N(\epsilon)+1}^{\sup K}|u_p|\Big|\sum_{q=\mu_1(p)}^{\mu_2(p)} v_q\Big| \leq 2C\sum_{p=N(\epsilon)+1}^{\sup K}|u_p| \leq 2C\epsilon\,.$$

Tout ceci montre que l'on a

$$\Big|\sum_{n\in K}\Big(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\Big)\Big| \leq \Big(2C + \sum_{p=0}^{\infty}|u_p|\Big)\epsilon\,,$$

ce qui prouve que cette quantité peut être rendue arbitrairement petite (pourvu que $\inf K$ soit assez grand). Le critère de Cauchy (proposition 1.2) s'applique donc et l'on en déduit la convergence de la série produit de Cauchy des séries $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$. $\diamondsuit$

FIN DU CHAPITRE 1

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

2.1 Suites, séries de fonctions ; convergence simple, uniforme

2.1.1 Les concepts de suite et série de fonctions

Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$; une *suite de fonctions* définies sur $\mathcal{D}$ est par définition la donnée, pour chaque entier n supérieur ou égal à un certain seuil n_0, d'une fonction f_n de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$; si les fonctions f_n, $n \geq n_0$ sont toutes à valeurs réelles, on dit que la suite est *une suite de fonctions à valeurs réelles*. On notera la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$; il est sous-entendu que toutes les fonctions sont définies sur le même sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemples 2.1. Par exemple, si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite numérique, on rencontrera fréquemment les suites de fonctions $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ (ici $\mathcal{D} = \mathbb{C}$) ou $(a_n \cos(n\theta))_{n\geq 0}$, $(a_n \sin(n\theta))_{n\geq 0}$ (ici $\mathcal{D} = \mathbb{R}$) ; la suite de fonctions

$$\left(\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(z-k)}\right)_{n\geq 0}$$

est par exemple une suite de fonctions sur $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$; par contre, si

$$f_n(t) = \log(t-n)\,, \quad t > n\,,$$

on ne saurait prétendre que $(f_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de fonctions sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ car il n'y a aucun sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel toutes les fonctions f_n, pour $n \geq n_0$, puissent être définies.

Il est important de souligner que l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ est ordonné et que la donnée d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sous-entend que cet ordre soit pris en compte : il ne faut pas confondre l'ensemble $\{f_n\,;\, n \geq n_0\}$ (ensemble de fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$) et la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$, que l'on peut aussi interpréter, elle, comme une application de $\{n_0, n_0+1, ...\}$ dans l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$:

$$(f_n)_{n\geq n_0} \;:\quad n \geq n_0 \to f_n \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{C})\,.$$

Disposant d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ définies toutes sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut introduire à nouveau le processus de "capitalisation" : on appellera série de fonctions $[f_n]_{n\geq n_0}$ (avec cette notation entre crochets en place de parenthèses) la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par :

$$S_n(t) := \sum_{k=n_0}^{n} f_k(t)\,, \quad t \in \mathcal{D}\,, n \geq n_0\,.$$

Exemple 2.2. Si l'on considère la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$, où

$$f_n(t) := \frac{1}{z-n} - \frac{1}{z-n-1}\,,$$

la série $[f_n]_{n\geq 0}$ est la suite

$$\Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-n-1}\Big)_{n\geq 0}\,.$$

Deux exemples particuliers de séries retiendront notre attention par la suite :

– si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite numérique, la série de fonctions $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ (ici $\mathcal{D} = \mathbb{C}$) est dite *série entière*, le qualificatif "entière" rappelant que $z \to z^n$ est une fonction puissance d'exposant entier ;
– si $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites numériques, la série de fonctions (sur $\mathbb{R}$ cette fois)

$$[a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)]_{n\geq 0} = \left[\frac{a_n - ib_n}{2}e^{in\theta} + \frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\theta}\right]_{n\geq 0}$$

est dite *série trigonométrique*, le qualificatif "trigonométrique" rappelant que le terme général implique les fonctions trigonométriques cos et sin.

2.1.2 Convergence simple ; convergence uniforme

Considérons deux exemples simples de suites de fonctions sur $\mathbb{R}$:

– soit Δ la fonction "triangle" définie par

$$\Delta(t) = \max(0, 1-|t|)\ ;$$

soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = \Delta(t-n)\,, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}\,;$$

le graphe de la fonction f_n se présente, lorsque n augmente, comme une "bosse glissante" se déplaçant vers la droite sans changer d'aspect ; il est clair que

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$$

(mieux, si t est fixé, tous les nombres $f_n(t)$ sont nuls pour t assez grand) ; en revanche, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \sup|f_n(t)| = 1;$$

– soit, toujours sur $\mathbb{R}$, la suite de fonctions

$$f_n(t) = (g(t))^n$$

où g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\sup|g| < 1$; on a encore

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$$

mais cette fois

$$\sup |f_n| = (\sup |g|)^n \to 0$$

lorsque n tend vers l'infini ; le graphe de f_n s'écrase cette fois de manière uniforme sur l'axe des abscisses lorsque n tend vers l'infini.

Ces deux exemples nous conduisent aux deux concepts de convergence suivant concernant les suites de fonctions le second étant plus fort que le premier :

Définition 2.1 *Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions sur $\mathcal{D}$ et f une fonction sur $\mathcal{D}$ (toutes les fonctions sont ici à valeurs dans $\mathbb{C}$) ;*

- *on dit que la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge simplement vers f sur $\mathcal{D}$ lorsque*

$$\forall t \in \mathcal{D}\,, \quad \lim_{n\infty}(f_n(t) - f(t)) = 0 \ ;$$

- *on dit que la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge uniformément vers f sur $\mathcal{D}$ lorsque*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{t\in\mathcal{D}} |f_n(t) - f(t)|\Big) = 0 \ ;$$

Exemple 2.3. Dans nos deux exemples ci-dessus, le premier est un exemple de suite de fonctions convergeant simplement (mais non uniformément !) vers la fonction identiquement nulle (sur $\mathbb{R}$), le second un exemple de suite de fonctions convergeant uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Ces deux concepts se transposent au cadre des séries de fonctions :

Définition 2.2 *Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions sur $\mathcal{D}$; la série de fonctions $[f_n]_{n\geq 0} = (S_n)_{n\geq n_0}$ est dite converger simplement sur $\mathcal{D}$ si, pour tout $t \in \mathcal{D}$,*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=n_0}^{n} f_k(t)\Big)$$

existe ; cette série $[f_n]_{n\geq n_0}$ est dite converger uniformément sur $\mathcal{D}$ s'il existe une fonction $S\ : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{t\in\mathcal{D}}\Big|\sum_{k=n_0}^{n} f_k(t) - S(t)\Big|\Big) = 0\,.$$

Dans les deux cas, la fonction S définie sur $\mathcal{D}$ par

$$S(t) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=n_0}^{n} f_k(t)\Big) = \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k(t)$$

est dite somme de la série de fonctions $[f_n]_{n\geq n_0}$.

Exemple 2.4. La série de fonctions $[f_n]_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$, où

$$f_n(t) := \frac{1}{z-n} - \frac{1}{z-n-1}$$

(voir l'exemple 2.2) est simplement convergente et de somme $S(z) = 1/z$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$; en effet

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-n-1} \to \frac{1}{z}$$

si $n \to \infty$; la convergence de cette même série est uniforme sur tout disque fermé de $\mathbb{C}$ inclus dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

Remarque 2.1. Pour une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq n_0}$ à valeurs réelles, on peut aussi parler de *convergence uniforme vers* $\pm\infty$; par exemple une suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ de fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ converge uniformément vers $+\infty$ si

$$\forall R > 0\,,\ \exists N(R) \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N(R)\,,\ \forall t \in \mathcal{D}\,,\ f_n(t) \geq R$$

(on remplace la fin par $f_n(t) \leq -R$ si l'on veut transcrire la convergence uniforme vers $-\infty$).
Pour une suite de fonctions à valeurs complexes, on peut aussi introduire la notion de convergence uniforme vers l'infini. L'infini du plan complexe est à comprendre comme le pôle Nord sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ (de centre $(0,0,0)$), le plan complexe lui-même étant en correspondance avec $\mathbb{S}^2$ privé du pôle Nord *via* la projection stéréographique depuis le pôle Nord, comme sur la figure 2.1 ci-dessous :

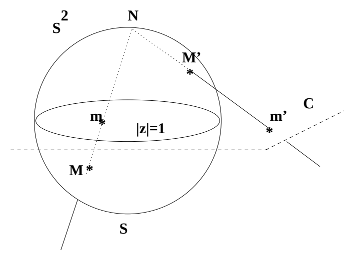

FIG. 2.1 – La projection stéréographique

Dire que la suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge vers l'infini (si les f_n sont à valeurs complexes et toutes définies dans un sous-ensemble D de $\mathbb{C}$) uniformément sur D signifie

$$\forall R > 0\,,\ \exists N(R) \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N(R)\,,\ \forall t \in \mathcal{D}\,,\ |f_n(t)| \geq R$$

2.1.3 Les critères de Cauchy (simple et uniforme)

Il est capital de savoir décider la convergence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq n_0}$ sans en connaître *a priori* la limite (ou d'une série de fonctions sans en connaître *a priori* la somme) ; les mêmes remarques valent concernant la convergence uniforme d'une suite ou d'une série de fonctions. Pour cela, on dispose des deux critères (l'un pour la convergence simple, l'autre uniforme) de Cauchy suivants :

Proposition 2.1 [Critère de Cauchy 1 (convergence simple)] *Soit $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

- *la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est simplement convergente sur $\mathcal{D}$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \forall t \in \mathcal{D}\,,\ \exists N(\epsilon, t) \in \mathbb{N} \ t.q\ \forall p, q \geq N(\epsilon, t)\,,\ |f_p(t) - f_q(t)| \leq \epsilon\,; \tag{2.1}$$

- *la série $[f_n]_{n \geq 0}$ est simplement convergente sur $\mathcal{D}$ si et seulement si*

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0\,,\ \forall t \in \mathcal{D}\,,\ \exists N(\epsilon, t) \in \mathbb{N} \textit{ tel que} \\ &\qquad \forall K = \{p, p+1, ..., q\} \subset [N(\epsilon, t), +\infty[,\ \Big| \sum_{k \in K} f_k(t) \Big| \leq \epsilon\,; \end{aligned} \tag{2.2}$$

Preuve. Ce premier critère est banal : on écrit, pour chaque $t \in \mathcal{D}$, le critère de Cauchy ($\mathbf{C}_0$) (version "suites numériques") ou ($\mathbf{C}$) (version "séries numériques" de la proposition 1.2) pour la suite $(f_n(t))_{n\geq n_0}$ ou bien la série $[f_n(t)]_{n\geq n_0}$. L'important ici (dans (2.1) ou (2.2)) est l'ordre des quantificateurs (en particulier, $N(\epsilon, t)$ dépend à la fois de ϵ et de t !) $\diamondsuit$

Proposition 2.2 [Critère de Cauchy 2 (cadre uniforme)] *Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

- *la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniformément convergente sur $\mathcal{D}$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists N(\epsilon) \geq n_0 \in \mathbb{N}\ t.q\ \forall p, q \geq N(\epsilon)\,,\ \forall t \in \mathcal{D}\,,\ |f_p(t) - f_q(t)| \leq \epsilon\,; \tag{2.3}$$

- *la série $[f_n]_{n\geq 0}$ est uniformément convergente sur $\mathcal{D}$ si et seulement si*

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0\,,\ \exists N(\epsilon) \geq n_0 \text{ tel que} \\ &\qquad \forall K = \{p, p+1, ..., q\} \subset [N(\epsilon), +\infty[,\ \forall t \in \mathcal{D}\,,\ \Big|\sum_{k\in K} f_k(t)\Big| \leq \epsilon\,; \end{aligned} \tag{2.4}$$

Preuve. La seconde assertion n'est que la transcription de la première du cadre des suites à celui des séries. Écrire cette seconde assertion revient à écrire la première en remplaçant f_n par

$$\sum_{k=n_0}^{n} f_k\,;$$

on se contentera donc de prouver la première assertion.
Si f_n converge uniformément vers f, alors, pour p et q assez grands,

$$\forall t \in \mathcal{D}\,,\ |f_p(t) - f_q(t)| \leq |f(t) - f_p(t)| + |f(t) - f_q(t)| \leq \epsilon\,;$$

c'est donc bien gagné pour la preuve du "*et seulement si*".
Prouvons le "*si*". Il est clair que (2.3) implique (2.1) ; la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge simplement vers une fonction f sur $\mathcal{D}$ si (2.3) est remplie (c'est la proposition 2.1). Il suffit maintenant dans (2.3) de "geler" p et de faire courir q vers l'infini ; on a

$$\forall p \geq N(\epsilon)\,,\ \forall t \in \mathcal{D}\,,\ |f_p(t) - f(t)| \leq \epsilon\,,$$

ce qui signifie que $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge uniformément vers f quand $n \to \infty$. $\diamondsuit$

2.1.4 Convergence normale d'une série de fonctions

Très souvent dans la pratique, se trouve vérifiée pour une série de fonctions une contrainte de nature plus forte que l'uniforme convergence ; c'est la contrainte de <u>normale convergence</u> :

Définition 2.3 *Une série $[f_n]_{n\geq n_0}$ de fonctions sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et à valeurs complexes est <u>normalement convergente</u> (sur $\mathcal{D}$) si et seulement si il existe une série numérique positive $[w_n]_{n\geq n_1}$ <u>convergente</u> (dite <u>chapeau majorant</u>) telle que :*

$$\forall t \in \mathcal{D}\,,\ \forall n \geq \max(n_0, n_1)\,,\ |f_n(t)| \leq w_n\,. \tag{2.5}$$

Remarque 2.2. Bien sûr, s'il existe un chapeau majorant $[w_n]_{n\geq n_1}$, la série

$$\Big[\sup_{t\in\mathcal{D}}|f_n(t)|\Big]_{n\geq n_0}$$

en est aussi un (c'est même le plus petit possible) ; cependant, on préfère laisser la formulation sous la forme (2.5) qui s'accorde le mieux avec la théorie de l'intégration (mêlant indifféremment les points de vue discret et continu) au sens de Lebesgue.

Voici maintenant le résultat fondamental :

Théorème 2.1 *Toute série de fonctions $[f_n]_{n\geq n_0}$ (à valeurs complexes) sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ normalement convergente sur $\mathcal{D}$ est automatiquement uniformément convergente sur $\mathcal{D}$. La réciproque est fausse.*

Preuve. On applique simplement le critère de Cauchy uniforme ; pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $N(\epsilon)\geq \max(n_0,n_1)$ tel que

$$\forall K=\{p,p+1,...,q\}\subset [N(\epsilon),+\infty[\,,\quad \sum_{k\in K} w_k\leq \epsilon\,;$$

par conséquent, toujours pour un tel sous-ensemble fini K inclus dans $[N(\epsilon),+\infty[$,

$$\sup_{t\in\mathcal{D}}\Big|\sum_{k\in K} f_k(t)\Big|\leq \sum_{k\in K}\sup_{t\in\mathcal{D}}|f_k(t)|\leq \sum_{k\in K} w_k\leq\epsilon\ ;$$

l'assertion (2.4) est donc satisfaite et le critère de Cauchy uniforme relatif aux séries est rempli ; la série $[f_n]_{n\geq n_0}$ converge donc uniformément sur $\mathcal{D}$.

La réciproque du théorème est fausse puisqu'il existe des séries numériques $[u_n]_{n\geq n_0}$ convergentes non absolument convergentes ; on prend pour f_n la fonction constante égale justement à u_n : pour une telle série $[u_n]_{n\geq n_0}$, il y convergence uniforme de la série $[f_n]_{n\geq n_0}$, mais non convergence normale de la série $[f_n]_{n\geq n_0}$.

Le théorème est complètement démontré. $\diamondsuit$

Exemples 2.4. (liste d'exemples très importants)

- si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes, alors la série entière $[a_nz^n]_{n\geq 0}$ est normalement convergente sur tout disque $\overline{D(0,r)}$, avec
$$r<\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}}\leq +\infty\,;$$
en effet, on peut prendre comme chapeau majorant la série $[w_n]_{n\geq 0}$ avec
$$w_n:=|a_n|r^n$$
cette série converge d'après la règle de Cauchy (proposition 1.5) ;
- si $[a_n]_{n\geq 0}$ et $[b_n]_{n\geq 0}$ sont des séries absolument convergentes, la série trigonométrique
$$\Big[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\Big]_{n\geq 0}$$
est normalement convergente sur $\mathbb{R}$; on prend comme chapeau majorant
$$[|a_n|+|b_n|]_{n\geq 0}\,;$$
- la série de fonctions $[n^{-z}]_{n\geq 1}$ est normalement convergente dans tout demi-plan $\Pi_x:=\{z\in\mathbb{C}\,;\,\mathrm{Re}\,z\geq x\}$ lorsque $x>1$; en effet, on peut prendre comme chapeau majorant
$$[n^{-x}]_{n\geq 1}$$
qui est une série de Riemann convergente (voir l'exemple 1.2).

2.1.5 Régularité des fonctions et passage à la limite

Savoir si la régularité des fonctions (continuité, dérivabilité) se propage lorsque l'on passe à la limite (au niveau des suites de fonctions) est un problème crucial ; en ce sens, la convergence simple ne s'avère pas suffisamment robuste, ne serait-ce qu'au niveau de la continuité (c'est le cran zéro de régularité que l'on peut exiger). En voici avec l'exemple 2.5 ci-dessous une preuve :

Exemple 2.5. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions continues sur $[0,1]$ définies par

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt \text{ si } t \in [0, 1/n] \\ 0 \text{ si } t \in]1/n, 1]\,; \end{cases}$$

ces fonctions sont toutes continues sur $[0,1]$; la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t = 0 \\ 0 \text{ si } t \in]0, 1]\,; \end{cases}$$

qui, elle, n'est manifestement pas continue sur $[0,1]$ (il y a une discontinuité en $t=0$).

Nous allons voir cependant que la convergence uniforme implique la propagation à la limite de la continuité : on rappelle que si f est une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dire qu'elle est continue en un point t_0 de $\mathcal{D}$ revient à énoncer le critère suivant :

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists \eta = \eta(\epsilon, t_0) \text{ tel que } \forall t \in \mathcal{D}\,,\ \Big(|t - t_0| < \eta \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| \leq \epsilon\Big)\,.$$

Ceci étant posé, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.2 *Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et t_0 un point de $\mathcal{D}$; on suppose que la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge simplement sur $\mathcal{D}$ vers une fonction f ; on suppose aussi que la convergence de la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ vers f est <u>uniforme</u> sur $\mathcal{D} \cap \{t \in \mathbb{C}\,;\, |t - t_0| \leq \eta_0\}$ pour un certain $\eta_0 > 0$ <u>(la convergence est uniforme sur $\mathcal{D}$ au moins "près" de t_0)</u>. On suppose aussi que toutes les fonctions f_n (au moins pour n assez grand) sont continues en t_0. Alors la fonction f est continue en t_0.*

Remarque 2.3. Bien que le résultat de la proposition soit plus précis, on pourrait dire pour la mémoriser que <u>*toute limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue*</u>. C'est sans doute ainsi qu'il convient de la retenir en se souvenant toutefois que la continuité est une propriété <u>locale</u> qu'il suffit donc de vérifier <u>localement</u> ! Si l'on veut vérifier qu'une fonction f est continue en un point t_0, on se fiche royalement de tout se qui peut se passer à quelque distance strictement positive (mais arbitraire) de t_0 (par exemple, ce qui se passe pour $f(t)$ lorsque $|t - t_0| > \eta_0$ nous importe peu).

