CHAPITRE 9

Intégration ; calcul de primitives

Notion d’intégrale :

Comment calculer l’aire d’un sous-ensemble borné A du plan ?

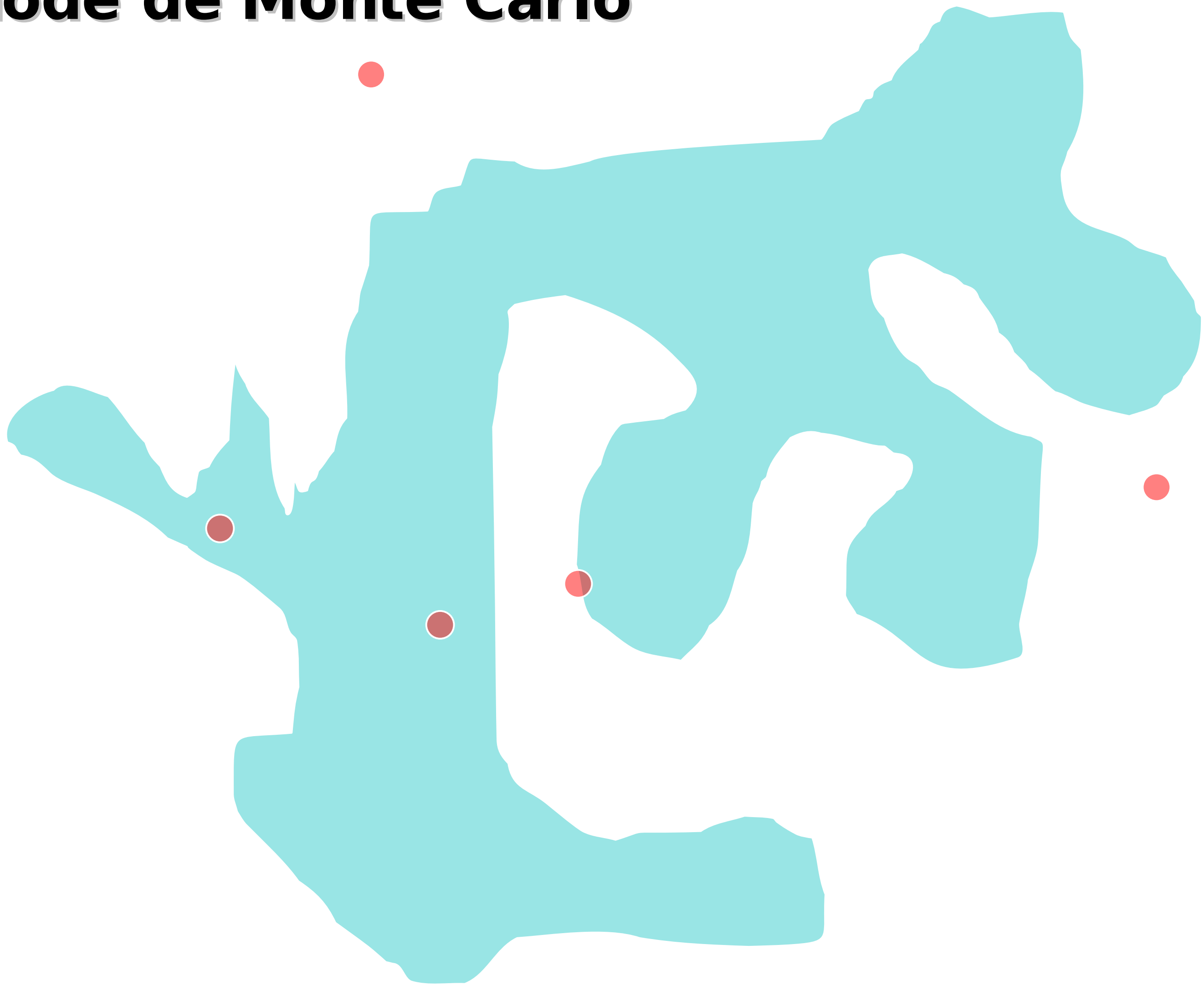
-**Les méthodes « probabilistes » (Monte Carlo)**

