

DM n° 2

Exercice 1

Calculer

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x}{x - \sin x}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln(1 + 1/x))$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - e^{-x^2}}{(\sin(x))^2}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh(x) \cos(x) - 2}{x^4}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{(\sin(x))^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$$

Exercice 2

Montrer que la partie régulière d'un développement limité en 0 d'une fonction paire ne contient que des termes de degré pair.

Exercice 3

1. Etudier la parité de la fonction $\tan(x)$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Que peut-on dire du DL de $\tan(x)$ en 0 ?
2. Calculer le DL de $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 5.
3. On pose

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$$

pour $x \in] -\pi/2, 0[\cup] 0, \pi/2[$. Montrer que f admet une limite en 0 que l'on calculera.

4. D'après la question précédente, f est prolongeable par continuité en 0. Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 4

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x) = \frac{\operatorname{argsh}(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

1. Montrer que f satisfait l'équation différentielle :

$$(x^2 + 1)y'(x) + xy(x) = 1$$

2. En déduire le développement limité de f à l'ordre 7 en 0.