Preuve. La preuve est très simple. Donnons nous $\epsilon > 0$; on sait que, si n est assez grand ($n \geq N(\epsilon)$), alors :

$$\forall\, t \in \mathcal{D} \cap \{t \in \mathbb{C}\,;\, |t - t_0| \leq \eta_0\}\,,\ |f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon/3$$

(ceci résulte de l'hypothèse de convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ vers f sur $\mathcal{D} \cap \{t \in \mathbb{C}\,;\, |t - t_0| \leq \eta_0\}$) ; en particulier, on a

$$\forall\, t \in \mathcal{D} \cap \{t \in \mathbb{C}\,;\, |t - t_0| \leq \eta_0\}\,,\ |f_n(t_0) - f(t_0)| + |f_n(t) - f(t)| \leq 2\epsilon/3\,;$$

on a donc aussi, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} & \forall\, t \in \mathcal{D} \cap \{t \in \mathbb{C}\,;\, |t-t_0| \leq \eta_0\}\,, \\ |f(t)-f(t_0)| &\leq |f(t)-f_{N(\epsilon)}(t)| + |f_{N(\epsilon)}(t)-f_{N(\epsilon)}(t_0)| + |f_{N(\epsilon)}(t_0)-f(t_0)| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + |f_{N(\epsilon)}(t)-f_{N(\epsilon)}(t_0)|\,; \end{aligned}$$

mais la fonction $f_{N(\epsilon)}$ est continue au point t_0 (quitte à choisir $N(\epsilon)$ assez grand) ; par conséquent

$$\exists \eta(\epsilon, t_0) < \eta_0\,,\ \text{tel que } \forall t \in \mathcal{D}\,,\ \Big(|t-t_0| < \eta(\epsilon,t_0) \Longrightarrow |f_{N(\epsilon)}(t)-f_{N(\epsilon)}(t_0)| \leq \frac{\epsilon}{3}\Big)\,;$$

au bilan final, on a donc :

$$\forall t \in \mathcal{D}\,,\ \Big(|t-t_0| < \eta(\epsilon,t_0) \Longrightarrow |f(t)-f(t_0)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon\Big)\,.$$

La continuité de f en t_0 est ainsi prouvée. $\diamondsuit$

Cette proposition, combinée avec la proposition 2.2 ou le théorème 2.1, a pour conséquence très utile le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 *Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions continues, à valeurs complexes, sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ("continue sur $\mathcal{D}$" signifiant ici pour une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ "continue en tout point de $\mathcal{D}$") ; alors*

- *si la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ se plie au critère de Cauchy uniforme pour les suites de fonctions (clause (2.3) dans l'énoncé de la proposition 2.2), alors cette suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge uniformément sur $\mathcal{D}$ vers une fonction continue sur $\mathcal{D}$;*
- *si la série $[f_n]_{n\geq n_0}$ se plie au critère au critère de Cauchy uniforme pour les séries de fonctions (clause (2.4) dans l'énoncé de la proposition 2.2), alors la somme*

$$S\ :\ t \in \mathcal{D} \to \sum_{k=n_0}^{\infty} f_n(t)$$

  est aussi une fonction continue sur $\mathcal{D}$;
- *enfin, si la série $[f_n]_{n\geq n_0}$ est normalement convergente sur $\mathcal{D}$, la somme*

$$S\ :\ t \in \mathcal{D} \to \sum_{k=n_0}^{\infty} f_n(t)$$

  est encore une fonction continue sur $\mathcal{D}$.

Remarque 2.4. C'est surtout le troisième item de ce corollaire qui est le plus fréquemment utilisé sous la forme : *la somme d'une série de fonctions continues normalement convergente sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ est encore une fonction continue sur ce sous-ensemble*, étant entendu que la continuité est une propriété locale et qu'il suffit donc de vérifier la convergence normale, pour chaque point t_0 de $\mathcal{D}$, dans un sous-ensemble du type $\mathcal{D}\cap\{t \in \mathbb{C}\,;\, |t-t_0| \leq \eta_0(t_0)\}$, avec $\eta_0(t_0) > 0$.

En ce qui concerne le cran suivant de régularité (à savoir la dérivabilité) pour les fonctions définies cette fois sur un intervalle de $\mathbb{R}$, elle ne se propage en général pas par convergence uniforme (au contraire de la continuité).

Exemples 2.6. Voici quelques exemples significatifs de suites de fonctions où l'on voit manifestement que la dérivabilité ne se propage pas par convergence uniforme :

– la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$, où

$$f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nt)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ car $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(t)| = 1/\sqrt{n}$; par contre

$$f_n'(t) = \sqrt{n} \cos(nt)$$

et l'on voit que la suite $(f_n'(t))_{n\geq 1}$ ne converge en fait en aucun point $t = t_0$ de l'axe réel : pour le voir, on distinguera le cas où $t_0/\pi \in \mathbb{Q}$ et $t_0/\pi \notin \mathbb{Q}$; dans le premier cas la suite $(\cos(nt_0))_{n\geq 1}$ prend une infinité de fois un nombre fini de valeurs dont une non nulle, dans le second cas l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(nt_0))_{n\geq 1}$ est $[-1,1]$;

– la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) := \int_0^t \max\Big(0, 1 - n|t|\Big)\, dt$$

est une suite de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ puisque f_n est une primitive de la fonction continue

$$t \in \mathbb{R} \to \max\Big(0, 1 - n|t|\Big) \ ;$$

cette fois la suite $(f_n')_{n\geq 1}$ converge vers la fonction g définie par

$$g(t) \ := \begin{cases} 1 \text{ si } t = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(voir l'exemple 2.5) ; on a pourtant

$$\left| \int_0^t \max\Big(0, 1 - n|t|\Big)\, dt \right| \leq \int_{-1}^1 \max\Big(0, 1 - |n|t\Big)\, dt = \frac{1}{n}\,,$$

ce qui implique que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle ; mais la suite $(f_n')_{n\geq 1}$ (qui converge, elle, simplement) ne converge pas vers la dérivée de la fonction nulle (c'est-à-dire la fonction nulle elle-même) !

– il existe des séries de fonctions intéressantes car elles introduisent des structures *fractales* ; tel est le cas par exemple des séries de fonctions $[f_n]_{n\geq 0}$ (de Weierstrass) ou $[g_n]_{n\geq 1}$ (de Riemann) sur $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{\cos((1+2\epsilon)^n t)}{(1+\epsilon)^n}\,, \qquad \epsilon > 0 \\ g_n(t) &= \frac{\sin(2\pi n^2 t)}{n^2} \ ; \end{aligned}$$

ces deux séries de fonctions sont des séries de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui convergent (on le vérifie immédiatement) normalement sur $\mathbb{R}$; les deux fonctions

$$\begin{aligned} S \ : \ t \to \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((1+2\epsilon)^k t)}{(1+\epsilon)^k} \\ \widetilde{S} \ : \ t \to \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k^2 t)}{k^2} \end{aligned}$$

sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (d'après le corollaire 2.1) ; sur la figure 2.2, on a par exemple représenté le graphe de la fonction $\widetilde{S}$ sur $[0,1]$; il s'agit d'une fonction continue certes, mais présentant des irrégularités en tout point (le graphe, si on l'examinait à la loupe, se présenterait comme un cactus hérissé partout de piquants, figure se reproduisant à l'infini au fur et à mesure qu'on augmente le grossissement de la loupe) ; une telle structure est une structure *fractale* : la fonction $\widetilde{S}$ est continue, 1-périodique, mais dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$! Le flocon de neige est un exemple concret de structure fractale dans la nature, le découpage de côtes volcaniques telle celle du Gröendland aussi... La même remarque vaudrait pour le graphe de la somme des séries de Weierstrass du type $[f_n]_{n\geq 0}$ que l'on pourra en exercice avec une calculette s'entraîner à tracer pour des choix particuliers de ϵ.

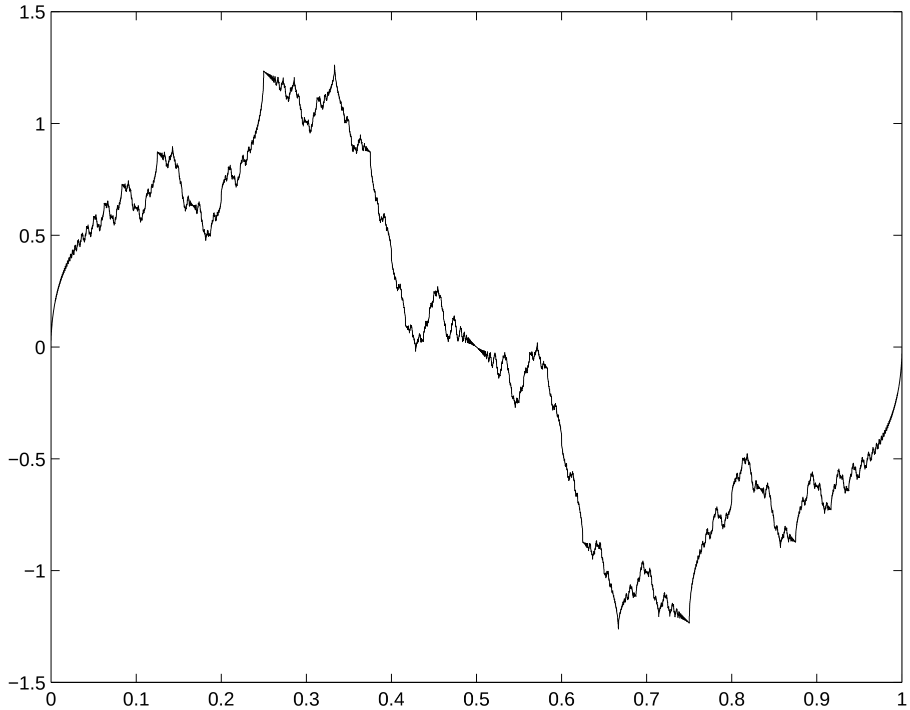

FIG. 2.2 – Le graphe de la fonction de Riemann

Cependant, voici un résultat positif concernant la propagation à la limite de la dérivabilité d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$:

Théorème 2.3 *Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, toutes de classe C^1 sur I (dire qu'une fonction à valeurs complexes est de classe C^1 sur I signifie que sa partie réelle et sa partie imaginaires sont des fonctions dérivables, et de dérivées continue, sur I). On suppose deux choses :*

- **1.** *que la suite des dérivées $(f_n')_{n\geq n_0}$ converge simplement sur I vers une fonction g et que la convergence est uniforme sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans l'intervalle I ;*
- **2.** *qu'il existe un point $t_0 \in I$ tel que la suite numérique $(f_n(t_0))_{n\geq n_0}$ converge.*

Alors la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge (uniformément sur tout segment $[\alpha,\beta]$ de I) vers une fonction f, de classe C^1 sur I, et telle que $f' = g$ sur I.

Preuve. On peut bien sûr supposer que les fonctions f_n, $n \geq n_0$, sont toutes à valeurs réelles (on raisonne ensuite avec les deux suites $(\mathrm{Re}\, f_n)_{n\geq n_0}$ et $(\mathrm{Im}\, f_n)_{n\geq n_0}$ qui satisfont toutes les deux les conditions du théorème). Remarquons d'abord que le théorème 2.2 implique que la fonction g, qui est sur tout $[\alpha,\beta] \subset I$ limite uniforme de la suite $(f_n')_{n\geq n_0}$ formée de fonctions continues, est aussi continue sur I. On remarque ensuite simplement que, puisque f_n est une primitive de la fonction continue f_n', alors, pour tout $t \in I$,

$$f_n(t) - f_n(t_0) = \int_{t_0}^{t} f_n'(s)ds = \int_{t_0}^{t} (f_n'(s) - g(s))ds + \int_{t_0}^{t} g(s)ds\,. \qquad (2.6)$$

Mais l'on sait que

$$\left| \int_{t_0}^{t} (f_n'(s) - g(s))\, ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} |f_n'(s) - g(s)| ds \leq |t - t_0| \sup_{s \in [t_0, t]} |f_n'(s) - g(s)|$$

(car les fonctions $s \to |f_n'(s) - g(s)| \pm (f_n'(s) - g(s))$ sont continues positives sur $[t_0, t]$ et que l'intégrale d'une fonction continue positive est positive). Mais l'hypothèse **1** implique la convergence uniforme de g_n' vers g sur $[t_0, t]$, et l'on a donc

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int_{t_0}^{t} (f_n'(s) - g(s))\, ds \right| \leq \lim_{n \to \infty} \sup_{s \in [t_0, t]} |f_n'(s) - g(s)| = 0\,.$$

Comme d'après l'hypothèse **2** la suite $(f_n(t_0))_{n \geq n_0}$ converge vers une limite l, on a, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (2.6),

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = l + \int_{t_0}^{t} g(s) ds\,,$$

la convergence étant d'ailleurs uniforme sur tout intervalle $[\alpha, \beta]$ inclus dans I. La fonction

$$f \ : t \in I \to l + \int_{t_0}^{t} g(s) ds$$

est bien une primitive de g sur I et le théorème est ainsi démontré. $\diamondsuit$

Concernant les séries de fonctions, on peut énoncer l'important théorème suivant bien utile :

Théorème 2.4 *Soit $[f_n]_{n \geq n_0}$ une série de fonctions définies sur un <u>intervalle</u> ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, <u>toutes de classe C^1 sur I</u>. On suppose deux choses concernant la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ des sommes partielles :*

- **1.** *que la suite $(S_n')_{n \geq n_0}$ des <u>dérivées</u> de ces sommes partielles S_n converge simplement sur I vers une fonction G et que la convergence est <u>uniforme</u> sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans l'intervalle I ;*
- **2.** *qu'il existe un point $t_0 \in I$ tel que la suite numérique $(S_n(t_0))_{n \geq n_0}$ converge.*

Alors la série de fonctions $[f_n]_{n \geq n_0}$ est convergente sur I (uniformément sur tout segment $[\alpha, \beta]$ de I) et la somme de cette série est une fonction de classe C^1 sur I, se pliant à la règle de <u>dérivation terme à terme</u> :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k(t) \right) = \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k'(t) = G(t). \tag{2.7}$$

Un cas <u>très important</u> où ce théorème s'applique mérite à lui seul un énoncé à part :

Théorème 2.5 *Soit $[f_n]_{n \geq n_0}$ une série de fonctions définies sur un <u>intervalle</u> ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, <u>toutes de classe C^1 sur I</u>. On suppose deux choses :*

- **1.** *que la série des <u>dérivées</u> $[f_n']_{n \geq n_0}$ converge <u>normalement</u> sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans l'intervalle I ;*
- **2.** *qu'il existe un point $t_0 \in I$ tel que la suite $(S_n(t_0))_{n \geq n_0}$ des sommes partielles de la série numérique $[f_n(t_0)]_{n \geq n_0}$ converge.*

Alors la série de fonctions $[f_n]_{n\geq n_0}$ est convergente sur I (uniformément sur tout segment $[\alpha,\beta]$ de I) et la somme de cette série est une fonction de classe C^1 sur I, se pliant encore à la règle de dérivation terme à terme :

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k(t)\Big) = \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k'(t)\,.$$

Exemple 2.7.

– Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres complexes telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ \exists C_n>0 \text{ telle que } \forall k\in\mathbb{N}\,,\ |a_k|+|b_k|\leq \frac{C_n}{(1+k)^n}\,;$$

alors la fonction

$$\theta\in\mathbb{R}\to\sum_{k=0}^{\infty}\Big(a_k\cos(k\theta)+b_k\sin(k\theta)\Big)$$

(cette série est bien convergente car absolument convergente pour toute valeur de θ) est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $2p$-ième la fonction

$$\theta\in\mathbb{R}\to(-1)^p\sum_{k=0}^{\infty}k^{2p}(a_k\cos(k\theta)+b_k\sin(k\theta))$$

et de dérivée $2p+1$-ième la fonction

$$\theta\in\mathbb{R}\to(-1)^p\sum_{k=0}^{n}k^{2p+1}\Big(b_k\cos(k\theta)-a_k\sin(k\theta)\Big)\,;$$

– la fonction ζ de Riemann

$$t>1\to\zeta(t):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^t}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-t\log k}$$

est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, de dérivée

$$t\to-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{k^t}$$

puisque, si $[\alpha,\beta]\subset]1,+\infty[$,

$$\max_{t\in[\alpha,\beta]}\Big|\frac{\log k}{k^t}\Big|\leq\frac{\log k}{k^\alpha}$$

et que $[\log k/k^\alpha]_{k\geq 1}$ est une série convergente.

2.2 Suites de fonctions et intégration

2.2.1 Intégration discrète

Une suite numérique $(u_k)_{k\geq k_0}$ peut être considérée comme une fonction de l'ensemble $\mathcal{D}:=\{k_0,k_0+1,...\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$; si la série $[u_k]_{k\geq k_0}$ est convergente, la somme

$$S:=\sum_{k=k_0}^{\infty}u_k$$

(qui correspond au calcul du bilan capitalisé de la suite $(u_k)_{k\geq k_0}$) peut être assimilée à l'intégrale (au sens de l'intégration discrète sur $\{k_0,k_0+1,...\}$) de la fonction

$$u\ :k\to u_k\,.$$

Plutôt que de se donner juste une fonction u sur $\{k_0, k_0+1, ...\}$, on peut se donner une suite de fonctions $(u^{(n)})_{n\geq n_0}$ sur cet ensemble ; chaque $u^{(n)}$ correspond donc à une suite $(u_k^{(n)})_{k\geq k_0}$; si l'on suppose que chaque série $[u_k^{(n)}]_{k\geq k_0}$ est une série convergente et que la suite $(u^{(n)})_{n\geq n_0}$ converge simplement sur $\{k_0, k_0+1, ...\}$ vers une fonction $u\ : \{k_0, k_0+1, ...\} \to \mathbb{C}$, on peut naturellement se poser deux questions (liées) :

- la série "limite" $[u_k]_{k\geq k_0}$ est-elle convergente ?
- si oui, a-t'on la formule

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k^{(n)}\right) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \lim_{n\to\infty}(u_k^{(n)}) = \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k\ ?$$

Ce délicat problème est un cas particulier du problème *d'interversion de limites* (souvent subtil en général) : peut-on écrire (et sous quelles conditions) :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{K\to\infty}\left(\sum_{k=k_0}^{K} u_k^{(n)}\right)\right] = \lim_{K\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=k_0}^{K} u_k^{(n)}\right)\right]\ ?$$

On voit bien, les choses étant écrites ainsi, à quelle interversion de limite on fait allusion. Pour répondre à ces questions, voici au moins un résultat positif bien utile ; on y voit apparaître dans les hypothèses une clause qui n'est pas sans rappeler la clause de "domination" (2.5) inhérente à la définition de la convergence normale.

Théorème 2.6 *Soit $(u_k^{(n)})_{k\geq k_0\,, n\geq n_0}$ un tableau d'entrées complexes $u_k^{(n)}$ (on peut par exemple considérer k comme un indice de ligne, n comme un indice de colonne). On suppose deux choses :*

- **1.** *que la suite de fonctions $(u^{(n)})_{n\geq n_0}$ sur $\{k_0, k_0+1, ...\}$ définies par :*

$$u^{(n)}\ :\ k \to u_k^{(n)}$$

  converge simplement sur $\{k_0, k_0+1, ...\}$ vers la fonction

$$u\ : k \to u_k = \lim_{n\to\infty} u_k^{(n)}\,;$$

- **2.** *qu'il existe une série $[w_k]_{k\geq k_0}$ à termes positifs, convergente, et telle que*

$$\forall k \geq k_0\,,\ \forall n \geq n_0\,,\ |u_k^{(n)}| \leq w_k\,. \tag{2.8}$$

Alors, toutes les séries numériques $[u_k^{(n)}]_{k\geq k_0}$ pour $n \geq n_0$, ainsi que la série $[u_k]_{k\geq k_0}$, sont absolument convergentes, donc convergentes et l'on a la formule autorisant l'interversion de limites :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k^{(n)}\right) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \lim_{n\to\infty}(u_k^{(n)}) = \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k\,. \tag{2.9}$$

Remarque 2.5. Dans cet énoncé on peut remplacer les nombres complexes $u_k^{(n)}$, $k \geq k_0$, $n \geq n_0$, par des fonctions $f_k^{(n)}$ à valeurs complexes, toutes définies sur un même sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; les deux hypothèses à faire sont alors :

- **1'.** que, pour chaque $k \in \{k_0, k_0+1, ...\}$, la suite de fonctions $(f_k^{(n)})_{n\geq n_0}$ converge simplement sur $\mathcal{D}$ vers une fonction f_k de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$;
- **2'.** qu'il existe une série $[w_k]_{k\geq k_0}$ à termes positifs, convergente, et telle que

$$\forall k \geq k_0\,,\ \forall t \in \mathcal{D}\,,\ \forall n \geq n_0\,,\ |f_k^{(n)}(t)| \leq w_k\,.$$

La conclusion est qu'alors les séries de fonctions $[f_k^{(n)}]_{k\geq k_0}$ pour $n \geq n_0$, ainsi que $[f_k]_{k\geq k_0}$ sont toutes normalement convergentes sur $\mathcal{D}$ et qu'on a la formule d'interversion de limites :

$$\forall t \in \mathcal{D}\,, \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k^{(n)}(t)\right) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \lim_{n\to\infty}(f_k^{(n)}(t)) = \sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(t)\,. \tag{2.10}$$

Preuve. La convergence absolue des séries $[u_k^{(n)}]_{k\geq k_0}$ pour $n \geq n_0$ résulte des estimations (2.8) et de la convergence de la série à termes positifs $(w_k)_{k\geq k_0}$ (voir le théorème 1.2 du chapitre 1) ; comme on a aussi, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini :

$$\forall k \geq k_0\,,\ |u_k| \leq w_k\,,$$

on a aussi absolue convergence de la série $[u_k]_{k\geq k_0}$. On écrit, en exploitant à la fois l'inégalité triangulaire et l'hypothèse **2.** :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k^{(n)} - \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k\right| &= \left|\sum_{k=k_0}^{K}(u_k^{(n)} - u_k) + \sum_{k=K+1}^{\infty}(u_k^{(n)} - u_k)\right| \\
&\leq \sum_{k=k_0}^{K}|u_k^{(n)} - u_k| + \sum_{k=K+1}^{\infty}(|u_k^{(n)}| + |u_k|) \\
&\leq \sum_{k=k_0}^{K}|u_k^{(n)} - u_k| + 2\sum_{k=K+1}^{\infty} w_k\,;
\end{aligned}$$

si $\epsilon > 0$ et si K est choisi assez grand ($K = K(\epsilon)$), on a donc (puisque la série $[w_k]_{k\geq k_0}$ est convergente)

$$\left|\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k^{(n)} - \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=k_0}^{K(\epsilon)}|u_k^{(n)} - u_k| + \epsilon/2\ ;$$

ce choix de $K = K(\epsilon)$ étant "gelé", on voit, en utilisant cette fois l'hypothèse **1.**, qu'il existe $N(\epsilon)$ tel que

$$n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow \sum_{k=k_0}^{K}|u_k^{(n)} - u_k| \leq \epsilon/2\,;$$

ainsi, si $n \geq N(\epsilon)$, a-t'on

$$\left|\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k^{(n)} - \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k\right| \leq \epsilon\,;$$

comme $\epsilon > 0$ était arbitraire, le résultat voulu en résulte. $\diamondsuit$

Exemples 2.8.