-**Les méthodes numériques**

-**Les formules exactes**

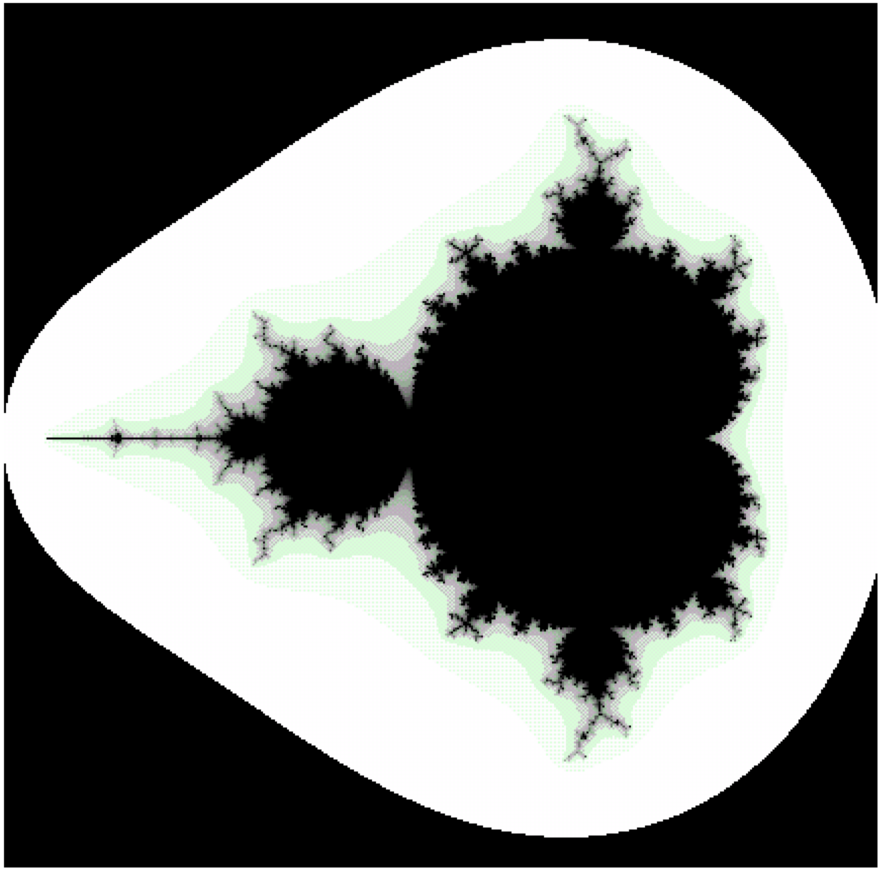
Le cas des unions de rectangles

Méthode de Monte Carlo

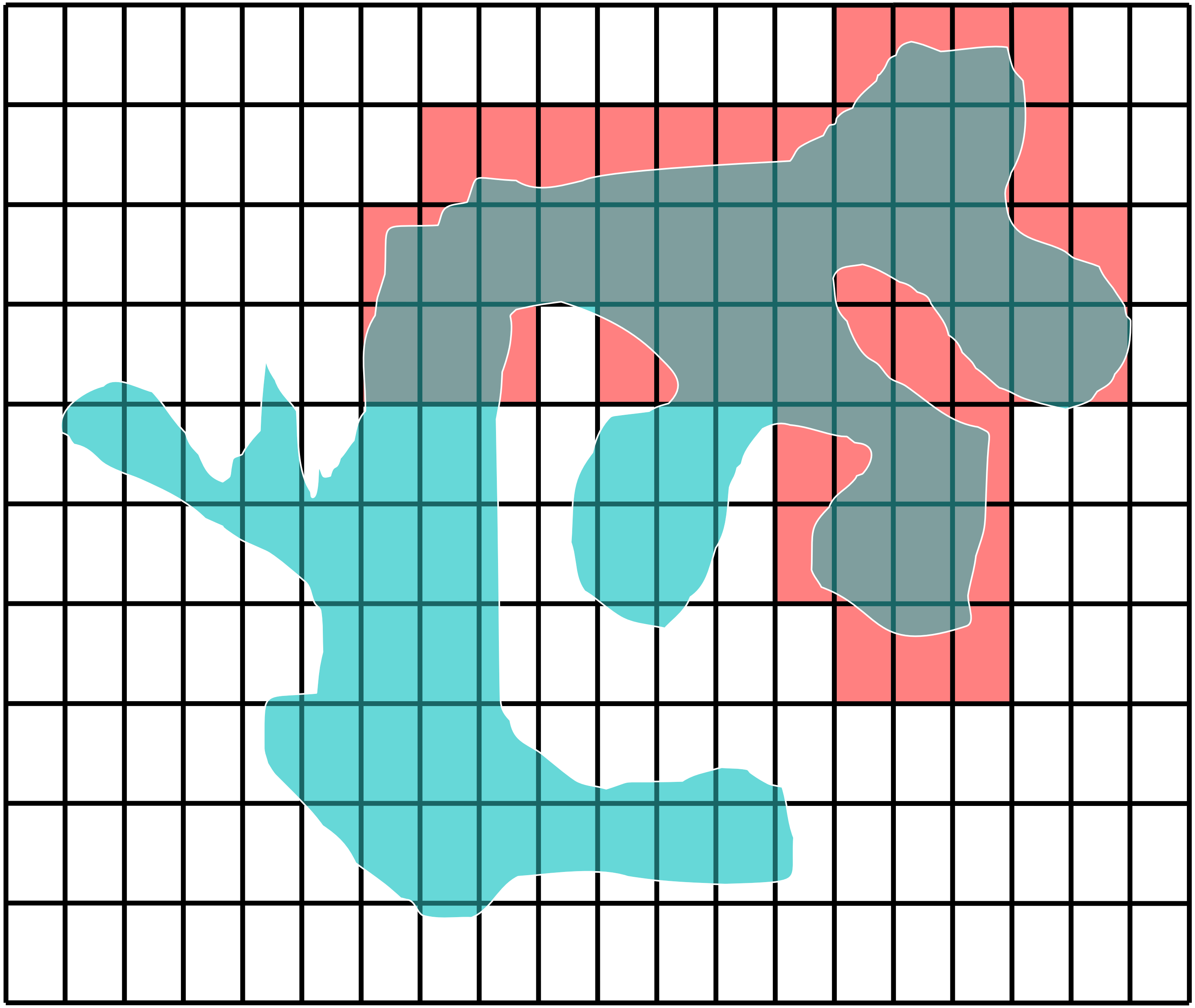


Nombre de points tombant dans D/ Nombre de points « jetés »

Un exemple d'ensemble fractal (de la difficulté de mesurer tout et n'importe quoi !)



Mesure « extérieure » d'un ensemble borné du plan



$\int^*(A)$ = inf (mesure des unions de pavés recouvrant A)

On peut « mesurer » A si et seulement si :