- Par exemple, puisque la série $[1/k^2]_{k\geq 1}$ est une série de Riemann convergente, le théorème 2.6 ci dessus assure
$$\lim_{t\to 0}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+t^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,;$$
- en revanche, si
$$\forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2\,,\ u_k^{(n)} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = k \\ 0 \text{ sinon}\,. \end{cases}$$
on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\lim_{n\to\infty} u_k^{(n)} = 0\,;$$

pourtant, lorsque n est fixé :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(n)} = 1\ ;$$

on voit ici que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(n)} \Big) = 1 \neq \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_k^{(n)} = 0\,;$$

dans ce second exemple, la clause (2.8) n'est en fait pas remplie, ce qui explique que la formule d'interversion de limites coince ici !

2.2.2 Intégration continue

Le premier résultat majeur concernant le couplage entre la prise de limite de suites de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et l'intégration de ces fonctions sur $[a,b]$ est le résultat suivant, que nous avons d'ailleurs déjà exploité en prouvant le théorème 2.3 concernant la propagation à la limite de la propriété de dérivabilité. C'est le résultat suivant :

Théorème 2.7 *Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction continue f ; alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt\,. \tag{2.11}$$

Preuve. On se ramène au cas où les fonctions f_n, $n \geq n_0$, sont toutes à valeurs réelles, et on utilise le fait que l'intégrale d'une fonction continue positive (ici la fonction $|f-f_n| \pm (f-f_n)$) est positive pour affirmer que

$$\left| \int_a^b (f(t)-f_n(t))dt \right| \leq \int_a^b |f(t)-f_n(t)|\, dt \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-f_n(t)|$$

et conclure du fait de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq n_0}$ vers f. $\diamondsuit$

Remarque 2.6. Le résultat est faux si l'on a seulement convergence simple ; par exemple, soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions sur $[0,1]$ définies ainsi :

$$f_n(t) \ := \begin{cases} n^2 t \text{ si } t \in [0, 1/(2n)] \\ n - n^2 t \text{ si } t \in [1/(2n), 1/n] \\ 0 \text{ si } t \in [1/n, 1]\ ; \end{cases}$$

on pourra tracer le graphe de cette fonction et examiner comment ce graphe évolue lorsque n tend vers l'infini : ce graphe se présente comme un triangle isocèle T_n de base $[(0,0),(1/n,0)]$ et de sommet le point $(1/(2n), n/2)$; la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0 mais

$$\int_0^1 f_n(t)dt = \text{surface du triangle } \mathrm{T_n} = 1/4\,;$$

on a donc ici

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{4} \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} (f_n(t))\, dt = 0\,;$$

c'est bien sûr la convergence uniforme qui ici se trouve être en défaut !

Remarque 2.7. L'hypothèse de convergence uniforme nécessaire pour le théorème 2.7 est évidemment trop contraignante pour des problèmes d'interversion intégrale/passage à limite comme on en rencontre en physique. Il existe des résultats où l'on peut affaiblir cette hypothèse : si par exemple la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction f sur $[a,b]$ et s'il existe une constante M telle que $|f_n(t)| \leq M$ sur $[a,b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (les fonctions f_n, $n \geq 0$ sont dominées uniformément par M en module sur $[a,b]$), alors la conclusion

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt$$

est encore valide. Mais ce résultat est beaucoup plus difficile et il appaîtra au terme de la construction de l'intégration au sens de Lebesgue (quand bien même il ne s'agit que de l'intégration des fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a,b]$). Ce résultat sort bien sûr du cadre de ce cours !

Le théorème 2.7 suggère les prémices d'une théorie élémentaire, mais néanmoins intéressante, de l'intégration, celle des *fonctions réglées*; précisons ce concept ici dans la définition suivante :

Définition 2.4 *Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$; une fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ est dite en escalier si et seulement si il existe une subdivision*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$$

telle que f soit constante sur chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$, $i = 0, ..., N-1$; une fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ est dite réglée si et seulement si elle est limite uniforme, sur $[a,b]$, d'une suite de fonctions en escalier.

Il est naturel de définir l'intégrale d'une fonction en escalier en considérant le graphe d'une telle fonction comme un histogramme, comme sur la figure 2.3 ci-dessous ; si f est une fonction en escalier, dont la donnée est subordonnée à une subdivision

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$$

telle que f vaille c_i sur l'intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$, $i = 0, ..., N-1$, l'intégrale de f sur $[a,b]$ sera par définition :

$$I_{[a,b]}(f) = \int_a^b f(t)dt := \sum_{i=0}^{N-1} (a_{i+1} - a_i)\, c_i \in \mathbb{C}\,.$$

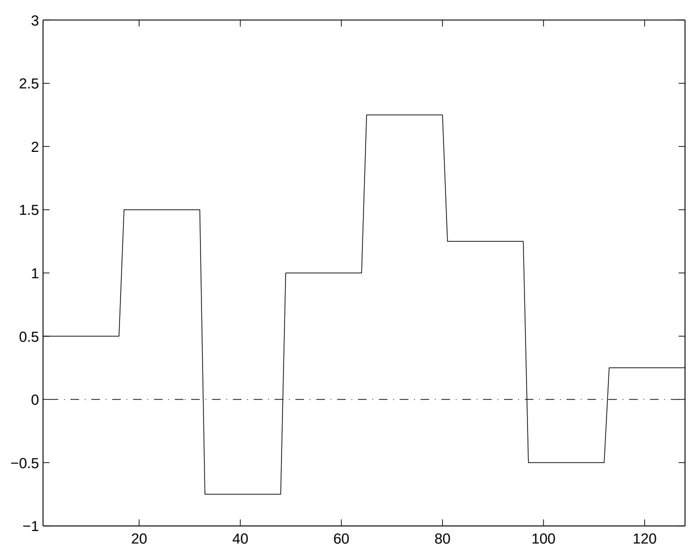

FIG. 2.3 – Une fonction en escalier

On vérifie tout de suite que, si $\mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs complexes,

$$f \to I_{[a,b]}(f)$$

est une forme linéaire sur $\mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{C})$, positive (au sens où, pour toute fonction $f \in \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{C})$ prenant sur les intervalles ouverts de la subdivision des valeurs c_i réelles positives, on a $I_{[a,b]}(f) \geq 0$). De plus, on a, de par l'inégalité triangulaire et la positivité :

$$\forall f \in \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{C})\,,\ |I_{[a,b]}(f)| \leq I_{[a,b]}(|f|) \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f|\,.$$

Voici maintenant comment on étend naturellement cette construction de l'intégrale au cadre des fonctions réglées (on englobera ainsi, on le verra, le cadre des fonctions continues sur $[a,b]$, cadre pour lequel on disposait déjà d'une notion d'intégrale) : si f est une fonction réglée, on considère une suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ de fonctions en escalier telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-f_n(t)| \leq \epsilon\,;$$

la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ vérifie donc le critère de Cauchy uniforme (2.3) de la proposition 2.2. Comme, pour $p,q\in\mathbb{N}$,

$$|I_{[a,b]}(f_p)-I_{[a,b]}(f_q)| = |I_{[a,b]}(f_p-f_q)| \leq (b-a)\sup_{t\in[a,b]} |f_p(t)-f_q(t)|\,,$$

la suite numérique $(I_{[a,b]}(f_n))_{n\geq n_0}$ est de Cauchy, donc convergente vers une limite l ; si $(\tilde{f}_n)_{n\geq \tilde{n}_0}$ est une autre suite qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$, on voit que

$$\lim_{n\to\infty} I_{[a,b]}(f_n) = \lim_{n\to\infty} I_{[a,b]}(\tilde{f}_n)\,,$$

ce qui prouve que l'on peut sans ambigüité définir $I_{[a,b]}(f)$ en posant

$$I_{[a,b]}(f) = \lim_{n\to\infty} I_{[a,b]}(f_n)\,.$$

Nous avons ainsi prolongé l'intégrale sur $[a,b]$ à l'espace $\mathrm{Regl}([a,b],\mathbb{C})$ des fonctions réglées à valeurs complexes en une forme linéaire, toujours positive (si $f\geq 0$, $I_{[a,b]}(f)\geq 0$) et satisfaisant :

$$\forall f \in \mathrm{Regl}([a,b],\mathbb{C})\,,\ |I_{[a,b]}(f)| \leq I_{[a,b]}(|f|) \leq (b-a)\sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\,.$$

Cette méthode de prolongement d'une application linéaire (ici $I_{[a,b]}$) d'un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel E (ici $\mathrm{Esc}([a,b])$) à un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel plus gros (ici $\mathrm{Regl}([a,b],\mathbb{C})$), mais dont les éléments peuvent "s'approcher" par des éléments de E, est en fait classique ; l'intégration sur $[a,b]$ étant par elle-même une forme linéaire essentielle, elle méritait ici de servir d'illustration à cette démarche.

Concernant l'espace $\mathrm{Regl}([a,b],\mathbb{C})$, nous avons la propriété suivante, qui prouve qu'il contient certainement :

- les fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$;
- les fonctions monotones de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$;

– toute combinaison linéaire à coefficients complexes de deux fonctions prises dans l'une des classes ci-dessus.

En effet, on a la :

Proposition 2.3 *Toute fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ ayant une limite à gauche et à droite en tout point est réglée. La réciproque est également vraie : toute fonction réglée de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ a une limite à gauche et à droite en tout point de $[a,b]$.*

• Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ ayant une limite à gauche et à droite en tout point. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; pour chaque $t_0 \in [a,b]$, on introduit $\alpha_n^-(t_0) < t_0$ et $\alpha_n^+(t_0) > t_0$ tels que :

$$\forall t \in [a,b] \cap]\alpha_n^-(t_0), t_0[\,,\ |f(t) - f(t_0^-)| \leq \frac{1}{n}$$

et

$$\forall t \in [a,b] \cap]t_0, \alpha_n^+(t_0)[\,,\ |f(t) - f(t_0^+)| \leq \frac{1}{n}$$

(on note $f(t_0^-)$ et $f(t_0^+)$ les limites respectives de f en t_0 à gauche et à droite) ; on a donc

$$[a,b] = \bigcup_{t_0 \in [a,b]} \Big([a,b] \cap]\alpha_n^-(t_0), \alpha_n^+(t_0)[\Big) \ ;$$

de ce recouvrement de $[a,b]$ par des ouverts du type $[a,b] \cap I$, où I est un intervalle ouvert, on sait extraire (puisque $[a,b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$) un sous-recouvrement fini ; les extrémités des intervalles I de ce recouvrement (si elles sont dans $]a,b[$) déterminent (si l'on y ajoute les extrémités a et b) une subdivision

$$a_0 = a < a_{n,1} < \cdots < a_{n,N_n} = b$$

de $[a,b]$; la fonction en escalier f_n définie par :

$$f_n(a_{n,i}) = f(a_{n,i})\,,\ i = 0, ..., N_n$$

et

$$f_n(t) = \frac{f(a_{n,i}) + f(a_{n,i+1})}{2}\,,\ i = 0, ..., N_n - 1,\ \forall\, t \in]a_{n,i}, a_{n,i+1}[$$

est telle que

$$\sup_{t \in [a,b]} |f(t) - f_n(t)| \leq \frac{1}{n}\,,$$

ce qui prouve que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, donc que la fonction f est bien réglée.

• Soit maintenant f une fonction réglée de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions en escalier telle que

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f(t)| = 0\,.$$

En un point donné t_0 de $[a,b]$, chaque fonction f_n, $n \geq 0$, a une limite à gauche et à droite ; appelons ces limites $f_n(t_0^-)$ et $f_n(t_0^+)$; puisque la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme (2.3), il existe, pour tout $\epsilon > 0$, une constante $N(\epsilon)$ telle que, si $p, q \geq N(\epsilon)$, on ait :

$$\forall t \in [a,b]\,,\ |f_p(t) - f_q(t)| \leq \epsilon/3\,; \qquad (2.12)$$

on a en particulier, en gelant $p = N(\epsilon)$ et en faisant tendre q vers $+\infty$:

$$\forall t \in [a,b]\,,\ |f_{N(\epsilon)}(t) - f(t)| \leq \epsilon/3\,;$$

en reprenant (2.12), mais en faisant tendre t vers t_0 soit à gauche, soit à droite, on a aussi, toujours pour $p, q \geq N(\epsilon)$,

$$\forall t \in [a,b]\,,\ \max(|f_p(t_0^-) - f_q(t_0^-)|, |f_p(t_0^+) - f_q(t_0^+)|) \leq \epsilon/3\,; \tag{2.13}$$

les deux suites $(f_n(t_0^-))_{n\geq 0}$ et $(f_n(t_0^+))_{n\geq 0}$ sont donc des suites de Cauchy, donc toutes les deux convergentes vers des limites respectives $l^-(t_0)$ et $l^+(t_0)$. En passant à la limite lorsque $p = N(\epsilon)$ et $q \to \infty$ dans (2.13), on a

$$\forall t \in [a,b]\,,\ \max(|f_{N(\epsilon)}(t_0^-) - l^-(t_0)|, |f_{N(\epsilon)}(t_0^+) - l^+(t_0)|) \leq \epsilon/3.$$

On a donc, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\begin{array}{rcl}
\forall t > t_0\,,\ |f(t) - l^+(t_0)| & \leq & |f(t) - f_{N(\epsilon)}(t)| + |f_{N(\epsilon)}(t) - f_{N(\epsilon)}(t_0^+)| \\
& & +|f_{N(\epsilon)}(t_0^+) - l^+(t_0)| \\
& \leq & \dfrac{\epsilon}{3} + |f_{N(\epsilon)}(t) - f_{N(\epsilon)}(t_0^+)| + \dfrac{\epsilon}{3} \\
\forall t < t_0\,,\ |f(t) - l^-(t_0)| & \leq & |f(t) - f_{N(\epsilon)}(t)| + |f_{N(\epsilon)}(t) - f_{N(\epsilon)}(t_0^-)| \\
& & +|f_{N(\epsilon)}(t_0^-) - l^-(t_0)| \\
& \leq & \dfrac{\epsilon}{3} + |f_{N(\epsilon)}(t) - f_{N(\epsilon)}(t_0^-)| + \dfrac{\epsilon}{3}\,;
\end{array}$$

mais nous savons qu'il existe $\eta(\epsilon) > 0$ tel que :

$$\begin{array}{rcl}
t_0 < t < t + \eta(\epsilon) & \Longrightarrow & |f_{N(\epsilon)}(t) - f_{N(\epsilon)}(t_0^+)| \leq \epsilon/3 \\
t_0 - \eta(\epsilon) < t < t_0 & \Longrightarrow & |f_{N(\epsilon)}(t) - f_{N(\epsilon)}(t_0^-)| \leq \epsilon/3\,.
\end{array}$$

En conclusion, on montre ainsi

$$\begin{array}{rcl}
\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}} f(t) & = & l^+(t_0) \\
\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} f(t) & = & l^-(t_0)\,,
\end{array}$$

ce qui montre que f a une limite à gauche et à droite au point t_0 et achève ainsi la preuve de la proposition. $\diamondsuit$

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\eta_n > 0$ tel que

$$\forall t_1, t_2 \in [a,b]\,,\quad |t_1 - t_2| \leq \eta_n \Longrightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \leq \frac{1}{n}\,;$$

on peut donc construire une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ en escalier telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| = 0$$

en posant :

$$\forall k \in \{0,...,n-1\}\,,\qquad \forall t \in \Big[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\Big[\,, f_n(t) = f(t_{n,k})\,,$$
$$\text{avec } t_{n,k} \in \Big[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\Big[$$

(on peut en particulier prendre $t_{n,k} = a + k\frac{b-a}{n}$, $k = 0, ..., n-1$). On a donc ainsi le résultat suivant, qui est un cas particulier du <u>*théorème de Darboux*</u> :

Théorème 2.8 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$, soit $t_{n,k}$ un point de $[a + k(b-a)/n, a + (k+1)(b-a)/n[$; alors, pour toute fonction f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, on a*

$$I_{[a,b]}(f) = \int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_{n,k})\,; \tag{2.14}$$

une expression du type

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_{n,k})$$

est dite <u>somme de Darboux</u> de f (assujettie à la partition

$$a < a + \frac{b-a}{n} < \cdots < a + \frac{(n-1)(b-a)}{n} < b$$

de $[a, b]$).

Remarques 2.8. Si $t_{n,k} = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $k = 0, ..., n-1$, l'expression

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_{n,k})$$

est dite <u>*somme de Riemann*</u> de f sur $[a, b]$. Si $(f_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ et uniformément convergente sur $[a, b]$ vers une fonction f, la formule

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt$$

est, elle aussi, comme toutes les formules clef de cette section, une formule d'interversion de limites, à savoir :

$$\lim_{n\to\infty} \left[\lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_n(t_{N,k}) \right] = \lim_{N\to\infty} \left[\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_n(t_{N,k}) \right].$$

Exemple 2.9. Le théorème de Darboux s'avère souvent intéresant pour calculer le comportement d'expressions se présentant sous forme de sommes

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^{(n)}$$

lorsque n tend vers l'infini ; en voici un exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \times \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} \right];$$

mais

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{Arctg}\,(1) = \frac{\pi}{4}\,; \end{aligned}$$

on a donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \sim \frac{\pi}{4n}$$

lorsque n tend vers l'infini.

On est amené à envisager l'intégration des fonctions réglées sur un intervalle semi-ouvert $[a,b[$ ou $]\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$ tel que $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a,+\infty[\cup \{+\infty\}$, ou bien $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]-\infty,\beta[\cup \{-\infty\}$.

Définition 2.5 *Soit f une fonction de $[a,b[$ dans $\mathbb{C}$ (resp. de $]\alpha,\beta]$ dans $\mathbb{C}$) ayant une limite à gauche et une limite à droite en tout point de l'intervalle $[a,b[$ (resp. $]\alpha,\beta]$). On dit que la fonction f est semi-intégrable (ou encore intégrable au sens de Riemann) sur $[a,b[$ (resp. sur $]\alpha,\beta]$) si la fonction*

$$x \in [a,b[\to \int_a^x f(t)dt \qquad \Big(resp.\ x \in]\alpha,\beta] \to \int_x^\beta f(t)dt\Big)$$

admet une limite finie l lorsque x tend vers b par valeurs inférieures (resp. lorsque x tend vers α par valeurs supérieures). On note cette limite l l'intégrale généralisée (au sens de Riemann) de la fonction f sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$ (resp. l'intervalle semi-ouvert $]\alpha,\beta]$) et l'on note

$$l = \int_a^b f(t)dt \qquad \Big(resp.\ l = \int_\alpha^\beta f(t)dt\Big).$$

Le pendant continu du théorème 2.6 s'énonce ainsi :

Théorème 2.9 *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert $[a,b[$ (resp. $]\alpha,\beta]$), à valeurs complexes, ayant des limites à gauche et à droite en tout point de cet intervalle, et toutes intégrables au sens de Riemann sur cet intervalle semi-ouvert. On suppose :*

- **1.** *que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $[a,b[$ (resp. sur $]\alpha,\beta]$) vers une fonction f, la convergence étant uniforme sur tout intervalle fermé borné inclus dans $[a,b[$ (resp. dans $]\alpha,\beta]$) ;*
- **2.** *qu'il existe une fonction $g \geq 0$, intégrable au sens de Riemann sur $[a,b[$ (resp. sur $]\alpha,\beta]$) telle que*

$$\forall t \in [a,b[\ \Big(resp.\ \forall t \in]\alpha,\beta]\Big),\ \forall n \geq 0,\ |f_n(t)| \leq g(t).$$

Alors la fonction f est aussi intégrable au sens de Riemann sur $[a,b[$ (resp. sur $]\alpha,\beta]$) et l'on a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt \\ \Big(resp.\ \int_\alpha^\beta f(t)dt &= \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n(t)dt\Big). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Preuve. On fera la preuve dans le cas des suites de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b[$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a,+\infty[\cup \{+\infty\}$.

La fonction f est une limite uniforme de fonctions réglées sur tout intervalle fermé borné inclus dans $[a,b[$ et l'on peut donc affirmer que f a une limite à gauche et à droite en tout point de $[a, b[$, et est donc intégrable sur tout intervalle fermé borné inclus dans $[a, b[$.

Il faut montrer que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b[$. Comme g est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b[$, il existe, pour tout $\epsilon > 0$, un réel $b(\epsilon) < b$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in [b(\epsilon), b[\text{ avec } x_1 \leq x_2 \,, \; \int_{x_1}^{x_2} g(t)dt = \int_a^{x_2} g(t)dt - \int_a^{x_1} g(t)dt \leq \epsilon \,.$$

Comme

$$\forall t \in [a, b[\,, \; \forall n \geq 0 \,, \; |f_n(t)| \leq g(t) \,,$$

on a par passage à la limite simple lorsque n tend vers l'infini

$$\forall t \in [a, b[\,, \; |f(t)| \leq g(t) \,.$$

On a donc (à cause des propriétés de l'intégrale des fonctions réglées sur un intervalle fermé borné)

$$\forall x_1, x_2 \in [b(\epsilon), b[\text{ avec } x_1 \leq x_2 \,, \; \Big| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \Big| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \leq \int_{x_1}^{x_2} g(t)dt \leq \epsilon \,.$$

Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers b par valeurs inférieures, la limite de la suite

$$\left(\int_a^{x_n} f(t)dt \right)_{n \geq 0}$$

existe d'après le critère de Cauchy (et ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$). Ceci montre que la fonction

$$x \longrightarrow \int_a^x f(t)dt$$

admet une limite finie lorsque x tend vers b par valeurs inférieures. La fonction f est donc bien intégrable au sens de Riemann sur $[a, b[$.

Pour conclure à la preuve de la formule d'interversion de limites (2.15), on remarque que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\Big| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \Big| &= \Big| \int_a^{b(\epsilon)} (f(t) - f_n(t))dt + \int_{b(\epsilon)}^b (f_n(t) - f(t))dt \Big| \\
&\leq \int_a^{b(\epsilon)} |f(t) - f_n(t)|dt + 2 \int_{b(\epsilon)}^b g(t)dt \\
&\leq \int_a^{b(\epsilon)} |f(t) - f_n(t)|dt + 2\epsilon \,.
\end{aligned}$$

Si n est assez grand (ce choix dépendant de $b(\epsilon)$, donc de ϵ), il résulte du théorème 2.7 que l'on a

$$\int_a^{b(\epsilon)} |f(t) - f_n(t)|dt \leq \epsilon \,;$$

on peut donc rendre, pourvu que n soit assez grand, la quantité

$$\Big| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \Big|$$

inférieure à 3ϵ. Comme ϵ est arbitraire, le théorème est bien démontré. $\diamondsuit$

Remarque 2.9. En fait, on peut remplacer la clause **2** par la suivante (par exemple dans le cas de suites de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b[)$: pour tout $\epsilon > 0$, il existe $b(\epsilon) \in [a,b[$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in [b(\epsilon), b[\text{ avec } x_1 \leq x_2\,,\ \forall n \geq 0\,,\ \Big|\int_{x_1}^{x_2} f_n(t)dt\Big| \leq \epsilon$$

(attention à la place des quantificateurs!) On dit que la suits $(f_n)_{n\geq 0}$ vérifie le critère intégral de Cauchy uniforme en b (uniforme parce que c'est le même $b(\epsilon)$ qui fonctionne pour tous les f_n, $n \geq 0$).

2.3 Séries entières

2.3.1 Une première approche et plein d'exemples

On appelle <u>*série entière*</u> toute série de fonctions sur $\mathbb{C}$ de la forme $[a_n z^n]_{n\geq 0}$, où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite numérique de nombres complexes. Le qualificatif "entière" trouve son origine dans le fait que les exposants intervenant dans les fonctions monomiales $a_n z^n$, $n \geq 0$, sont des entiers. Une telle série de fonctions peut fort bien présenter des lacunes (on parle alors de <u>*série lacunaire*</u>) lorsque certains coefficients a_n sont nuls : par exemple, la série

$$\Big[\frac{z^{n^2}}{n!}\Big]_{n\geq 0}$$

est une série entière : il suffit de convenir que dans ce cas

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ n'est pas un carré parfait} \\ 1/p! \text{ si } n = p^2\,,\ p \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Les séries entières les plus familières (liées, on le verra, aux fonctions basiques tant de l'analyse que de la combinatoire) sont par exemple :

- les séries entières telles que tous les a_n sont nuls pour n assez grand ; on verra que ces séries entières sont directement liées aux fonctions polynomiales de la variable complexe z ;
- les séries entières correspondant à une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ régie par une équation récurrente à p pas récurrents (p étant un entier positif non nul fixé et $\alpha_1, ..., \alpha_p$ p nombres complexes) :

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \cdots + \alpha_p a_{n-p}\,,\ n \geq n_0 \geq p\ ;$$

  on verra que ces séries entières sont directement liées aux fonctions rationnelles de la variable complexe z ; elles jouent un rôle crucial en combinatoire ou en théorie de l'information discrète (tant par rapport à l'analyse qu'au traitement) ; entrent dans cette classe les séries géométriques $[\alpha^n z^n]_{n\geq 0}$, où α ("<u>*raison*</u>" de la série) est un nombre complexe : la relation récurrente est dans ce cas particulier la relation récurrente à un pas

$$a_n = \alpha a_{n-1}\,, \quad n \geq 1\,;$$

  ces séries entières sont les <u>séries entières géométriques</u> ;

– les séries entières du type $[z^n/n!]_{n\geq 0}$ en relation directe avec la fonction exponentielle complexe ou les fonctions trigonométriques cos, sin, ch , sh ; ces séries appartiennent à la _classe de Siegel_; notons que dans ce type d'exemple, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ se trouve régie par une équation à pas récurrents, mais cette fois du type

$$\alpha_0(n)a_n = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j(n)a_{n-j}\,,\ n \geq n_0 \geq p\,,$$

où cette fois $\alpha_0, ..., \alpha_p$ sont des fonctions polynomiales de l'indice n ; par exemple, dans le cas où $a_n = 1/n!$, on a

$$na_n = a_{n-1}\,, \quad n \geq 1\,;$$

entrent aussi dans cette classe certaines séries entières directement liées, on le verra, à des équations différentielles sans second membre du premier ou second ordre ominiprésentes en physique ou en mécanique : tel est le cas des équations $y' = \lambda y$ (dont on sait que la solution générale est du type $y(t) = \gamma e^{\lambda t}$), des équations $y' = -\omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}$ (dont on sait que la solution générale est du type $y(t) = \gamma_1 \cos(\omega t) + \gamma_2 \sin(\omega t)$), des équations $y(t) = \omega^2 y(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$ (dont on sait que la solution générale est du type $y(t) = \gamma_1 \mathrm{ch}\,(\omega t) + \gamma_2 \mathrm{sh}\,(\omega t)$), ou bien d'équations plus compliquées du type par exemple de _Bessel_ :

$$t^2 y''(t) + ty'(t) + (t^2 - \nu^2)y(t) = 0\,,$$

où ν désigne un paramètre réel ou complexe ;

– les séries entières du type $[z^n/(n+1)]_{n\geq 0}$ en relation, elles, avec la fonction logarithme, prototype d'une autre classe de fonctions (ou plutôt ici de séries entières) tant intéressante du point de vue de la théorie des nombres (notons que dans ces exemples, les a_n sont rationnels) que de l'analyse, la classe des _G-fonctions_;

– les séries entières inspirées de la célèbre formule du binôme

$$(1+z)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-n)!}\, z^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{k!}\, z^k\,,$$

c'est-à-dire les séries du type $[a_{\alpha,n} z^n]_{n\geq 0}$, où α désigne un nombre complexe et

$$a_{\alpha,n} := \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

(notons que si $\alpha = N \in \mathbb{N}^*$, on a $a_{\alpha,n} = 0$ si $n > N$, ce qui nous ramène au premier exemple proposé ici).

2.3.2 Rayon, disque, cercle de convergence

Si $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ est une série entière, on a vu (exemple 2.4 de la section 2.1.4) qu'un nombre (appartenant à $[0, \infty]$) jouait un rôle déterminant ; c'est le nombre

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}\,;$$

en effet, on rappelle ici le résultat déjà acquis dans ce cours :

Théorème 2.10 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière ; cette série converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)}$ avec $r < R$ (attention à l'inégalité stricte !) où*

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \,;$$

de plus la série numérique $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ ne converge pas (son terme général ne tend pas vers 0 !) dès que z est tel que $|z| > R$ (attention encore à l'inégalité stricte !).

Ce résultat fondamental concernant la théorie des séries entières amène aux définitions suivantes :

Définition 2.6 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière ; le nombre*

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \in [0,\infty] \tag{2.16}$$

est appelé (d'ailleurs improprement, on le verra !) rayon de convergence de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$; le disque ouvert $D(0,R) := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < R\}$ est le disque de convergence de cette série ; le cercle "critique" $C(0,R) := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = R\}$ (qui sépare les zones de convergence et de non convergence) est appelé (d'ailleurs improprement, puisque l'on ne peut de fait en général rien décider concernant le comportement asymptotique de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ lorsque $|z| = R$) cercle de convergence de la série entière.

Exemples 2.9.

- la série $[n! z^n]_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence $R = 0$, tandis que la série $[z^n/n!]_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence $+\infty$. Cette seconde série définit donc (par le biais de sa somme) une fonction dans tout le plan complexe, dite *fonction exponentielle* :

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,, \ \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Comme

$$\begin{aligned}\exp(z_1+z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k}\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\,\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\Big)\,,\end{aligned}$$

on voit que $\exp(z_1+z_2)$ est la somme du produit de Cauchy des deux séries absolument convergentes $[z_1^k/k!]_{k\geq 0}$ et $[\frac{z_2^k}{k!}]_{k\geq 0}$. Il résulte de la proposition 1.9 que l'on a, pour tout z_1, z_2 dans $\mathbb{C}$,

$$\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)\,,$$

autrement dit l'exponentielle réalise un homomorphisme de groupe entre $\mathbb{C}$ (muni de l'opération interne d'addition) et $\mathbb{C}^*$ (muni de la multiplication). On verra plus loin que les trois nombres "phares" des mathématiques que sont $e = \exp(1)$, π et $i = \sqrt{-1}$ sont liés par la formule

$$\exp(2i\pi) = e^{2i\pi} = 1\,.$$

- la série géométrique $[\alpha^n z^n]_{n\geq 0}$ de raison $\alpha \in \mathbb{C}^*$ a pour rayon de convergence $1/|\alpha|$; tous les points du cercle de convergence sont des points de non convergence (voir l'exemple 1.1 de ce cours) ; on remarque cependant malgré tout que, dans ce cas particulier, la somme de la série dans son disque de convergence, qui se trouve être ici la fonction

$$z \to \frac{1}{1-\alpha z}\,, \quad |z| < 1/|\alpha|\,,$$

(ceci montre la relation entre séries entières géométriques et fractions rationnelles) se prolonge en une fonction continue à tout le plan complexe privé du point $1/\alpha$, donc en particulier au travers du cercle de convergence qui semblait faire barrage à la convergence de la série, ce qui peut ici sembler paradoxal, mais de fait ne l'est pas car il convient de distinguer comportement de la série et comportement de la <u>somme</u> de la série lorsque cette somme existe ;

- la série $[z^n/(n+1)]_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence $R = 1$; le point $z = 1$ du cercle de convergence est un point de divergence, mais le point $z = -1$ se trouve, lui, être un point de convergence (d'après le critère des séries alternées) ;
- plus généralement si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes, tous réels positifs au dela d'un certain seuil, tels que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ tende vers 0 en décroissant, le rayon de convergence de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ vaut 1 et tous les points du cercle de convergence, sauf le point $z = 1$, sont des points de convergence (en vertu du critère d'Abel numérique) ; tel est le cas des séries entières du type Riemann $[z^n/n^x]_{n\geq 1}$, où $x > 0$;
- le rayon de convergence de la série lacunaire $[z^{n^2}/n!]_{n\geq 0}$ vaut 1 ; il se trouve qu'il existe des séries lacunaires de rayon de convergence strictement positif pour lesquels <u>tous</u> les points du cercle de convergence sont des points au voisinage desqules il est impossible de prolonger la somme de la série entière au delà du cercle de convergence ; pour de telles séries entières, ce cercle de convergence joue bien le rôle attendu de "barrage", au contraire de ce qui se passe pour les séries géométriques $[\alpha^n z^n]_{n\geq 0}$ de notre second exemple.

2.3.3 Série dérivée, série primitive

Si $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ est une série entière, de rayon de convergence R, la série entière

$$\Big[(n+1)a_{n+1}z^n\Big]_{n\geq 0}$$

a même rayon de convergence que la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$; en effet, le rayon de convergence de la série

$$\Big[(n+1)a_{n+1}z^n\Big]_{n\geq 0}$$

est le même que celui de la série $[na_n z^n]_{n\geq 0}$; or

$$\limsup_{n\to\infty}\Big[n^{1/n}|a_n|^{1/n}\Big] = \limsup_{n\to\infty}\Big[e^{\frac{\log n}{n}}|a_n|^{1/n}\Big] = \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = 1/R\,.$$

De même, la série entière

$$\Big[\frac{a_{n-1}z^n}{n}\Big]_{n\geq 1}$$

a même rayon de convergence que la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$; en effet, le rayon de convergence de cette nouvelle série est celui de la série

$$\Big[\frac{a_n}{n+1}z^n\Big]_{n\geq 0}$$

et l'on a encore

$$\limsup_{n\to\infty}\Big[(n+1)^{-1/n}|a_n|^{1/n}\Big] = \limsup_{n\to\infty}\Big[e^{\frac{-\log(n+1)}{n}}|a_n|^{1/n}\Big] = \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = 1/R\,.$$

Ces deux remarques cruciales nous conduisent aux définitions suivantes :

Définition 2.7 *Soit* $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ *une série entière ; on appelle* *<u>série entière dérivée</u>* *de la série* $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ *la série entière*

$$\Big[(n+1)a_{n+1}z^n\Big]_{n\geq 0}\ ; \tag{2.17}$$

on appelle *<u>série entière primitive</u>* *de la série* $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ *la série entière*

$$\Big[\frac{a_{n-1}z^n}{n}\Big]_{n\geq 1}\ ; \tag{2.18}$$

série dérivée et série primitive ont même rayon de convergence que la série entière dont elles sont issues.

Exemples 2.10. La série dérivée de la série $[z^n/n]_{n\geq 1}$ ($a_0 = 0$ et $a_n = 1/n$ pour $n \geq 1$) est la série géométrique $[z^n]_{n\geq 0}$; la série primitive de la série géométrique $[z^n]_{n\geq 0}$ est la série $[z^n/n]_{n\geq 1}$.

Ce qui justifie la terminologie ("dérivée" ou "primitive") est le résultat très important suivant :

Théorème 2.11 *Soit* $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *et* $z \to S(z)$ *la somme de cette série de fonctions à l'intérieur du disque ouvert de convergence* $D(0,R)$*. Soit aussi* $z \to S_{\rm der}(z)$ *la somme de la série dérivée (toujours dans le même disque ouvert de convergence* $D(0,R)$*) et* $z \to S_{\rm prim}(z)$ *la somme de la série primitive (encore dans le même disque ouvert* $D(0,R)$ *de convergence qui est le même pour les trois séries en jeu). Alors, pour tout* $z \in D(0,R)$*, on a*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}^*}} \frac{S(z+h)-S(z)}{h} = S_{\rm der}(z) \tag{2.19}$$

et

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}^*}} \frac{S_{\rm prim}(z+h)-S_{\rm prim}(z)}{h} = S(z)\,. \tag{2.20}$$

Preuve. Puisque $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ est (on le voit immédiatement) la série dérivée de sa série primitive, il suffit, pour prouver cette proposition, d'en prouver le premier volet, c'est-à-dire (2.18). Pour cela, nous allons montrer que si z est fixé dans $D(0,R)$ et si $(h_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes tendant vers 0 dans $\mathbb{C}^*$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(z+h_n)-S(z)}{h_n} = S_{\rm der}(z)\,.$$

C'est pour cela le théorème 2.6 qui va nous servir car nous avons (d'après la définition de S et la célèbre identité remarquable

$$A^k - B^k = (A-B)\sum_{l=0}^{k-1} A^l B^{k-1-l}\,,\ k\in\mathbb{N}^*, A, B\in\mathbb{C}\Big)$$

$$\frac{S(z+h_n)-S(z)}{h_n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z+h_n)^k - z^k}{h_n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Big(\sum_{l=0}^{k-1} z^l (z+h_n)^{k-1-l}\Big)\,.$$

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_k^{(n)}(z) = a_k \left(\sum_{l=0}^{k-1} z^l (z+h_n)^{k-1-l} \right).$$

On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to\infty} u_k^{(n)}(z) = k a_k z^{k-1}$$

et

$$u_0^{(n)}(z) = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $|h_n| \leq \epsilon$, on a, par l'inégalité triangulaire et toujours la même l'identité remarquable,

$$|u_k^{(n)}(z)| \leq |a_k| \sum_{l=0}^{k-1} |z|^l (|z|+\epsilon)^{k-1-l} = |a_k| \frac{(|z|+\epsilon)^k - |z|^k}{\epsilon} \leq \frac{|a_k|(|z|+\epsilon)^k}{\epsilon} = w_k(z)\,.$$

Si ϵ est tel que $|z|+\epsilon < R$ (un tel ϵ existe bien car $|z| < R$), la série à termes positifs $[w_k(z)]_{k\geq 0}$ est une série convergente ; le théorème 2.6 s'applique donc et l'on a bien

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{S(z+h_n)-S(z)}{h_n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_k^{(n)}(z) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k = S_{\mathrm{der}}(z)\,,
\end{aligned}$$

ce qui prouve (2.18) (puisque le choix de la suite $(h_n)_{n\geq 0}$ importe peu) et donc le théorème 2.10. $\diamondsuit$.

Ce théorème a pour conséquence le résultat suivant :

Corollaire 2.2 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$; la fonction*

$$t \in]-R, R[\to S(t) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

est une fonction de classe C^∞ sur $]-R,R[$, avec, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^p S}{dt^p}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\cdots(k+p) a_{k+p} t^k\,; \tag{2.21}$$

on a en particulier

$$p! a_p = \frac{d^p S}{dt^p}(0)\,,$$

d'où la formule de Taylor

$$\forall t \in]-R,R[\,, \qquad S(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{d^p S}{dt^p}(0)\, t^p\,. \tag{2.22}$$

De plus, une primitive de S sur l'intervalle $]-R,R[$ est donnée par la fonction

$$t \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k}\, t^k\,.$$

Exemple 2.11. La série dérivée de la série $[(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)]_{n\geq 0}$ est la série $[(-1)^n z^{2n}]_{n\geq 0}$, ces deux séries ayant pour rayon de convergence $R=1$; en conséquence, la fonction

$$x \in]-1,1[\to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

est une primitive (celle d'ailleurs qui s'annule en $x=0$) de la fonction

$$x \in]-1,1[\to \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} \ ;$$

comme l'on sait que la primitive (sur $\mathbb{R}$) s'annulant en $x=0$ de la fonction $x \to 1/(1+x^2)$ est la fonction $x \to \operatorname{Arctg} x$, on a

$$\forall x \in]-1,1[\,, \quad \operatorname{Arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \ ;$$

on verra plus loin que cette formule reste valable pour $x=1$ (la série au second membre converge alors comme série alternée).

Preuve. La preuve est évidente car si $t \in]-R,R[$ et si $(h_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres réels tendant vers 0, on a, si S désigne la somme de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(t+h_n)-S(t)}{h_n} = S_{\mathrm{der}}(t)\,,$$

ce qui prouve que $t \to S(t)$ est dérivable, de dérivée la somme de la série dérivée ; on recommence ensuite l'opération avec la série dérivée (le rayon de convergence R n'a pas changé). La somme de la série primitive est, inversement, une primitive de la somme de la série. $\diamondsuit$

Il est aussi important de remarquer que l'on peut accéder aux coefficients a_p (c'est-à-dire à la restitution de la série entière à partir de la connaissance de sa somme) non pas en dérivant cette somme (ce qui, numériquement, s'avère un procédé instable), mais en l'intégrant (ce qui correspond à une opération autrement plus robuste !). On a en effet la :

Proposition 2.4 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence $R>0$; alors, pour tout $r \in]0,R[$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a, si S désigne la somme de la série dans le disque ouvert de convergence :*

$$a_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} S(re^{i\theta}) e^{-ip\theta}\, d\theta\,.$$

Preuve. Sur le cercle $C(0,r) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = r\}$, il y a convergence normale, donc uniforme, de la série $[a_n z^n]$; la suite de polynômes trigonométriques

$$f_{r,n} \ : \ \theta \to \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ik\theta}$$

converge donc uniformément sur $[0,2\pi]$ vers la fonction continue

$$\theta \to S(re^{i\theta}) \ ;$$

en utilisant le théorème 2.7, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} S(re^{i\theta})e^{-ip\theta}\,d\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} r^k a_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-p)\theta} d\theta \\ &= \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{\infty} a_k r^k \Big[\frac{e^{i(k-p)\theta)}}{i(k-p)}\Big]_0^{2\pi} + 2\pi\, a_p r^p = 2\pi\, a_p r^p\end{aligned}$$

puisque les fonctions $\theta \to e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux orthogonales relativement à la forme sesquilinéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues 2π périodiques sur $\mathbb{R}$,

$$(f,g) \to \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt\,;$$

ici d'ailleurs, la théorie des séries entières s'articule avec celle des séries de Fourier qui fera l'objet de la section suivante. $\diamondsuit$

2.3.4 Règle d'Abel pour les séries entières

Considérons une série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$, de rayon de convergence $R > 0$; lorsque z_0 est un point du cercle de convergence ($|z_0| = R$) où la série numérique $[a_n z_0^n]_{n\geq 0}$ se trouve converger, la somme de la série entière est une fonction qui se trouve naturellement définie sur le domaine

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < R\} \cup \{z_0\}\,.$$

On ne peut affirmer que la série entière converge uniformément sur ce domaine, mais on a cependant le très intéressant résultat suivant, dont la preuve repose sur l'utilisation du procédé d'Abel :

Proposition 2.5 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et w un point du cercle de convergence tel que la série numérique $[a_n w^n]_{n\geq 0}$ converge ; alors la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ converge uniformément dans tout ensemble du type :*

$$K(w\,;\,\kappa) := \{z \in \overline{D(0,R)}\,;\, |z-w| \leq \kappa(R-|z|)\}\,,$$

où κ désigne un nombre réel supérieur ou égal à 1 ; en particulier, la convergence de la série entière est uniforme sur le segment $[0,w]$ du plan complexe, segment qui se trouve inclus dans tous les ensembles $K(w\,;\,\kappa)$ quelque soit $\kappa \geq 1$.