Pour tout $\varepsilon>0$,

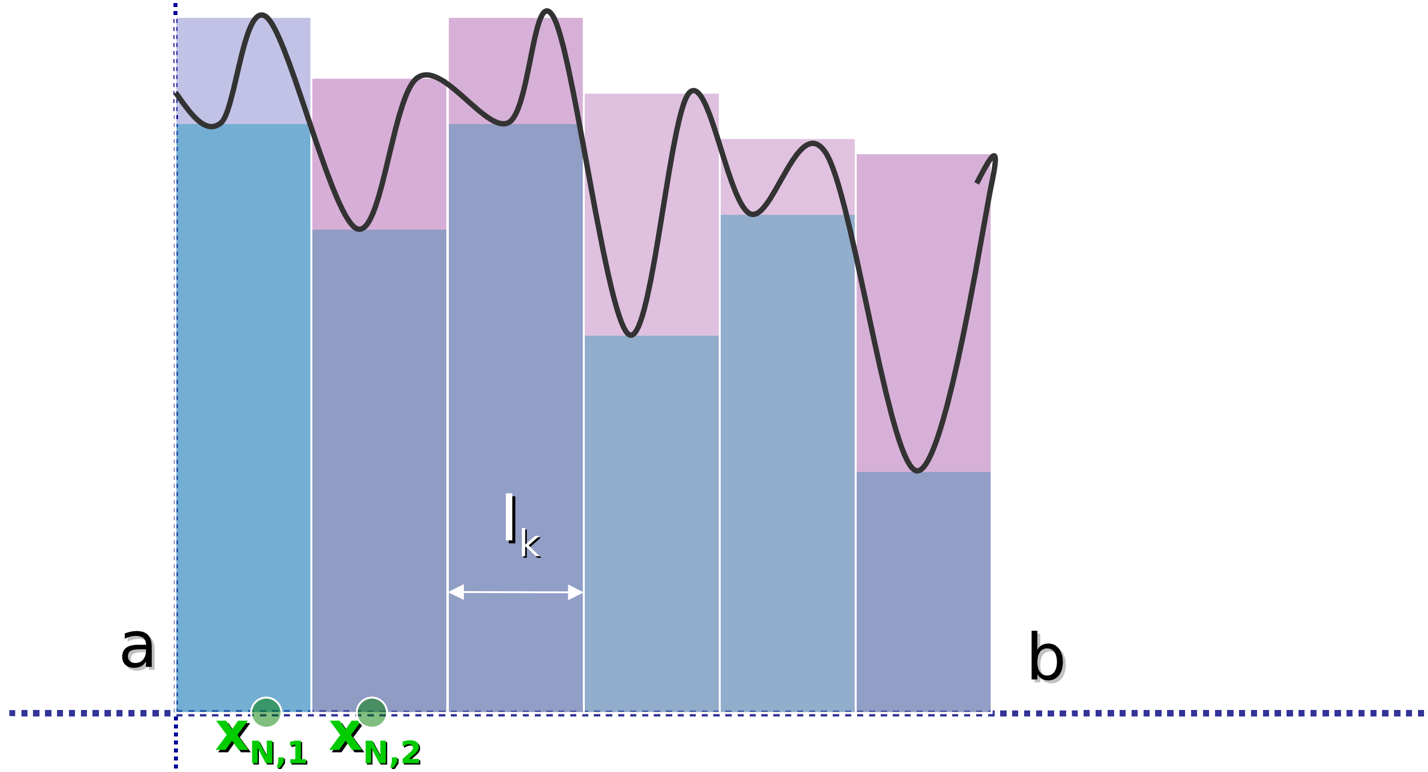
il existe une union de pavés R_ε telle que :

$$\int^* (A \,\Delta\, R_\varepsilon) < \varepsilon$$

$$\boxed{\text{aire }(A) = \inf \left(\int^*(\text{unions de pavés contenant } A)\right)}$$