Remarque 2.10. Une conséquence importante de ce résultat est que, si $(z_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de points du disque de convergence $D(0,R)$ telle qu'il existe $\kappa \geq 1$ avec

$$\forall n \geq n_0\,, \quad |z_n - w| \leq \kappa(R - |z_n|)$$

et que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_n^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k\ ;$$

en particulier la restriction au segment $[0,w]$ de la fonction

$$z \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

est une fonction continue ; on verra des exemples concrets d'application de cette remarque dans la sous-section suivante.

Remarque 2.11. Il est édifiant de représenter graphiquement, par exemple si $R = 1$ et $w = 1$, les domaines du type $K(1\,;\,\kappa)$ lorsque $\kappa \geq 1$ varie ; pareil domaine ne rencontre le cercle de convergence qu'au point $w = 1$; lorsque $\kappa = 1$, ce domaine est le segment $[0, 1]$; puis lorsque κ augmente, sa forme évolue comme celle d'une goutte d'eau de sommet 1 ; près du point 1, cette "goutte d'eau" (voir la figure 2.4, où nous avons utilisé deux valeurs κ et κ' avec κ proche de 1 et κ' grand pour représenter nos deux "gouttes") se trouve limitée par deux demi-tangentes symétriques par rapport au segment $[0, 1]$ et faisant entre elles un angle $\theta_\kappa = 2\text{Arcos}\,(1/\kappa)$; cet angle tend vers π lorsque κ tend vers l'infini.

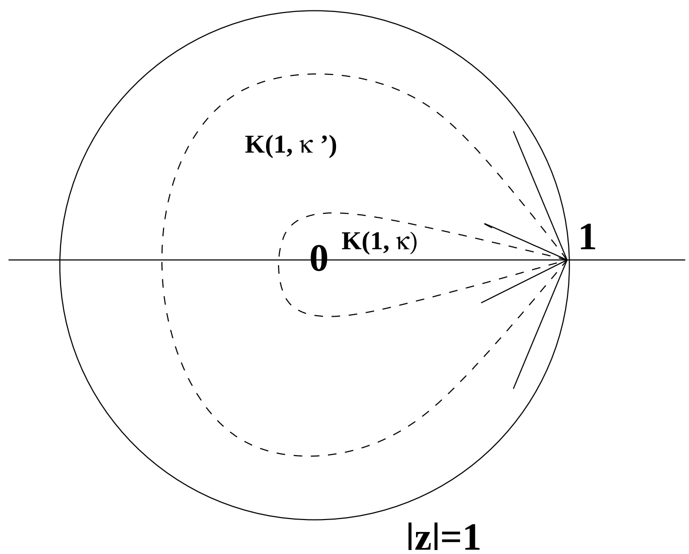

FIG. 2.4 – Domaines d'uniforme convergence si convergence en un point du bord

Preuve de la proposition 2.5.

La preuve utilise la méthode introduite pour prouver le second critère d'Abel. On se ramène au cas $R = 1$ et $w = 1$ (ce qui n'est pas restrictif modulo une homothétie combinée avec une rotation dans le plan complexe). Soit z un point du domaine $K(1\,;\,\kappa)$. On note R_n le reste au cran n de la série convergente $[a_n]_{n \geq n_0}$ et l'on écrit :

$$a_k = R_{k-1} - R_k$$

pour $k > 0$. Si $p > q > 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{q} a_k z^k &= \sum_{k=p}^{q} z^k (R_{k-1} - R_k) \\ &= z^p(R_{p-1} - R_p) + z^{p+1}(R_p - R_{p+1}) + \cdots + z^{q-1}(R_{q-2} - R_{q-1}) + z^q(R_{q-1} - R_q) \\ &= z^p R_{p-1} + \sum_{k=p}^{q-1} R_k(z^{k+1} - z^k) - z^q R_q\,. \end{aligned}$$

Par hypothèses, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon)$ tel que

$$n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow |R_n| \leq \epsilon\,;$$

si $p \geq N(\epsilon)$ et $q > p$, on a donc (grâce à l'inégalité triangulaire)

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{k=p}^{q} a_k z^k\Big| &\leq \epsilon\Big(|z^p| + |z^q| + \sum_{k=0}^{\infty} |z^k - z^{k+1}|\Big) \\ &\leq \epsilon\Big(2 + |1-z| \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k\Big) . \end{aligned}$$

Si $z \neq 1$, on a donc

$$\Big|\sum_{k=p}^{q} a_k z^k\Big| \leq \epsilon\Big(2 + \frac{|1-z|}{1-|z|}\Big) \leq (2+\kappa)\epsilon\,;$$

cette inégalité subsiste au point $z = 1$ et donc en tous les points de $K(1\,;\,\kappa)$; mais elle est réalisée dès que $p > q > N(\epsilon)$, où $N(\epsilon)$ est indépendant de z. La série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ vérifie donc le critère de Cauchy uniforme dans $K(1\,;\,\kappa)$ et converge donc uniformément dans ce domaine. La proposition est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

Voici deux applications de ce résultat :

1. <u>Où apparaît la fonction logarithme...</u>

La série entière $[(-1)^n z^{n+1}/(n+1)]_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence 1 et est la série primitive de la série $[(-z)^n]_{n\geq 0}$; comme

$$\sum_{k=0}^{n} (-z)^n = \frac{1}{1+z}\,,$$

la fonction

$$x \in]-1,1[\to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$$

est la primitive s'annulant en $t = 0$ de la fonction

$$t \to \frac{1}{1+t}$$

sur $]-1,1[$; en effet, si $x \in]-1,1[$,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k\Big) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$$

puisque l'on peut intervertir intégration et sommation du fait de la convergence normale, donc uniforme, de la série sous l'intégrale. Or on connait cette primitive car

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+x) \quad \forall x \in]-1,1[\,;$$

on a donc la formule

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\,;$$

cette formule subsiste (d'après la proposition 2.5) en $t = 1$ (où la série alternée $[(-1)^k/k+1]_{k\geq 0}$ converge) et l'on a donc aussi

$$\log 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\,.$$

Une expression de π.

La série entière $[(-1)^n z^{2n}/(2n+1)]_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence 1 et est la série primitive de la série $[(-1)^n z^{2n}]_{n\geq 0}$; comme

$$\sum_{k=0}^{n}(-z^2)^n = \frac{1}{1+z^2}\,,$$

la fonction

$$x \in]-1,1[\to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

est la primitive s'annulant en $t=0$ de la fonction

$$t \to \frac{1}{1+t^2}$$

sur $]-1,1[$; en effet, si $x \in]-1,1[$,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-t^2)^k\Big)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

puisque l'on peut intervertir intégration et sommation du fait de la convergence normale, donc uniforme, de la série sous l'intégrale. Or on connait cette primitive car

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctg} x \quad \forall x \in]-1,1[\,;$$

on a donc la formule

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \operatorname{Arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\,;$$

cette formule subsiste (d'après la proposition 2.5) en $t=1$ (où la série alternée $[(-1)^k/2k+1]_{k\geq 0}$ converge) et l'on a donc aussi

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctg}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,.$$

Pareille formule permet de calculer des approximations rationnelles de π (cela ne converge pas très vite, mais on a déjà mentionné comment des formules plus subtiles comme celle de Machin peuvent donner des approximations plus efficaces car plus rapides).

Nous donnerons dans la sous-section suivante des applications de ce résultat. Comme application ici, nous proposons de parachever l'énonçé du théorème de Mertens (proposition 1.10) comme nous l'avions annonçé dans la remarque 1.6.

Proposition 2.6 *Soient $[u_n]_{n\geq 0}$ une série numérique absolument convergente et $[v_n]_{n\geq 0}$ une série numérique convergente ; alors la série produit de Cauchy des séries $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$, de terme général*

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\,, \qquad n \geq 0\,,$$

est convergente, de somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\Big) \times \Big(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\Big)\,.$$

Preuve. On a déjà prouvé (proposition 1.10) la convergence de la série $[w_n]_{n\geq 0}$; il reste donc juste à calculer la valeur de la somme de cette série. Pour cela, on considère sur $[0,1]$ la fonction :

$$x \to \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k\Big) \times \Big(\sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k\Big) \; ;$$

comme les deux séries $[u_n x^n]_{n\geq 0}$ et $[v_n x^n]_{n\geq 0}$ sont absolument convergentes lorsque $x \in [0,1[$ (car une série entière telle $[u_n z^n]_{n\geq 0}$ ou $[v_n z^n]_{n\geq 0}$ est normalement convergente sur tout disque fermé inclus dans son disque de convergence, ici $D(0,1)$), on peut appliquer la proposition 1.9 qui nous assure que pour tout $x \in [0,1[$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k x^k = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k\Big) \times \Big(\sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k\Big) \tag{2.23}$$

(la série $[w_n x^n]_{n\geq 0}$ est le produit de Cauchy des deux séries $[u_n x^n]_{n\geq 0}$ et $[v_n x^n]_{n\geq 0}$). Comme les séries de fonctions $[u_n x^n]_{n\geq 0}$, $[v_n x^n]_{n\geq 0}$ et $[w_n x^n]_{n\geq 0}$ sont, d'après la proposition 2.5, uniformément convergentes sur $[0,1]$, leurs sommes sont des fonctions continues de x et l'on a, en faisant tendre x vers 1 par valeurs strictement inférieures dans (2.22) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\Big) \times \Big(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\Big) ,$$

ce qui est le résultat voulu. $\diamondsuit$

2.3.5 Fonctions réelles analytiques sur un intervalle de $\mathbb{R}$

On a vu (corollaire 2.2) que si S est la restriction à $]-R,R[$ de la somme d'une série entière de rayon de convergence $R>0$, la fonction $x \to S(x)$ est C^∞ sur $]-R,R[$.

En revanche, il existe des fonctions f qui sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles qu'il n'existe aucun $R>0$ tel que f puisse s'écrire, dans $]-R,R[$, comme la somme d'une série entière de rayon R : si l'on considère par exemple la fonction

$$f \;:\; x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \exp(-1/x^2) \text{ si } x>0 \,, \end{cases}$$

on voit que cette fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses dérivées s'annulent en 0 (car $x \to \exp(-1/x^2)$ tend vers 0 plus vite que toutes les fonctions puissances lorsque x tend vers 0) ; si f était dans $]-R,R[$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R, on aurait, en utilisant la formule de Taylor (2.21),

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \qquad \forall x \in]-R,R[\,,$$

ce qui serait absurde.

Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 2.8 *On appelle* <u>*fonction réelle analytique*</u> *sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ toute fonction f de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, telle que, pour tout point x_0 de I, il existe $\epsilon(x_0)>0$ et une suite numérique $(a_n(x_0))_{n\geq 0}$ telle que le rayon de convergence de la série $[a_n(x_0) z^n]_{n\geq 0}$ soit supérieur ou égal à $\epsilon(x_0)$, avec :*

- $]x_0 - \epsilon(x_0), x_0 + \epsilon(x_0)[\subset I$;
- $\forall x \in]x_0 - \epsilon(x_0), x_0 + \epsilon(x_0)[$, *on a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_0)(x - x_0)^k \,.$$

Remarque 2.12. Une fonction réelle analytique sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est automatiquement C^∞ sur cet intervalle (voir le corollaire 2.2) ; d'ailleurs la suite $(a_k(x_0))_{k\geq 0}$ explicitée dans la définition 2.7 est la suite $f^{(k)}(x_0)/k!$.

Les exemples majeurs de fonctions réelles analytiques sont :

- les restrictions à $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles (quotients de fonctions polynomiales), hors bien sûr de l'ensemble des zéros du dénominateur ;
- l'exponentielle et les fonctions trigonométriques ou trigonométriques hyperboliques (sur $\mathbb{R}$) ;
- la fonction logarithme népérien (sur $]0, +\infty[$) ;
- les fonctions du type $t \to (t-a)^\alpha$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ (sur l'intervalle $]a, +\infty[$) ;
- les fonctions trigonométriques inverses (sur $]-1, 1[$ pour les fonctions Arcos, Arcsin, sur $\mathbb{R}$ pour Arctg) ;
- les fonctions trigonométriques hyperboliques inverses, Argch, Argsh, Argth, Argcoth dans les ouverts où elles sont définies (ces fonctions s'expriment à l'aide du logarithme et des fonctions puissance, entre autres des prises de radicaux).

2.3.6 Fonctions réelles analytiques sur un intervalle et opérations usuelles

Toute <u>combinaison linéaire à coefficients complexes</u> de fonctions réelles analytiques sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est une fonction réelle analytique sur cet intervalle : cela résulte du fait que si $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ et $[b_n z^n]_{n\geq 0}$ sont des séries entières de rayons de convergence respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ et λ, μ deux nombres complexes, alors la série entière $[(\lambda a_n + \mu b_n) z^n]_{n\geq 0}$ a un rayon de convergence R avec de plus $R \geq \min(R_1, R_2)$.

Le <u>produit</u> de deux fonctions réelles analytiques sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est encore une fonction réelle analytique : cela résulte du fait que si $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ et $[b_n z^n]_{n\geq 0}$ sont des séries entières de rayons de convergence respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$, la série entière produit de Cauchy

$$\Big[\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Big) z^n \Big]_{n\geq 0}$$

a un rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$ (car le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente, c.f. Proposition 1.9).

En ce qui concerne la composition des fonctions réelles analytiques, nous avons le résultat plus délicat suivant :

Proposition 2.7 *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction réelle analytique de I dans J, g une fonction réelle analytique de J dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; alors la fonction $g \circ f$ est une fonction réelle analytique sur I.*

Preuve. Pour montrer cette proposition, considérons deux séries entières $[a_k z^k]_{n\geq 0}$ et $[b_n z^n]_{n\geq 0}$ de rayons respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ avec de plus $a_0 = 0$. Comme le produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence R_1 est une série entière de rayon de convergence $R \geq R_1$, il existe, pour tout $n \geq 1$, une série entière $[a_{n,k} z^k]_{k\geq 0}$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R_1 telle que

$$\forall z \in\ D(0, R_1)\,,\ \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k\,;$$

on remarque d'ailleurs que comme $a_0 = 0$, on a $a_{n,k} = 0$ si $k < n$. On considère une nouvelle série entière $[c_k z^k]_{k\geq 1}$ en posant

$$c_k := \sum_{n=1}^{k} b_n a_{n,k}\,.$$

Notons que formellement, cette série entière est celle qui apparaît si l'on "substitue" $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ à z dans l'expression $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. En effet, "formellement" au moins

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k\Big) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k\,.$$

Si $0 < r_1 < R_1$ est assez petit, on a (par continuité en 0 de la somme de la série entière $[a_k z^k]_{k\geq 0}$)

$$M_1 = \sup_{|z|=r_1} \Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\Big| < R_2\,.$$

Il résulte de la proposition 2.4 que l'on a, pour tout $n \geq 1$, pour tout $k \geq n$,

$$|a_{n,k}| \leq \frac{M_1^n}{r_1^k}\,.$$

Si l'on choisit $r_2 \in]M_1, R_2[$, la même proposition 2.4 nous permet d'affirmer que l'on a, pour tout $n \geq 0$,

$$|b_n| \leq \frac{M_2}{r_2^n}\,,$$

où

$$M_2 := \sup_{|z|=r_2} \Big|\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big|.$$

On a donc, pour $k \geq 1$,

$$|c_k| \leq \sum_{n=1}^{k} |b_n|\,|a_{n,k}| \leq \frac{M_2}{r_1^k} \sum_{n=1}^{k} \frac{M_1^n}{r_2^n} \leq \frac{M_2}{r_1^k} \times \frac{M_1}{r_2} \times \frac{1}{1 - \frac{M_1}{r_2}} = \frac{1}{r_1^k}\,\frac{M_1}{r_2(M_1 - r_2)}\,.$$

Il résulte de ceci que la série entière $[c_k z^k]_{k\geq 1}$ a un rayon de convergence $R \geq r_1 > 0$, ce qui montre que la composée des sommes des deux séries $[a_k z^k]_{k\geq 0}$ et $[b_n z^n]_{n\geq 0}$ correspond à la somme d'une série entière de rayon strictement positif. Ceci achève la preuve de la proposition. $\diamondsuit$

On rappelle aussi pour clôre cette section que nous illustrerons par des exemples dans la sous-section suivante que ce que nous avons vu dans la section 2.3.3 nous permet d'affirmer que toutes les dérivées d'une fonction réelle analytique sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ sont encore des fonctions réelles analytiques sur cet intervalle. Toute primitive d'une fonction réelle analytique sur un intervalle ouvert I est encore une fonction réelle analytique sur ce même intervalle.

2.3.7 Les fonctions développables en série entière "classiques"

a. Les fonctions rationnelles de la variable complexe z

Le premier exemple (très important) des fonctions développables en série entière de $(z-z_0)$ autour de tout point z_0 au voisinage duquel elles sont définies est celui des fonctions rationnelles de la variable z ; on a dans ce cas le résultat suivant :

Proposition 2.8 *Soit $R = N/D \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle (écrite sous forme réduite) et $\alpha_1, ..., \alpha_M$ les racines du polynôme D figurant au dénominateur. Alors, si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_M\}$, on a*

$$\forall z \in D(z_0, \min_{1\leq j\leq M} |z_0 - \alpha_j|)\,,\ R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0)(z-z_0)^k\,,$$

le rayon de convergence de la série entière $[a_n(z_0)\, z^n]_{n\geq 0}$ étant exactement égal à $\min_{1\leq j\leq M} |z_0 - \alpha_j|$. En particulier, la restriction à $\mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_M\}$ de la fonction rationnelle $z \to R(z)$ de la variable complexe z est une fonction réelle analytique dans tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun des points α_j, $j = 1, ..., M$.

Preuve. On utilise d'abord la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle R sur $\mathbb{C}(X)$:

$$R(X) = \frac{N(X)}{D(X)} = E(X) + \sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{\mu_j} \frac{\gamma_{j,l}}{(X-\alpha_j)^l}\,,$$

où $E(X)$ est un polynôme (le reste de la division euclidienne du numérateur $N(X)$ par le dénominateur $D(X)$), μ_j, $j = 1, ..., M$, est la multiplicité de α_j comme racine de D, et les $\gamma_{j,l}$, $l = 1, ..., \mu_j$ sont des nombres complexes.
On ne restreint pas le problème en supposant $z = 0$, ce que l'on fera (on se ramène à ce cas en utilisant une translation dans $\mathbb{C}$) ; on suppose donc qu'aucun des α_j n'est nul. Dans le disque ouvert $D(0, |\alpha_j|)$, on peut écrire

$$\frac{1}{z-\alpha_j} = -\frac{1}{\alpha_j(1-\frac{z}{\alpha_j})} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\alpha_j^{k+1}}\ ;$$

la série géométrique $[-z^n/\alpha_j^{n+1}]_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence $|\alpha_j|$, tout comme toutes ses séries dérivées. En utilisant le théorème 2.10, on voit (et ceci est en lui même un résultat important) que

$$\frac{(-1)^p}{(z-\alpha_j)^{p+1}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\cdots(k+p)}{\alpha_j^{k+p+1}} z^k\,, \quad \forall\, z \in D(0, |\alpha_j|)$$

d'où

$$\frac{1}{(z-\alpha_j)^{p+1}} = \frac{(-1)^{p+1}}{\alpha_j^{p+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+p)!}{k!} \frac{z^k}{\alpha_j^k}\,, \quad \forall\, z \in D(0, |\alpha_j|)\,.$$

Dans le disque ouvert de rayon $\min_{1\leq j\leq M} |\alpha_j|$, on peut donc écrire

$$R(z) = E(z) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

avec

$$a_k := \sum_{j=1}^{M} \sum_{l=1}^{\mu_j} \frac{(-1)^l}{\alpha_j^{k+l}} \frac{(k+l-1)!}{k!} \gamma_{j,l} \,.$$

Le rayon de convergence de la série $[a_n z^n]_{n \geq 0}$ est (on le voit en montrant que $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1/\min_j |\alpha_j|$) vaut exactement $\min_j |\alpha_j|$ et la proposition est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

Remarque 2.13. Le développement en série entière des fractions rationnelles joue un rôle important en combinatoire ; par exemple, en utilisant le fait que le produit de Cauchy des deux séries entières $[u_n z^n]_{n \geq 0}$ et $[v_n z^n]_{n \geq 0}$ de même rayon de convergence est la série de Cauchy $[w_n z^n]_{n \geq 0}$ (où $[w_n]_{n \geq 0}$ est le produit de Cauchy des deux séries numériques $[u_n]_{n \geq 0}$ et $[v_n]_{n \geq 0}$) et le résultat établi à la proposition 1.9, on voit par exemple que si $p_1, ..., p_M$ sont M entiers, le développement en série entière dans $D(0,1)$ de

$$\prod_{j=1}^{M} \frac{1}{(1 - z^{p_j})} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p_1,\dots,p_M}(k) z^k$$

(que l'on peut trouver en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle de droite) donne, avec $a_{p_1,\dots,p_M}(k)$, le nombre de façons de réaliser une somme de k euros en coupures de $p_1, p_2, ..., p_M$ euros. Beaucoup d'autres idées s'inspirent de cette démarche et le développement en série entière des fractions rationnelles est intimement lié au concept de *z-transformée* en théorie de l'information.

b. La fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques ou trigonométriques hyperboliques

On définit la fonction exponentielle dans $\mathbb{C}$ comme la somme de la série entière $[z^n/n!]_{n \geq 0}$; on note cette fonction $z \to e^z$ ou $z \to \exp z$; on a donc, par définition

$$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\ ;$$

la série entière $[z^n/n!]_{n \geq 0}$ est de rayon de convergence $R = \infty$ (ce qui justifie que l'on puisse définir $\exp z$ pour tout z) et a deux particularités :

- elle coïncide avec sa série dérivée ;
- si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, le produit de Cauchy des séries numériques $[z_1^n/n!]_{n \geq 0}$ et $[z_2^n/n!]_{n \geq 0}$ est la série numérique $[(z_1 + z_2)^n/n!]_{n \geq 0}$ (comme on le vérifie à partir de la formule du binôme), ce qui implique, grâce à la proposition 1.9, la formule

  $$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,,\ \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) \qquad (2.24)$$

  qui assure que l'application exponentielle réalise un homomorphisme de $\mathbb{C}$ muni de l'addition dans le groupe $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes non nuls, muni, lui, de la multiplication.

Si z_0 est un nombre complexe, on a

$$\exp(z_0 + h) = \exp(z_0)\, \exp h = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp z_0}{k!} h^k\,,\ \forall h \in \mathbb{C}\,,$$

ce qui montre que la restriction de l'exponentielle à $\mathbb{R}$ est bien une fonction réelle analytique.

C'est aussi le cas des quatre fonctions :

$$\begin{array}{rcl} z & \rightarrow & \cos z := \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k} \\ z & \rightarrow & \sin z := \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} \\ z & \rightarrow & \mathrm{ch}\, z := \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\, z^{2k} \\ z & \rightarrow & \mathrm{sh}\, z := \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} \end{array}$$

Les restrictions $\theta \rightarrow \cos\theta$ et $\theta \rightarrow \sin\theta$ des fonctions cos et sin à l'axe réel constituent un vecteur $\theta \rightarrow \vec{V}(\theta)$ de fonctions réelles analytiques, donc C^∞ sur $\mathbb{R}$, solution, comme on le vérifie immédiatement à partir du théorème 2.10, du système différentiel à coefficients constants :

$$\vec{V}'(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \vec{V}(\theta)$$

avec la condition initiale

$$\vec{V}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mais on sait aussi qu'un autre vecteur de fonctions C^1 solution (avec la même condition initiale) du même système différentiel sur $\mathbb{R}$ est le vecteur

$$\vec{V}_0(\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{COS}\,(\theta) \\ \mathrm{SIN}\,(\theta) \end{pmatrix}$$

où COS et SIN sont les fonctions trigonométriques usuelles (définies sur $[0, 2\pi[$ et prolongées par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$ tout entier) ; de l'unicité de la solution du système différentiel du premier ordre avec conditions initiales imposées, on déduit

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos\theta = \mathrm{COS}\,(\theta)$$

et de même

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin\theta = \mathrm{SIN}\,(\theta).$$

La formule

$$\cos^2 z + \sin^2 z \equiv 1$$

continue à être valable dans tout le plan complexe (mais attention, il faut prendre garde au fait que les inégalités bien pratiques $|\cos z| \leq 1$ ou $|\sin z| \leq 1$ ne sont vérifiées que si z est réel !) et l'application

$$z \rightarrow (\cos z, \sin z)$$

paramètre le sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ défini comme

$$\Gamma := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\, ;\, z_1^2 + z_2^2 = 1\}.$$

Les formules trigonométriques usuelles restent valables et les fonctions hyperboliques sont reliées aux fonctions trigonométriques via les deux relations

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}\,(t) & = & \cos(it) \\ \mathrm{sh}\,(t) & = & \dfrac{\sin(it)}{i} = -i\sin(it)\, ; \end{array}$$

si $z = x + iy$ est un nombre complexe, on a en particulier les formules

$$\begin{aligned} \cos(x+iy) &= \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \, \sin x \operatorname{sh} y \\ \sin(x+iy) &= \sin x \cos(iy) + \sin(iy) \cos x = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \, \cos x \,. \end{aligned}$$

Pour θ réel, on retrouve d'ailleurs les formules de Moivre :

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \,,$$

cas particulier de la formule immédiate :

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \,.$$

On reviendra plus loin sur le nombre π, défini par le fait (par exemple) que $2i\pi$ et $-2i\pi$ soient les points les plus proches de l'origine (et distincts de 0) où la fonction

$$z \to F(z) = \exp z - 1$$

s'annule ; de tels points sont automatiquement imaginaires purs, isolés sur l'axe imaginaire pur et il y en a un (en fait deux par symétrie par rapport à l'axe réel) qui soit le plus proche de 0 ; c'est ainsi que 2π eest défini (donc à partir de la fonction exponentielle) et tout suit en cascade, en particulier le fait que 2π soit aussi le périmètre du cercle de rayon 1, ce qui est plus familier !

c. Le logarithme.

La série entière $[z^n/n]_{n\geq 1}$ a pour rayon de convergence 1 et est la série primitive de la série $[z^n]_{n\geq 1}$; comme

$$\sum_{k=0}^{n} z^n = \frac{1}{1-z} \,,$$

la fonction

$$t \in]-1,1[\to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$$

est la primitive s'annulant en $t = 0$ de la fonction

$$t \to \frac{1}{1-t}$$

sur $]-1,1[$; or, on connait cette primitive car

$$\int_0^t \frac{du}{1-u} = -\log(1-t) \,;$$

on a donc la formule

$$\forall t \in]-1,1[\,, \ \log(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} \,;$$

cette formule subsiste (d'après la proposition 2.5) en $t = -1$ (où la série alternée $[(-1)^k/k]_{k\geq 1}$ converge) et l'on a donc aussi

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \,.$$

Comme l'on a, pour tout $t_1, t_2 > 0$,

$$\log(t_1 t_2) = \log t_1 + \log t_2\,,$$

on a, pour tout $t_0 > 0$, pour tout h tel que $|h| < t_0$,

$$\log(t_0 + h) = \log(t_0(1 + h/t_0)) = \log t_0 + \log(1 + h/t_0) = \log t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{t_0^k}\, h^k\,.$$

La fonction log est donc réelle analytique sur $]0, +\infty[$ et se développe en série entière au voisinage de t_0 sous la forme

$$\log t = \log t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{t_0^k}\,(t - t_0)^k\,, \tag{2.25}$$

cette formule restant valable pour tout t tel que $|t - t_0| < t_0$.

d. Les fonctions puissance $(t - a)^\alpha$.

Si α est un nombre complexe, on a vu (dans la liste d'exemples de la section 2.3.1) que la série entière $[a_{\alpha,n}]_{n\geq 0}$, où

$$a_{\alpha,n} := \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

avait pour rayon de convergence $R = 1$; en calculant la série dérivée, on voit que la somme S_α de cette série vérifie dans $]-1, 1[$ l'équation différentielle du premier ordre :

$$(1 + t) S'_\alpha(t) = \alpha S_\alpha(t)\,.$$

On peut d'ailleurs prendre le problème à l'envers, c'est-à-dire chercher les séries entières $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ de rayon de convergence R (*a priori* à déterminer) de manière à ce que, si $R > 0$, on ait, pour tout $z \in D(0, R)$,

$$(1 + z) S_{\text{der}}(z) = \alpha S(z)$$

si S désigne la somme de la série et S_{der} celle de la série dérivée ; on retrouvera comme séries entières solutions les séries entières du type $[\lambda a_{\alpha,n} z^n]_{n\geq 0}$. Mais, sur $]-1, 1[$, intégrer l'équation différentielle du premier ordre

$$(1 + t) y' = \alpha y$$

ne pose aucun problème ; on trouve comme solutions

$$y(t) = \exp(\alpha \log(1 + t) + C) = e^C (1 + t)^\alpha\,,$$

où $C \in \mathbb{C}$ est une constante arbitraire ; comme $S_\alpha(0) = a_{\alpha,0} = 1$, on a

$$\forall t \in]-1, 1[\,,\ S_\alpha(t) = (1 + t)^\alpha\,.$$

Si maintenant a est un nombre réel et si $t_0 > a$, on peut remarquer que, pour tout h tel que $|h| < t_0 - a$, on a

$$(t_0 + h - a)^\alpha = (t_0 - a)^\alpha \Big(1 + \frac{h}{t_0 - a}\Big)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{\alpha,k}}{(t_0 - \alpha)^{k-\alpha}}\, h^k\,;$$

ceci prouve que la fonction

$$t \to (t-a)^\alpha$$

est réelle analytique sur $]a, +\infty[$; mieux, pour tout $t_0 > a$, elle s'écrit dans l'intervalle $]a, 2t_0 - a[$ sous la forme

$$(t-a)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{\alpha,k}}{(t_0 - a)^{k-\alpha}} (t-t_0)^k$$

avec

$$a_{\alpha,n} := \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ si } n \geq 1 \end{cases},$$

le rayon de convergence de la série $\left[a_{\alpha,n}/(t_0-a)^{n-\alpha}\right]_{n\geq 0}$ valant exactement $t_0 - a$.

e. Les fonctions trigonométriques inverses

Compte tenu du fait que la fonction $t \in]-1,1[\to \operatorname{Arcos} t$ est la primitive valant $\pi/2$ en $t = 0$ de la fonction

$$t \in]-1,1[\to -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

on a, en prenant la série primitive de la série

$$[-a_{-1/2,n} z^{2n}]_{n\geq 0}$$

l'expression de $\operatorname{Arcos} t$ sur $]-1,1[$ (d'ailleurs avec le fait que cette fonction est bien réelle analytique sur cet intervalle) ; la formule est

$$\begin{aligned} \forall t \in]-1,1[, \ \operatorname{Arcos} t &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_{-1/2,k} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1} \\ &= \frac{\pi}{2} - t - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{2^k k!} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

De même, la fonction $t \in]-1,1[\to \operatorname{Arcsin} t$, qui est liée à la précédente via la formule

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \operatorname{Arcos} t + \operatorname{Arcsin} t = \frac{\pi}{2}$$

est aussi réelle analytique sur $]-1,1[$, avec

$$\forall t \in]-1,1[, \ \operatorname{Arcsin} t = t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)}{2^k k!} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}.$$

Enfin, la fonction

$$t \in \mathbb{R} \to \operatorname{Arctg} t$$

est, on le sait, la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en $t = 0$ de la fonction

$$t \to \frac{1}{1+t^2};$$

en prenant la série primitive de la série entière $[(-1)^n z^{2n}]_{n\geq 0}$ (le rayon de convergence est 1), on déduit du corollaire 2.2 la formule

$$\forall t \in]-1,1[, \ \operatorname{Arctg} t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1};$$

cette formule reste d'ailleurs, du fait de la proposition 2.5, valable en $t=1$ (puisque les deux fonctions $t \to \operatorname{Arctg} t$ et $t \to \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n+1}/(2n+1)$ sont continues sur $[0,1]$, la seconde comme limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de fonctions continues) ; ceci fournit une manière (pas très rapide) de calculer des approximations rationnelles de π via la formule

$$\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \ ;$$

remarquons que l'on a la majoration d'erreur

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \right| \leq \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3}$$

d'après la majoration du reste d'une série alternée. Il existe des formules bien plus efficaces (toujours inspirées du développement de $t \to \operatorname{Arctg} t$ sur $]-1,1[$) telle celle de Bertrand pour calculer les décimales successives de π !

En écrivant, pour tout $t_0, h \in \mathbb{R}$, la relation de Chasles

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arctg}(t_0+h) - \operatorname{Arctg} t_0 &= \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^h \frac{du}{(1+i(t_0+u))(1-i(t_0+u))} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^h \left(\frac{1}{1+it_0+iu} + \frac{1}{1-it_0-iu} \right) du \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \frac{h^{k+1}}{(k+1)(1+it_0)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{h^{k+1}}{(k+1)(1-it_0)^{k+1}} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \frac{h^{k+1}}{(k+1)(1+it_0)^{k+1}} \right],
\end{aligned}$$

on voit que la fonction

$$t \to \operatorname{Arctg} t$$

est réelle analytique sur $\mathbb{R}$ et telle que, si $t_0 \in \mathbb{R}$, on ait

$$\operatorname{Arctg} t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t_0)(t-t_0)^k$$

pour $|t-t_0|<1$, le rayon de convergence de la série $[a_n(t_0)z^n]$ étant toujours égal à 1 quelque soit $t_0 \in \mathbb{R}$.

f. Les fonctions hyperboliques inverses.

Comme on le sait, la fonction

$$t \in \mathbb{R} \to \operatorname{Argsh} t = \log\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) \in \mathbb{R}$$

(inverse de la fonction $t \in \mathbb{R} \to \operatorname{sh} t = (e^t - e^{-t})/2 \in \mathbb{R}$) est la primitive (s'annulant en $t=0$) de la fonction

$$t \to \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ ;$$

on déduit ainsi (toujours du corollaire 2.5) que

$$\begin{aligned}
\forall t \in]-1,1[\,,\ \operatorname{Argsh} t &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_{-1/2,k} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \\
&= t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)}{2^k k!} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} .
\end{aligned}$$

Comme la fonction $t \to \text{Arctg}\, t$, la fonction $t \to \text{Argsh}\, t$ est une fonction réelle analytique sur $\mathbb{R}$ et telle que, si $t_0 \in \mathbb{R}$, on ait

$$\text{Argsh}\, t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t_0)(t-t_0)^k \tag{2.26}$$

pour $|t-t_0|<1$, le rayon de convergence de la série $[a_n(t_0)z^n]$ étant toujours égal à 1 quelque soit $t_0 \in \mathbb{R}$; en effet, on écrit pour voir cela :

$$\begin{aligned}
\text{Argsh}\,(t_0+h) - \text{Argsh}\, t_0 &= \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^h \frac{du}{\sqrt{1+t_0^2+u^2+2t_0u}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+t_0^2}} \int_0^h \frac{1}{\left(1+\frac{u^2+2t_0u}{1+t_0^2}\right)^{1/2}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+t_0^2}} \int_0^h \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{2^k k!}\left(\frac{u^2+2t_0u}{1+t_0^2}\right)^k\right) du \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+t_0^2}} \left(h+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{2^k k!(1+t_0^2)^k} \int_0^h (u+2t_0)^k u^k\, dt\right),
\end{aligned}$$

ce qui donne le développement voulu (2.25) au voisinage de $t_0 \in \mathbb{R}$.

La fonction

$$t \in]1,+\infty[\to \text{Argch}\, t \in]0,+\infty[$$

(inverse de la fonction ch : $t \in]0,+\infty[\to \text{ch}(t) \in]1,+\infty[$) est définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\forall t \in]1,+\infty[\,,\ \text{Argch}\, t = \int_1^t \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \log(t+\sqrt{t^2-1})$$

(on prolonge en $t=1$ en posant $\text{Argch}\, 1 = 0$) c'est encore une fonction réelle analytique sur $]1,+\infty[$; de même pour la fonction

$$t \in]-1,1[\to \text{Argth}\ t = \int_0^t \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$$

qui admet sur $]-1,1[$ le développement :

$$\forall t \in]-1,1[\,,\ \text{Argth}\, t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}\,;$$

il s'agit encore ici d'une fonction réelle analytique sur l'intervalle $]-1,1[$ où elle est définie.

2.4 Séries de Fourier

2.4.1 Le spectre d'une fonction T-périodique

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on suppose deux choses sur cette fonction :

– elle est périodique de période T, ce qui signifie

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f(t+T) = f(t)$$

(la fonction f correspond par exemple à un signal temporel périodique) ;
– f admet en tout point une limite à gauche et à droite, ce qui équivaut à dire que ceci est vrai sur un intervalle $[t_0, t_0 + T]$ (par exemple $[0, T]$ puisque f est supposée périodique), ou encore à dire que f est limite uniforme sur $[0, T]$ (ou sur tout intervalle $[t_0, t_0 + T]$) d'une suite de fonctions en escalier.

Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{Regl}_{T\,\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ constitué de telles fonctions peut être équipé, on l'a vu dans le cours d'algèbre, d'une forme hermitienne positive

$$f \to \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt\,, \quad \forall\, t_0 \in \mathbb{R}$$

(par changement de variable et T-périodicité) ; cette forme hermitienne, de forme polarisée la forme sesquilinéaire :

$$(f, g) \to \langle f\,,\, g\rangle_T := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\overline{g(t)}dt \tag{2.27}$$

correspond du point de vue de la physique à la quantification de l'énergie ; ce n'est pas une forme définie car il est possible que

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt = 0$$

sans que f soit nulle en tout point (par exemple f peut fort bien être nulle partout sur $[0, T]$, sauf en un nombre fini de points de $[0, T]$). Cependant, si l'on restreint cette forme quadratique au sous-espace des $\mathcal{C}_{T\,\mathrm{per}}(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{C})$ des fonctions continues T-périodiques, la restriction de cette forme est bien une forme définie positive sur ce nouvel espace vectoriel.

Le système des fonctions T-périodiques

$$t \to e_{T,n}(t) := \exp(\frac{2i\pi nt}{T})\,,\ n \in \mathbb{Z}\,,$$

dites aussi <u>*harmoniques fondamentales complexes de période T*</u>, est un système orthonormé pour la forme hermitienne (2.27) car

$$\forall k, l \in \mathbb{Z}\,,\ \int_0^T \exp(\frac{2i\pi(k-l)t}{T})dt = \begin{cases} T \text{ si } k = l \\ \frac{T}{2i\pi(k-l)}\left[\exp\left(\frac{2i\pi(k-l)}{T}\right)\right]_0^T = 0 \text{ sinon}\,. \end{cases}$$

Le défaut cependant du système orthonormé $(e_{T,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ est qu'il s'agit d'un système de fonctions T-périodiques à valeurs complexes, ce qui peut compliquer inutilement les choses lorsque l'on envisage la décomposition suivant un tel système des fonctions réelles (celles de $\mathrm{Regl}_{T\,\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) ; on préfère utiliser alors un autre système orthonormé (toujours pour la même forme hermitienne (2.27) notée $\langle\ ,\ \rangle_T$), celui constitué des fonctions T-périodiques suivantes :

$$e_{T,0} \equiv 1\,, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,, \begin{cases} f_{T,n} := \sqrt{2}\,\cos\frac{2\pi nt}{T} \\ g_{T,n} := \sqrt{2}\,\sin\frac{2\pi nt}{T}\,; \end{cases}$$

le système constitué de $e_{T,0}$ et des $f_{T,n}$, $g_{T,n}$ pour $n \geq 1$ est dit système des <u>*harmoniques fondamentales réelles de période* T</u>.

On définit ainsi les notions de <u>*spectre réel*</u> et <u>*spectre complexe*</u> d'un élément de l'espace $\text{Regl}_{T\,\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Définition 2.9 *Le <u>spectre complexe</u> d'un élément $f \in \text{Regl}_{T\,\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est la collection (indexée par $\mathbb{Z}$) des nombres $c_{T,n}[f]$ (<u>coefficients de Fourier complexes</u> de f) définis par*

$$c_{T,n}[f] := \langle f \,,\, e_{T,n} \rangle_T \,, \quad n \in \mathbb{Z}\,;$$

le spectre réel du même élément f est, lui, la double collection (indexée par $\mathbb{N}$) des nombres $\alpha_{T,0}[f]$ et $\alpha_{T,n}[f], \beta_{T,n}[f]$ pour $n \geq 1$ (<u>coefficients de Fourier réels</u> de f) définis par

$$\alpha_{T,0}[f] = c_{T,0}[f]\,, \quad \alpha_{T,n} := \langle f \,,\, f_{T,n} \rangle_T \,, \quad \beta_{T,n} := \langle f \,,\, g_{T,n} \rangle_T \quad \forall n \geq 1\,.$$

Remarque 2.14. Si f est dans $\text{Regl}_{T\,\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_{T,-n} = \overline{c_{T,n}}\,;$$

pour une telle fonction réelle, les coefficients de Fourier réels sont (comme on pourrait s'y attendre car là réside la motivation pour l'utilisation des T-harmoniques fondamentales réelles au lieu de complexes) naturellement réels.