Le cas des fonctions continues positives sur un segment [a,b]

$$\frac{b-a}{N} \sum_k \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\right) \to 0$$



$$\frac{b-a}{N} \Big(f(x_{N,1}) + f(x_{N,2}) + \ldots + f(x_{N,N}) \Big)$$

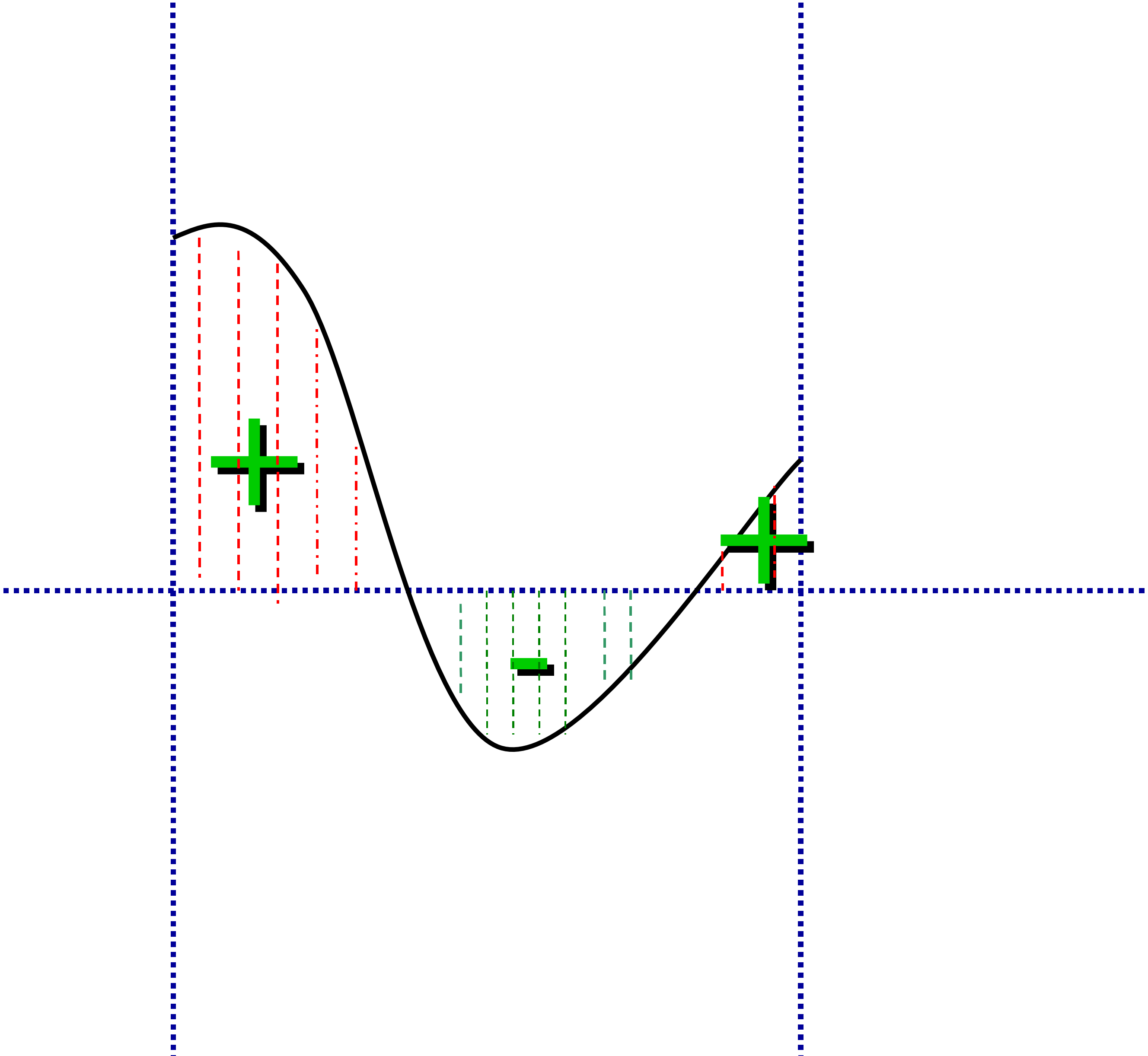
$$\to \text{aire de } \Big\{ (x,y) \; ; \; 0 \leq y \leq f(x) \Big\}$$

Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur [a,b]

$$f = \sup(f,0) - \sup(-f,0) = f^+ - f^-$$

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt := \text{aire}\,\{(x,y);\ 0 \leq y \leq f^+(x)\} - \text{aire}\,\{(x,y)\ ;\ 0 \leq y \leq f^-(x)\}$$

$$\int_a^b f(t)\,dt$$



Le cas des fonctions à valeurs complexes
f = Re (f) + i Im (f)

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\,(f(t))\,dt$$

Propriétés de l'intégrale

linéarité

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, dt + \mu \int_a^b g(t)\, dt$$

monotonie

$$f \leq g \text{ sur } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt$$

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b | f(t) |\, dt$$

Relation de Chasles

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b g(t)\,dt$$

avec la convention : $\int_x^y f(t)\,dt = -\int_y^x f(t)\,dt$

lorsque $y < x$

(f continue sur I , a, b, c étant trois points de I)

Le théorème « fondamental » de l'analyse

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de ℝ et a un point de I . La fonction :

$$x \in I \qquad F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable sur I, de dérivée F'=f sur I

$$\boxed{\textbf{F primitive de f sur I}}$$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, de dérivée continue sur I
Soit [a,b] un segment inclus dans I ; alors :

$$\boxed{\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)}$$

Application 1 : la formule d’intégration « par parties »

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions dérivables sur I, avec f’ et g’ aussi continues sur I ;
si [a,b] est un segment de I :

$$\int_a^b f'(t)\, g(t)\, dt = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b f(t)\, g'(t)\, dt$$

Application 2 : la formule de changement de variables

Soit I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$

Soit u : I → J , ~~strictement monotone~~**, dérivable et de dérivée continue sur [a,b] ⊂ I avec c := u(a), d:= u(b) ; alors:**

$$\int_{c=u(a)}^{d=u(b)} f(s)\, ds = \int_a^b f(u(t))\; u'(t)\, dt$$

pour toute fonction continue f : J → $\mathbb{R}$

Quelques exemples d'application de ces méthodes

- Expressions rationnelles en les fonctions trigonométriques
- Expressions rationnelles en les fonctions trigonométriques hyperboliques
- Fonctions dont une dérivée à un certain ordre est une fraction rationnelle
- Fonctions du type $t \qquad t^n \exp(\lambda t)$
- Fonctions du type $t \qquad t^n \cos(\omega t)$ ou $t \qquad t^n \sin(\omega t)$
- Fonctions du type $x \qquad F(x, (ax^2+bx+c)^{1/2})$

Expressions rationnelles en les lignes trigonométriques

- $\cos(t) = 2\cos^2(t/2) - 1$

  $= (1-u^2)/(1+u^2)$

- $\sin(t) = 2\sin(t/2)\cos(t/2)$

  $= 2u/(1+u^2)$

$$\boxed{\begin{array}{c} t \in \,]-\pi, \pi[\\ u = \tan(t/2)\ ,\quad t = 2\,\mathrm{Arctan}\ u \end{array}}$$

$$[a,b] \subset \,]-\pi, \pi[$$

$$u = \tan(t/2)$$

$$t = 2 \operatorname{Arctan} u$$

$$\int_{\underset{\tan(a/2)}{\cancel{a}}}^{\overset{\tan(b/2)}{\cancel{b}}} \frac{P\left(\overset{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{\cancel{\cos t}}, \overset{\frac{2u}{1+u^2}}{\cancel{\sin t}}\right)}{Q\left(\underset{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{\cancel{\cos t}}, \underset{\frac{2u}{1+u^2}}{\cancel{\sin t}}\right)} \overset{\frac{2du}{1+u^2}}{\cancel{dt}}$$