La transformation d'une fonction (le physicien préfèrera dire un signal) en son spectre est une opération certes mathématique, mais en fait réalisable physiquement via le mécanisme optique de diffraction. Comme toute transformation physique, on s'attend donc à ce que le passage d'une fonction à son spectre se réalise sans apport externe d'énergie (on verra même à la section 2.4.3 qu'il y a fait conservation de l'énergie). Nous pouvons d'ores et déjà énoncer le résultat suivant (allant précisément dans le sens de cette interprétation physique).

Théorème 2.12 [inégalité de Bessel] *Soit f un élément de $\text{Regl}_{T\,\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et n un entier naturel strictement positif ; on a*

$$\sum_{k=-n}^{k=n} |c_{T,k}[f]|^2 = |\alpha_{T,0}[f]|^2 + \sum_{k=1}^{n} \Big(|\alpha_{T,k}[f]|^2 + |\beta_{T,k}[f]|^2 \Big) \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt\,. \tag{2.28}$$

Preuve. On voit immédiatement que la fonction continue 2π périodique $S_n[f]$ définie

$$\begin{aligned} S_n[T;f](t) \;&:=\; \sum_{k=-n}^{k=n} c_{T,n}[f]\, e_{T,n}(t) \\ &:=\; \alpha_{T,0}[f]\, e_{T,0}(t) + \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_{T,n}[f]\, f_{T,n}(t) + \beta_{T,n}[f]\, g_{T,n}(t) \Big) \end{aligned}$$

est telle que $S_n[T;f]$ et $f - S_n[T;f]$ soient orthogonales relativement à la forme hermitienne positive (et vérifiant la symétrie hermitienne) (2.27) ; d'après le théorème de Pythagore, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2\, dt \;&=\; \frac{1}{T} \int_0^T |S_n[T;f](t)|^2\, dt + \frac{1}{T} \int_0^T |S_n[T;f](t) - f(t)|^2\, dt \\ &\geq\; \frac{1}{T} \int_0^T |S_n[T;f](t)|^2\, dt\,; \end{aligned}$$

or le fait que les T-harmoniques fondamentales (tant réelles que complexes) forment un système orthonormé relativement à la forme (2.27) assure :

$$\begin{aligned}\int_0^T |S_n[T;f](t)|^2\,dt &= \sum_{k=-n}^{k=n} |c_{T,k}[f]|^2 \\ &= |\alpha_{T,0}[f]|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(|\alpha_{T,k}[f]|^2 + |\beta_{T,k}[f]|^2\right).\end{aligned}$$

L'inégalité de Bessel est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

Remarque 2.15. Une conséquence de l'inégalité de Bessel est que

$$\lim_{|n|\to\infty} |c_{T,n}[f]| = \lim_{n\to\infty} |\alpha_{T,n}[f]| = \lim_{n\to\infty} |\beta_{T,n}[f]|\,,$$

ce qui signifie que le spectre d'une fonction f de $\mathrm{Regl}_{T\,\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, tant réel que complexe, "s'estompe" à l'infini ; c'est ce que l'on appelle la *propriété de Riemann-Lebesgue*.

2.4.2 Série de Fourier d'une fonction f

Si f est une fonction de $\mathrm{Regl}_{T\,\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on appelle la suite de fonctions

$$(S_n[T;f])_{n\geq 0}$$

(toutes ces fonctions sont définies, T périodiques et continues sur $\mathbb{R}$, ce sont d'ailleurs des *polynômes trigonométriques*) suite des *sommes partielles de Fourier* de f. Comme les $S_n[T;f]$ apparaissent comme le résultat d'un processus de capitalisation, on note aussi cette suite de fonctions $[S_n[T;f]]_{n\geq 0}$ et on l'appelle *série de Fourier de f*.

L'idée de base du mathématicien français Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830 (sur laquelle repose l'étude des phénomènes physiques oscillants) est qu'en un sens à préciser, une fonction T-périodique est "somme" de sa série de Fourier, ce qui signifie heuristiquement que tout phénomène physique 1-dimensionel T-périodique se réalise comme un empilement de T-harmoniques fondamentales complexes (resp. réelles), affectées de coefficients correspondant précisément aux coefficients de Fourier complexes (resp. réels). C'est cette idée heuristique que nous allons préciser de manière mathématiquement rigoureuse dans cette sous-section.

Pour simplifier ce que l'on fera par la suite, on supposera $T = 2\pi$ (cas auquel on peut toujours se ramener lorsque $f \in \mathrm{Regl}_{T\,\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ en remplacant f par $t \to f(Tt/2\pi)$) ; on notera alors $S_n[2\pi;f]$ simplement $S_n[f]$ (pour $n \in \mathbb{N}$). Un calcul très simple, basé sur l'utilisation de l'identité

$$(1 + X + \cdots + X^n)(1 - X) = 1 - X^{n+1}$$

et sur les formules classiques de trigonométrie, conduit à

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}\,, \qquad S_n[f](t) &= \sum_{k=-n}^{k=n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-iku}du\right) e^{ikt} \\ &= \int_0^{2\pi} f(u)\left[\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{k=n} e^{ik(t-u)}\right] du \\ &= \int_0^{2\pi} f(u)\left[\frac{1}{2\pi}\left(2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik(t-u)}\right) - 1\right)\right] du\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} f(u)\left[\frac{1}{2\pi}\left(2\mathrm{Re}\left[\frac{1-e^{i(n+1)(t-u)}}{1-e^{i(t-u)}}\right]-1\right)\right]du \\
&= \int_0^{2\pi} f(u)\left[\frac{1}{2\pi}\left(2\mathrm{Re}\left[e^{-i\frac{n(t-u)}{2}}\,\frac{\sin\frac{(n+1)(t-u)}{2}}{\sin\frac{t-u}{2}}\right]-1\right)\right]du \\
&= \int_0^{2\pi} f(u)\left[\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\cos\frac{n(t-u)}{2}\sin\frac{(n+1)(t-u)}{2}}{\sin\frac{t-u}{2}}-1\right)\right]du \\
&= \int_0^{2\pi} f(u)D_n(t-u)\,du\,,
\end{aligned}
$$

où D_n est la fonction continue 2π-périodique continue définie par

$$
D_n(t) := \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikt} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} & \text{si } t \neq 0 \text{ mod. } 2\pi \\ \frac{2n+1}{2\pi} \text{ si } t = 0 \text{ mod. } 2\pi\,. \end{cases}
$$

Cette fonction D_n, dont nous avons représenté le graphe pour diverses valeurs de n ($n = 1, 5, 10$) sur la figure 2.5, est appelée *noyau de Dirichlet* (d'ordre n), la terminologie faisant référence à l'analyste et théoricien des nombres allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859, qui l'introduisit et le manipula en 1828 ; le graphe sur $[-\pi, \pi]$ présente un lobe central et des lobes latéraux ; on remarque que l'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction D_n vaut 1, mais que cette fonction n'est pas positive, ce qui représentera, on le verra un peu plus loin, un handicap sérieux pour le comportement de la suite de fonctions $(S_n[f])_{n\geq 0}$ lorsque n tend vers l'infini.

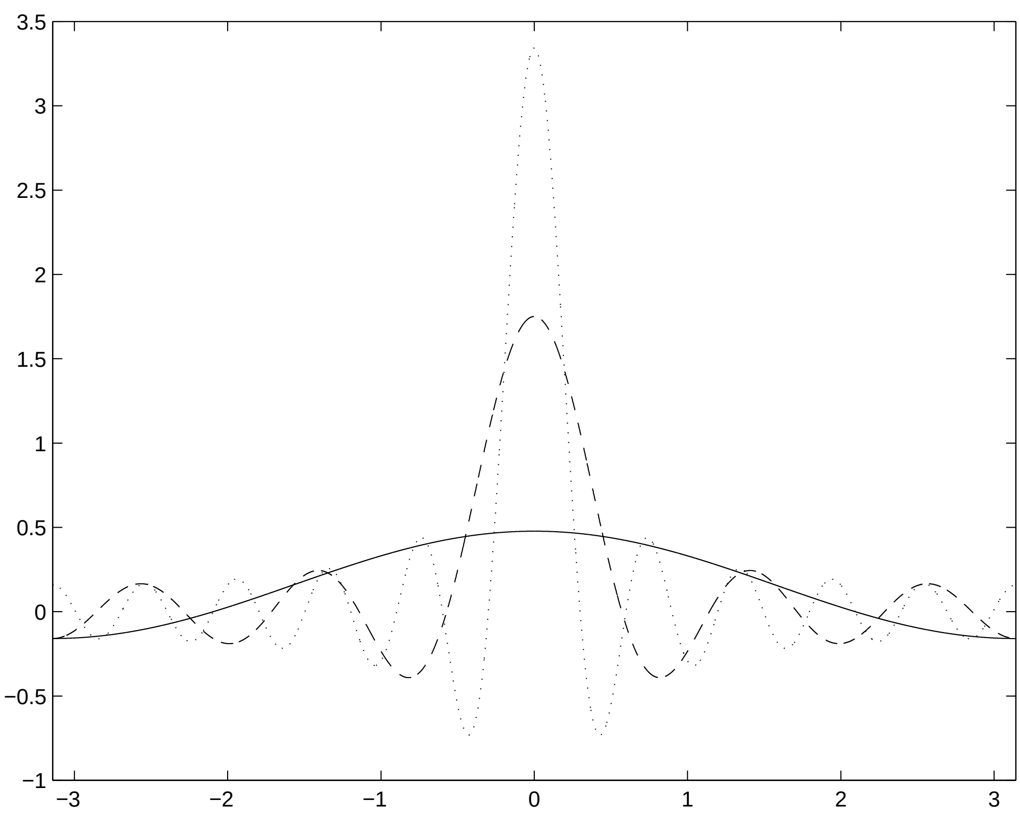

FIG. 2.5 – Graphes sur $[-\pi, \pi]$ de D_n, $n = 1, 5, 10$

Étant donnée une fonction f 2π-périodique et réglée sur $[0, 2\pi]$, la question se pose naturellement de savoir si la suite de fonctions $(S_n[f])_{n\geq 0}$ converge (et comment) vers la fonction f ; il s'agit là d'une question pratique importante car l'on peut voir la fonction $S_n[f]$ comme une fonction ayant même coefficients de Fourier complexes que f en deçà du seuil n, et ayant des coefficients de Fourier complexes nuls au dela, ce qui signifie concrètement que $S_n[f]$ est obtenue à partir de f en "tuant" les composantes "hautes-fréquences" présentes dans f. Si par exemple, f est le signal audio consistant en la lecture d'un vieil enregistrement, on connait bien cette opération pratique (le "repiquage" de vieux disques) qui consiste à gommer artificiellement le bruit correspondant précisément aux composantes hautes-fréquences.

Prenons pour f la fonction 2π-périodique f_0 valant 1 sur $[-\pi, 0[$ et 0 sur $[0, \pi[$; comme on le voit sur la figure 2.6, la suite $(S_n[f])_{n\geq 0}$ semble converger (mais seulement simplement, comme on le voit en regardant les graphes de $S_n[f]$ sur $[-\pi, \pi]$ pour $n = 10, 20$) vers la fonction 2π-périodique définie par

$$g(t) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } t = -\pi \text{ et } t = 0 \\ 1 \text{ si } t \in]-\pi, 0[\\ 0 \text{ si } t \in]0, \pi[\,. \end{cases}$$

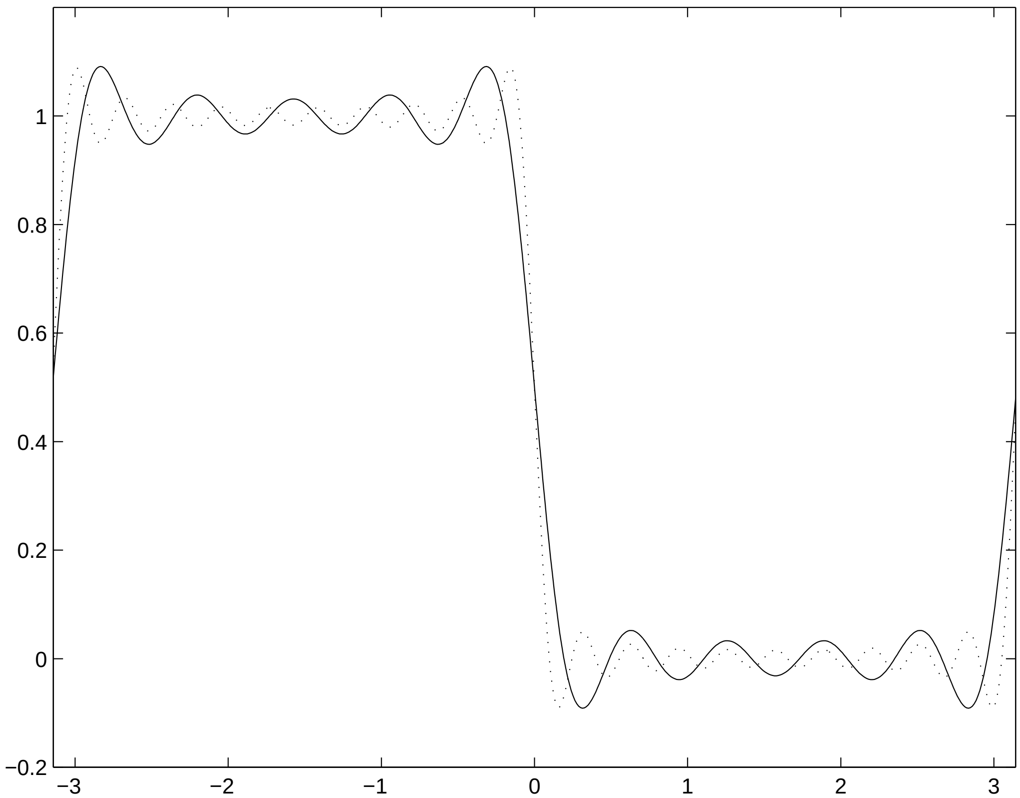

FIG. 2.6 – Phénomène de Gibbs pour la fonction f_0

Le fait qu'il n'y ait que simple convergence est un handicap pratique important : ce phénomène, dit <u>*phénomène de Gibbs*</u>, se traduit par un "rehaussement" de f au niveau de ses discontinuités lorsque l'on en "coupe" les composantes "hautes-fréquences" ; on parle en électronique d'<u>*aliasing*</u> et c'est un phénomène que l'on corrige grâce à l'effet Döppler.

Le résultat de convergence mis malgré tout en évidence ci-dessus (même si la convergence n'est pas uniforme comme le montre l'exemple utilisé sur la figure 2.6) est un cas particulier d'un résultat plus général, traduisant le comportement ponctuel de la suite $(S_n[f])_{n\geq 0}$; c'est le *théorème de Dirichlet* :

Théorème 2.13 **[théorème de Dirichlet]** *Soit f une fonction de* $\mathrm{Regl}_{T\,\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *et $(S_n([T;f]))_{n\geq 0}$ la suite de ses sommes partielles de Fourier ; soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que f ait une dérivée à droite et une dérivée à gauche en t_0 ; alors*

$$\lim_{n\to\infty} S_n[T;f](t_0) = \frac{f(t_0^-)+f(t_0^+)}{2}$$

où $f(t_0^-)$ (resp. $f(t_0^+)$) désigne la limite à gauche (resp. à droite) de f en t_0. La suite $(S_n[T,f])_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction

$$t \to \frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$$

sur l'ensemble des nombres réels t en lesquels f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Preuve. On suppose pour simplifier les choses que $T=2\pi$. Comme

$$\int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi} D_n(u)du = 1$$

et que D_n est paire, on peut écrire

$$\begin{aligned} & S_n[f](t_0) - \frac{f(t_0^-)+f(t_0^+)}{2} \\ = & \int_{-\pi}^{+\pi} \left(f(t_0+u) - \frac{f(t_0^-)+f(t_0^+)}{2}\right) D_n(u)\,du \\ = & \int_0^{\pi} \Big((f(t_0+u)-f(t_0^+)+f(t_0-u)-f(t_0^-))\Big) D_n(u)\,du \\ = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \Big((f(t_0+u)-f(t_0^+)+f(t_0-u)-f(t_0^-))\Big) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du\,. \end{aligned}$$

Mais la fonction g définie sur $[-\pi,\pi[$ par

$$u \to g(u) = \begin{cases} \frac{f(t_0+u)-f(t_0^+)+f(t_0-u)-f(t_0^-)}{\sin\frac{u}{2}} \text{ si } u\in]0,\pi[\\ 2(f'_d(t_0)-f'_g(t_0)) \text{ si } t=0 \\ 0 \text{ si } u\in[-\pi,0[\end{cases}$$

se prolonge par 2π-périodicité en une fonction de $\mathrm{Regl}_{2\pi\,\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$; d'après la propriété de Riemann-Lebesgue (remarque 2.15), la suite de nombres

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]du$$

tend vers 0 (comme la suite des coefficients de Fourier complexes ou les suites de coefficients de Fourier réels de la fonction g) et le théorème de Dirichlet en résulte donc. $\diamondsuit$

Exemple 2.12. Soit f la fonction 2π périodique définie par

$$f(t) = t - E(\frac{t}{2\pi})$$

où $E(u)$ désigne, si $u \in \mathbb{R}$, la partie entière de u, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à u ($E(.9999) = 0$, $E(1.0001) = 1$) ; les coefficients de Fourier complexes de f se calculent immédiatement ; on a :

$$c_0[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t dt = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_0^{2\pi} = \pi$$

et, en utilisant une intégration par parties

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*\,,\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{-int}dt = \Big[t\frac{e^{-int}}{-in}\Big]_0^{2\pi} - \frac{i}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{int}dt = \frac{i}{n}\,;$$

on a donc, en appliquant le théorème de Dirichlet :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}\,,\ t - E(t) = \pi + i \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{k} = \pi - 2 \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k}\ ;$$

pour $t \equiv 0$ (modulo 2π), le théorème de Dirichlet se retrouve bien car le second membre de l'identité ci-dessus vaut π, soit $(f(t^+) + f(t^-))/2$. Le théorème de Dirichlet permet, sur le même principe, de calculer la somme de séries du type séries trigonométriques dont la convergence se trouve de fait assurée par le critère d'Abel (c'est le cas dans l'exemple proposé ici).

On pourrait penser à juste titre que la raison du mauvais comportement de la suite des sommes partielles de Fourier (le fait que ce comportement se trouve par exemple entaché du désagréable phénomène de Gibbs) puisse être lié au fait que l'on coupe trop "brutalement" les T-harmoniques de f ayant une fréquence dépassant $2\pi n/T$; un moyen de couper plus "en douceur" est de considérer (pour $n \geq 1$) la suite de polynômes trigonométriques $(T_n[T;f])_{n\geq 1}$, où :

$$t \to T_n[T;f](t) := \sum_{k=-n-1}^{k=n-1} \Big(1 - \frac{|k|}{n}\Big)\, c_{T,k}[f]\, e^{2i\pi kt/T} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k[f;T](t)\,.$$

On appelle $T_n[T;f]$ la n-ème <u>*somme de Féjer*</u> de f (somme introduite en 1900 par le mathématicien hongrois Lipót Fejér, 1880-1959) ; cette somme de Féjer se calcule comme se calculait la n-ème somme partielle de Fourier $S_n[T;f]$; pour simplifier les choses, on se contentera de faire le calcul dans le cas $T = 2\pi$ (on note alors $T_n[f] = T_n[2\pi;f]$. On a

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}\,, \qquad T_n[f](t) &= \sum_{k=-(n-1)}^{k=n-1} \frac{n-|k|}{n}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-iku}du\Big)\, e^{ikt} \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(u)\Big[\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n-1}^{k=n-1}(n-|k|)e^{ik(t-u)}\Big]\, du \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(u)\Big[\frac{1}{2\pi}\Big(2\mathrm{Re}\,\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)e^{ik(t-u)}\Big) - n\Big)\Big]\, du\,.
\end{aligned}$$

Or, pour θ réel et non congru à 0 (modulo 2π)

$$2\mathrm{Re}\,\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)e^{ik\theta}\Big) - n = n\Phi_{n-1}(\theta) - \frac{d}{d\theta}[\Psi_{n-1}(\theta)]$$

avec

$$\Phi_{n-1}(\theta) := 2\,\mathrm{Re}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\Big] - 1 = \frac{\sin\Big[\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\theta\Big]}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

(voir le calcul du noyau de Dirichlet D_{n-1} fait précédemment) et

$$\begin{aligned}
\Psi_{n-1}(\theta) := 2\,\mathrm{Im}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\Big] &= 2\,\mathrm{Im}\left[\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right] \\
&= 2\,\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{(n-1)\theta}{2}}\,\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) \\
&= \frac{2\sin\frac{(n-1)\theta}{2}\,\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= -\frac{\cos\Big[\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\theta\Big] - \cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big)}{\sin\frac{\theta}{2}}\,.
\end{aligned}$$

On a donc, toujours pour θ réel et non congru à 0 (modulo 2π)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}[\Psi_{n-1}(\theta)] &= n\Phi_{n-1}(\theta) - \frac{\sin\Big(n-\frac{1}{2}\Big) + \sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \\
&\quad - \frac{\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\Big[\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\theta\Big]\right)}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \\
&= n\Phi_{n-1}(\theta) + \frac{\cos(n\theta)-1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \\
&= n\Phi_{n-1}(\theta) - \frac{\sin^2\frac{n\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Finalement, tous calculs faits, on trouve

$$T_n[f](t) = \int_0^{2\pi} f(u)K_n(t-u)\,du$$

avec

$$K_n(t) := \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-(n-1)}^{k=n-1}\Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)e^{int} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\,n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 & \text{si } t \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \\ \frac{n}{2\pi} \text{ si } t \equiv 0 \pmod{2\pi}\,. \end{cases} \tag{2.29}$$

Ce nouveau noyau K_n, dit aussi <u>*noyau de Féjer*</u> est toujours d'intégrale 1 sur $[0, 2\pi]$, mais a cette particularité essentielle qui le différencie du noyau de Dirichlet qui est le fait que K_n est un noyau positif. Pour les valeurs de $n = 5, 10$, on a représenté sur la figure 2.7 les graphes des fonctions K_n ; on remarque que, à valeurs de n égales, le lobe central est plus "enflé" qu'il ne l'est pour le noyau D_n de Dirichlet. Mais encore une fois, le phénomène le plus frappant est la positivité du noyau K_n.

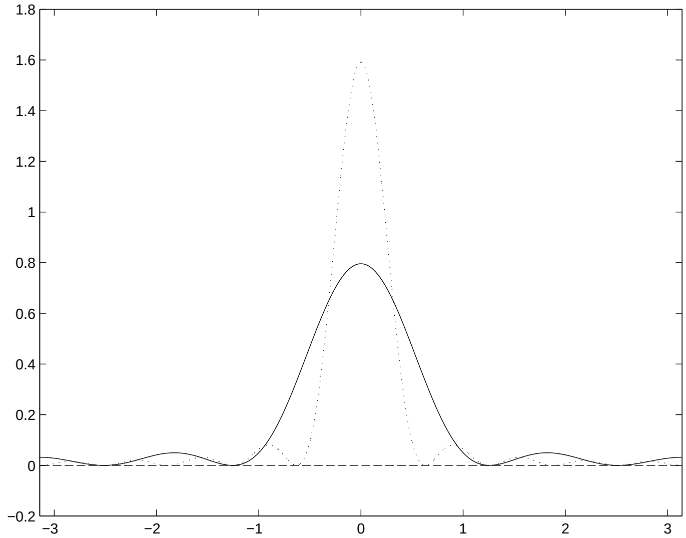

FIG. 2.7 – Graphes sur $[-\pi, \pi)$ de K_n, $n = 5, 10$

Si l'on utilise la suite $(T_n[f])_{n\geq 1}$ pour approcher une fonction 2π-périodique réglée f, on voit cette fois que l'aproximation, même si elle est plus lente, n'est plus cette fois entachée du phénomène de Gibbs ; c'est ce que l'on voit par exemple sur la figure 2.8, où nous avons approché par la suite $(T_n[f])_{n\geq 1}$ la fonction 2π périodique f_0 valant 1 sur $[-\pi, 0[$ et 0 sur $[0, \pi[$.

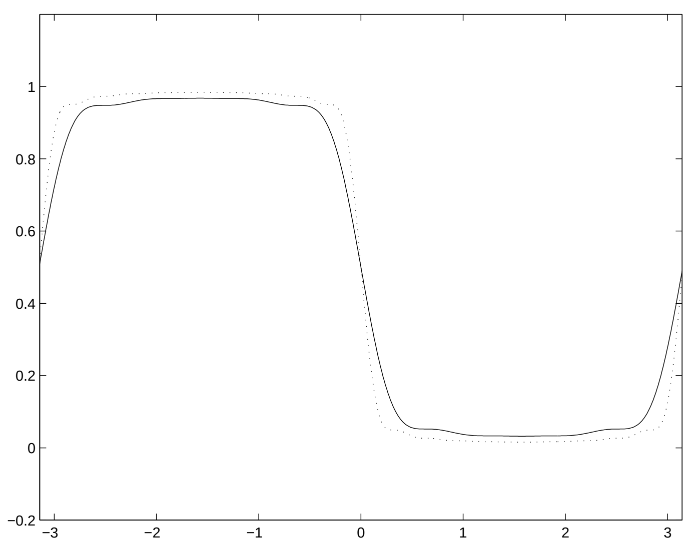

FIG. 2.8 – Graphes sur $[-\pi, \pi)$ de $T_n[f_0]$, $n = 5, 10$

De fait, on a dans ce cadre un résultat plus satisfaisant que le théorème de Dirichlet, à savoit le <u>*théorème de Féjer*</u> :

Théorème 2.14 *Soit f une fonction de* $\mathrm{Regl}_{T\,\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *; la suite de fonctions*

$$(T_n[T; f])_{n\geq 1}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\ g(t) = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))\,,$$

où $f(t^-)$ (resp. $f(t^+)$) désigne la limite à gauche (resp. à droite) de f en t. De plus, si f est continue et T-périodique, la suite de fonctions $(T_n[T;f])_{n\geq 1}$ (dite suite des *<u>sommes de Féjer</u> de f) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. On raisonne pour simplifier avec $T = 2\pi$; si l'on forme la différence entre $g(t)$ et $T_n[f](t)$, on remarque que, comme K_n est d'intégrale 1 sur $[-\pi,\pi]$ et est une fonction paire, cette différence s'écrit :

$$T_n[f](t) - g(t) = \int_0^\pi K_n(u)(f(t+u) + f(t-u) - 2g(t))\, du\,.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\epsilon, t) > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, \eta(\epsilon,t)]$, on ait

$$|f(t+u) + f(t-u) - 2g(t)| \leq \epsilon\,;$$

On écrit donc

$$\begin{aligned} T_n[f](t) - g(t) &= \int_0^{\eta(\epsilon,t)} K_n(u)(f(t+u) + f(t-u) - 2g(t))\, dt \\ &\quad + \int_{\eta(\epsilon,t)}^{\pi} K_n(u)(f(t+u) - f(t-u) - 2g(t))\, dt\,. \end{aligned}$$

Comme la fonction f est, sur $[t-\pi, t+\pi]$, limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, la fonction f est bornée en module par une constante M sur $[t-\pi, t+\pi]$; comme K_n est positive et d'intégrale 1 sur $[t-\pi, t+\pi]$, on a donc, vu l'expression explicite (2.29) de K_n,

$$\begin{aligned} |T_n[f](t) - g(t)| &\leq \epsilon + \frac{4M}{2\pi\, n} \int_{\eta(t,\epsilon)}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{u}{2}}\, du \\ &\leq \epsilon + \frac{4M}{2\pi\, n} \frac{\pi}{\sin^2 \frac{\eta(t)}{2}}\,; \end{aligned}$$

si n est assez grand, cette quantité est majorée par 2ϵ et peut donc être rendue arbitrairement petite, ce qui prouve bien que la suite $(T_n[f](t))_{n\geq 1}$ converge bien vers $g(t)$; on infirme ainsi la première partie du théorème de Féjer.

En ce qui concerne la seconde partie, on remarque que si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $g = f$ et de plus, puisque f est uniformément continue sur le segment fermé borné $[-2\pi, 2\pi]$, il existe, étant donné $\epsilon > 0$, un réel $\eta = \eta_\epsilon \in]0,\pi]$ tel que

$$\forall\, t \in [-\pi,\pi]\,,\ \forall\, u \in [0, \eta_\epsilon]\,,\ |f(t+u) + f(t-u) - 2f(t)| \leq \epsilon\,;$$

en reprenant les majorations ci-dessus, on voit que si n est choisi assez grand, alors

$$\forall\, t \in [-\pi,\pi]\,,\ |T_n[f](t) - f(t)| \leq 2\epsilon\,,$$

ce qui montre bien la convergence uniforme de $T_n[f]$ vers f sur $[-\pi,\pi]$, donc sur $\mathbb{R}$ (par périodicité). Ceci prouve le second volet du théorème de Féjer. $\diamondsuit$

On vient de voir que la l'approximation d'une fonction continue T périodique par ses sommes de Féjer $T_n[T;f]$ se faisait uniformément sur $\mathbb{R}$; mais on sait aussi (de par le théorème de Dirichlet) que si f admet de plus en tout point une dérivée à gauche et à droite, alors, il y a convergence simple de la suite des sommes de Fourier $(S_n[T;f])_{n\geq 0}$ vers la fonction $t \to (f(t^-)+f(t^+))/2$ qui dans ce cas (f continue) coïncide avec la fonction f. Les deux résultats se combinent en l'intéressant (et souvent bien utile) proposition suivante :

Proposition 2.9 *Soit f une fonction continue et T-périodique telle qu'il existe une subdivision*

$$a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_N = T$$

avec f de classe C^1 sur $[a_j, a_{j+1}]$ pour tout $j = 0, ..., N-1$ (on dit qu'une telle fonction est une fonction T-périodique <u>continue et C^1 par morceaux</u>) ; alors la série trigonométrique

$$[u_{T,n}(t)]_{n\geq 0}$$

où

$$u_{T,k}(t) := \begin{cases} \alpha_{T,0}[f] \text{ si } k=0 \\ \sqrt{2}\Big(\alpha_{T,k}[f] \cos\frac{2\pi kt}{T} + \beta_{T,k}[f] \sin\frac{2\pi kt}{T}\Big) \text{ si } k\geq 1 \end{cases}$$

(les sommes partielles de cette série sont les sommes de Fourier $t \to S_n[T;f](t)$) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et de somme la fonction f ; on peut dans ce cas écrire par conséquent sans aucune ambigüité les formules qu'attendait Fourier, à savoir :

$$\begin{aligned} \forall\, t\in\mathbb{R}\,,\ f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{T,k}[f]\, e^{2i\pi t/T} \\ &= \alpha_{T,0}[f] + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\alpha_{T,k}[f]\,\cos\frac{2\pi kt}{T} + \beta_{T,k}[f]\,\sin\frac{2\pi kt}{T}\Big)\,. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Preuve. On prend $T = 2\pi$ pour simplifier et l'on note dans ce cas $c_k[f]$ (resp. $\alpha_k[f]$ et $\beta_k[f]$) les coefficients de Fourier complexes (resp. réels). Pour $k \in \mathbb{Z}^*$, on obtient en utilisant la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} c_k[f] = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-2i\pi t}\,dt &= \sum_{k=0}^{N-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)e^{-ikt}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\left[f(t)\frac{e^{-ikt}}{(-ik)}\right]_{a_k}^{a_{k+1}} - \frac{i}{k}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)\,e^{-ikt}\,dt\right) \\ &= -\frac{i}{k}\,c_k[f'] + \frac{i}{k}(f(2\pi)-f(0)) \\ &= -\frac{i}{k}\,c_k[f'] \end{aligned}$$

où l'on note encore f' une fonction 2π-périodique régée définie par $g(t) = f'(t)$ hors des points de subdivision $a_0, ..., a_N$ (la valeur en ces points n'affecte pas la définition par une intégrale des coefficients de Fourier $c_k[f']$).

D'après l'inégalité de Bessel (théorème 2.12), on a, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^{k=n} |c_k[f]|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt\,;$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz réelle (voir chapitre 2 du cours d'algèbre, proposition 2.8), on a, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $q > p \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq |k| \leq q} |c_k[f]| &= \sum_{p \leq |k| \leq q} \frac{|c_k[f']|}{|k|} \leq \Big(\sum_{p \leq |k| \leq q} |c_k[f']|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{p \leq |k| \leq q} \frac{1}{k^2} \Big)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt \Big)^{1/2} \Big(\sum_{p \leq |k| \leq q} \frac{1}{k^2} \Big)^{1/2} ; \end{aligned}$$

il résulte de la convergence de la série de Riemann $[1/k^2]_{k \geq 1}$ que si p est assez grand, alors, pour tout $q > p$, on a

$$\sum_{p \leq |k| \leq q} |c_k[f]| \leq \epsilon ,$$

où ϵ est arbitraire ; ceci prouve la convergence de la suite à termes positifs

$$\Big(\sum_{k=-n}^{k=n} |c_k[f]| \Big)_{n \geq 0}$$

(car le critère de Cauchy pour les suites numériques est satisfait) et, par voie de conséquence, la convergence absolue des séries $[\alpha_k[f]]_{k \geq 0}$ et $[\beta_k[f]]_{k \geq 1}$: en effet, on a, pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \alpha_k[f] := \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) \, dt &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_k[f] + c_{-k}[f]) \\ \beta_k[f] := \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) \, dt &= \frac{i}{\sqrt{2}} (c_k[f] - c_{-k}[f]) , \end{aligned}$$

d'où les majorations :

$$\forall\, k \geq 1 , \ \max(|\alpha_k[f]|, |\beta_k[f]|) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (|c_k[f]| + |c_{-k}[f]|) .$$

La série trigonométrique $[u_{2\pi,n}(t)]_{n \geq 0}$, dont la n-ème somme partielle est

$$S_n[f] \ : t \to \alpha_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k[f] \cos(kt) + \beta_k[f] \sin(kt)) ,$$

est donc bien normalement convergente sur $\mathbb{R}$; on sait que la somme vaut f d'après le théorème de Dirichlet. La proposition est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

2.4.3 Conservation de l'énergie et théorème de Plancherel

La transformation de Fourier (transformant une fonction T-périodique en son spectre) correspond aussi à une transformation physique : c'est l'opération de diffraction au travers d'une lentille qui la matérialise en optique ; il est donc tout à fait naturel que cette transformation préserve l'énergie. Ce principe (de conservation d'énergie) se traduit mathématiquement par le théorème suivant, dont la seconde assertion est connue comme *formule de Plancherel* (du nom du mathématicien suisse Michaël Plancherel, 1885-1967)

Théorème 2.15 [Plancherel] *Soit $f \in \mathrm{Regl}_{T\,\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $(c_{T,n}[f])_{n\in\mathbb{Z}}$ son spectre complexe et $(S_n[T;f])_{n\geq 0}$ la suite de ses sommes de Fourier ; on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - S_n[T;f](t)|^2\, dt = 0\,; \tag{2.31}$$

de plus, on a la formule de Plancherel

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |c_{T,k}[f]|^2 &= |\alpha_{T,0}[f]|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_{T,k}[f]|^2 + |\beta_{T,k}[f]|^2) \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt\,,\end{aligned} \tag{2.32}$$

formule qui se polarise en la formule de Parseval : si f et g sont deux fonctions T-périodiques réglées,

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{T,k}[f]\,\overline{c_{T,k}[g]} &= \alpha_{T,0}[f]\,\overline{\alpha_{T,0}[g]} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_{T,k}[f]\,\overline{\alpha_{T,k}[g]} + \beta_{T,k}[f]\,\overline{\beta_{T,k}[g]}) \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\, dt\,.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Remarque 2.16. C'est au mathématicien français Marc Antoine Parseval des Chênes, 1755-1836, dont d'ailleurs on connait très peu de la vie, que revient en 1799 l'intuition de la formule qui porte son nom ; la formule de Plancherel concerne plutôt, elle, la théorie relative à la transformation intégrale de Fourier (point de vue continu), et non comme ici celle relative aux séries de Fourier (point de vue discret) ; on mélange souvent les deux noms, auxquels il convient d'ajouter bien sûr celui du mathématicien allemand Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846, associé à l'inégalité que nous avons déjà mentionné (théorème 2.12).

Preuve. On remarque tout d'abord que la première assertion implique les deux autres (en fait la seconde, car la troisième assertion qui est la formule de Parseval s'obtient en identifiant les deux formes sesquilinéaires correspondant à deux formes hermitiennes égales d'après la formule de Plancherel (2.32)). En effet, d'après le théorème de Pythagore (cette idée a déjà été exploitée dans la preuve de l'inégalité de Bessel, théorème 2.12), on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt &= \frac{1}{T}\int_0^T |S_n[T;f](t)|^2\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T |f - S_n[T;f](t)|^2\, dt \\ &= \sum_{k=-n}^{k=n} |c_{T,k}[f]|^2 + \frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - S_n[T;f](t)|^2\, dt\,;\end{aligned}$$

il en résulte que (2.31) implique bien (2.32), et donc (2.33).

On remarque ensuite que si f est une fonction T-périodique continue, alors (2.31) est vrai : ceci résulte du théorème de Féjer et du principe des moindres carrés ; en effet, d'après le principe des moindres carrés (voir le cours d'algèbre, remarque II.10 du chapitre 2, après l'énoncé du théorème de Pythagore), on a, puisque $T_n[T;f]$ appartient au $\mathbb{C}$-sous espace des fonctions réglées T-périodiques engendré par les $t \to e^{2i\pi kt/T}$, $-(n-1) \leq k \leq n-1$ et que $f - S_{n-1}[T;f]$ est orthogonal à ce sous-espace pour le produit scalaire $\langle\, , \rangle_T$, l'inégalité (inspirée du principe géométrique des obliques inégales) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - S_{n-1}[T;f](t)|^2\, dt &\leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - T_n[T;f](t)|^2 dt \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - T_n[T;f](t)|^2\,;\end{aligned}$$

or le théorème de Féjer, assurant la convergence uniforme de la suite $(T_n[T;f])_{n\geq 1}$ vers f sur $\mathbb{R}$, nous permet donc d'infirmer dans ce cas l'assertion (2.31).

Pour conclure en général, on raisonne comme suit : si f est une fonction T-périodique réglée, il existe, pour tout $\epsilon > 0$, une fonction continue T-périodique f_ϵ telle que

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - f_\epsilon(t)|^2\, dt \leq \epsilon^2 .$$

Admettons ce résultat et notons $\| \ \|_T$ la racine carrée de $\| \ \|_T^2$. Toujours à cause de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (appliquée avec cette fois le produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle_T$), on a

$$\begin{aligned}
\|f - S_n[T;f]\|_T &\leq \|f - f_\epsilon\|_T + \|f_\epsilon - S_n[T;f]\|_T \\
&\leq \epsilon + \|f_\epsilon - S_n[T,f_\epsilon]\|_T + \|S_n[T,f_\epsilon] - S_n[T;f]\|_T \\
&\leq \epsilon + \|f_\epsilon - S_n[T,f_\epsilon]\|_T + \|S_n[T,f_\epsilon - S_n]\|_T \\
&\leq \epsilon + \|f_\epsilon - S_n[T;f_\epsilon\|_T + \|f - f_\epsilon\|_T \\
&\leq 2\epsilon + \|f_\epsilon - S_n[T;f_\epsilon]\|_T
\end{aligned}$$

(pour passer de la ligne 3 à la ligne 4, on a utilisé l'inégalité de Bessel du théorème 2.12). Si maintenant on choisit n assez grand, on sait, puisque f_ϵ est T-périodique continue, que l'on réalise

$$\|f_\epsilon - S_n[f;T]\|_T \leq \epsilon ;$$

au bilan final, pour un tel choix de n ($n \geq N(\epsilon)$), on réalise

$$\|f - S_n[T;f]\|_T \leq 3\epsilon ,$$

ce qui prouve bien pour f l'assertion (2.31).

Il reste enfin à montrer que, si $f \in \mathrm{Regl}_{T\,\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, et si $\epsilon > 0$, il existe bien une fonction continue T-périodique f_ϵ telle que $\|f - f_\epsilon\|_T \leq \epsilon$; comme f est limite uniforme sur $[0,T]$ d'une suite de fonctions en escalier, il est clair qu'il suffit de montrer le résultat si f est en escalier, et, plus simplement, si f est la fonction indicatrice d'un intervalle $[\alpha,\beta]$ de $[0,T]$ (c'est-à-dire la fonction valant 1 sur l'intervalle et 0 ailleurs). Sur la figure 2.9, nous avons indiqué comment procéder (on approche de l'intérieur par une suite de "fonctions trapèze" sur $[0,T]$ une telle fonction, puis on prolonge par T-périodicité).

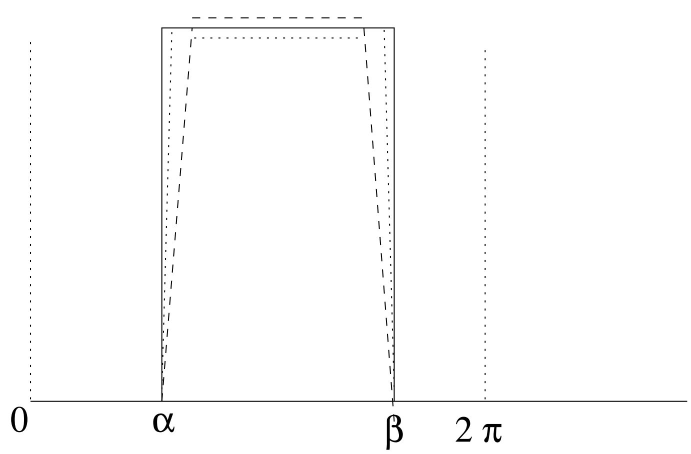

FIG. 2.9 – Approximations d'une fonction indicatrice

Le résultat est ainsi démontré, ce qui achève la preuve du théorème. $\diamondsuit$

Exemple 2.13. Reprenons l'exemple de la fonction 2π-périodique f traitée dans l'exemple 2.12. En appliquant la formule de Plancherel, on trouve

$$\pi^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{4\pi^2}{3}\,;$$

il en résulte donc la formule

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Il est possible d'obtenir ainsi des formules explicites pour les valeurs de la fonction zeta de Riemann

$$x > 1 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$$

aux points $x = 2, 4, ...$, mais malheureusement pas aux points $x = 3, 5, ...$.

FIN DU CHAPITRE 2 ET DU COURS D'ANALYSE