Linéarisation des polynômes trigonométriques

$$P(\cos\theta, \sin\theta) = a_0 + \sum_{j=1}^{j=N} \left(a_j \cos(k_j\,\theta) + b_j \sin(k_j\,\theta)\right)$$

$$\int P(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = a_0\,\theta + \sum_{j=1}^{j=N} \frac{a_j \sin(k_j\,\theta) - b_j \cos(k_j\,\theta)}{k_j}$$

Expressions rationnelles
en les lignes trigonométriques hyperboliques

$[a,b] \subset \mathbb{R}$

$u = \exp(t)$

$t = \log u$

$$\int_{\cancel{a}\ \exp(a)}^{\cancel{b}\ \exp(b)} \frac{P\left(\cancel{\cosh t}\ \frac{u+(1/u)}{2},\ \cancel{\sinh t}\ \frac{u-(1/u)}{2}\right)}{Q\left(\cancel{\cosh t}\ \frac{u+(1/u)}{2},\ \cancel{\sinh t}\ \frac{u-(1/u)}{2}\right)}\ \cancel{dt}\ \frac{du}{u}$$

Intégrales abéliennes

$b^2 - 4\,ac$

$$\int F\left(x \,,\, \sqrt{\cancel{ax^2 + bx + c}} \right) dx$$

$$a\left[(x+b/2a)^2 - \Delta/4a^2\right]$$

- $a > 0 \,,\ \Delta = -\delta^2 < 0$

  $x = -b/2a + (\delta/2a)\sinh u$

- $a < 0 \,,\ \Delta = \delta^2 > 0$

  $x = -b/2a + (\delta/2a)\cos u$

  ou

  $x = -b/2a - (\delta/2a)\sin u$

- $a > 0 \,,\ \Delta = \delta^2 > 0$

  $x = -b/2a + (\delta/2a)\cosh u$

  ou

  $x = -b/2a - (\delta/2a)\cosh u$

Primitives de fractions rationnelles

deg R < deg (Q)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=0}^{k=N} a_k\, x^k + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \sum_{k=0}^{k=N} \frac{a_k\, x^{k+1}}{k+1} + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx \quad ?$$

<u>Cas particuliers</u> : deg (Q) = 1 et deg (Q) =2

Premier cas : $b^2-4ac > 0$

$$\int \frac{\alpha\, x + \beta}{\cancel{a x^2 + bx + c}} \, dx$$

$$a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

$$\|$$

$$\int \left(\frac{u_1}{x - x_1} + \frac{u_2}{x - x_2} \right) dx$$

$$u_1 \log |x - x_1| \quad + \quad u_2 \log |x - x_2|$$

Second cas : $b^2-4ac = 0$

$$\int \frac{\alpha \;\; x + \beta}{\substack{\cancel{a x^2 + bx \; + c} \\ a\,(x - x_0)^2}}\, dx$$

$$\parallel$$

$$\int \cancel{\frac{\alpha}{a(x-x_0)}} \quad + \quad \cancel{\frac{\alpha\, x_0 + \beta}{a\,(x - x_0)^2}}\, dx$$

$$\frac{\alpha \log |x-x_0|}{a} \quad + \quad \frac{-\,(\alpha x_0 + \beta)}{a\,(x-x_0)}$$

Troisième cas : $b^2-4ac = -\delta^2 < 0$

$$\int \frac{\alpha \; x + \beta}{\cancel{a\,x^2 + bx + c}} \, dx$$

$$a\left[\left(x + (b/2a)\right)^2 + (\delta^2/4a^2)\right]$$

$$\|$$

$$u \int \cancel{\frac{x + (b/2a)}{(x + (b/2a))^2 + (\delta^2/4a^2)}} + \cancel{\frac{v}{(x+(b/2a))^2 + (\delta^2/4a^2)}} \, dx$$

$$\frac{u \log\left[\,(x+(b/2a))^2 + (\delta^2/4a^2)\right]}{2} + \frac{2av}{\delta} \; \mathrm{Arctan} \quad 2a \, \frac{x + (b/2a)}{\delta}$$

Fin du chapitre 9