UE MAT401

Devoir Surveillé 1, Mercredi 16 Mars 2005

Durée: 1 heure 20 mn

Texte et Corrigé

Exercice 1.

Soient a et b deux nombres strictement positifs. Discuter suivant les valeurs de a et b la nature (convergence ? divergence ? rien du tout ?) de la série numérique de terme général

$$u_n(a,b) := \Big(\frac{n+a}{n+b}\Big)^{n^2}\ ,\ n \geq 0\,.$$

On a, pour n tendant vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\frac{n+a}{n+b} &= \Big(1+\frac{a}{n}\Big)\times\frac{1}{1+\frac{b}{n}}\\
&= \Big(1+\frac{a}{n}\Big)\times\Big(1-\frac{b}{n}+o(1/n)\Big)\\
&= 1+\frac{a-b}{n}-\frac{ab}{n^2}+o(1/n)\\
&= 1+\frac{a-b}{n}+o(1/n)\,.
\end{aligned}$$

On a, en composant les développements limités,

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{n+a}{n+b}\Big)^{n^2} &= \exp\Big(n^2\log\Big(1+\frac{a-b}{n}+o(1/n)\Big)\Big)\\
&= \exp\Big(n(a-b)+o(n)\Big)\,.
\end{aligned}$$

On a alors la discussion suivante :

- Si $a-b>0$, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n+a}{n+b}\Big)^{n^2} = +\infty\,.$$
La série de terme général $u_n(a,b)$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0 et qu'il s'agit d'une série à termes positifs.

- Si $b-a<0$, il existe n_0 tel que
$$(n\geq n_0) \Longrightarrow \Big[\Big(\frac{n+a}{n+b}\Big)^{n^2} = \exp\Big(-n(b-a)+o(n)\Big) \leq \exp\Big(-n\frac{b-a}{2}\Big)\Big]\,.$$

Le terme général $u_n(a,b)$ est majoré par le terme général d'une série géométrique convergente ; en vertu du critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on peut affirmer que dans ce cas la série $[u_n(a,b)]_{n\geq 0}$ est convergente.

- Si $a=b$, on a $u_n(a,b)=1$ pour tout $n\geq 0$. La série $[u_n(a,b)]_{n\geq 0}$ est encore dans ce cas une série divergente (la somme partielle S_n vaut n).

Remarque. On aurait pu aussi étudier le comportement de la suite $(u_n(a,b)^{1/n})_{n\geq 1}$ et remarquer que cette suite tendait vers e^{a-b} ; en appliquant la règle de Cauchy, on voit donc que la série $[u_n(a,b)]_{n\geq 0}$ converge si $e^{a-b}<1$ (*i.e* $a<b$) et diverge si $e^{a-b}>1$ (*i.e* $a<b$) ; le cas restant $a=b$ est immédiat ($u_n(a,b)=1$ pour tout n, la série est donc divergente.

Exercice 2.

a. *Rappeler quelle est la nature (convergence ? divergence ? rien du tout ?) de la série harmonique $[1/n]_{n\geq 1}$ et donner un équivalent simple, lorsque n tend vers $+\infty$, de*

$$v_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

La série harmonique $[1/n]_{n\geq 1}$ est une série divergente. Comme la fonction $t \longmapsto 1/t$ est décroissante sur $[1,+\infty[$, le critère de comparaison entre séries et intégrales s'applique et l'on a l'équivalence, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \int_1^n \frac{dt}{t} = \log n\,.$$

b. *Soit θ un nombre réel. Quelle est la nature (convergence ? divergence ? rien du tout ?) de la série de terme général*

$$u_n = \frac{1+(\log n)\sin(n\theta)}{n}\,,\ n\geq 1\ ?$$

La fonction

$$f\ : x \longmapsto \frac{\log x}{x}$$

est décroissante sur $[e,+\infty[$ car sa dérivée sur $]0,+\infty[$ vaut

$$\frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2} \leq 0 \text{ si } x\geq e\,.$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n}=0$$

et les sommes partielles de la série

$$\Big[\sin(k\theta)\Big]_{k\geq 0}$$

sont bornées : en effet, ceci est trivialement vrai si $\theta=0$ (modulo 2π) et vrai aussi si $\theta\not\equiv 0$ modulo 2π car dans ce cas

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta) &= \mathrm{Im}\Big[\sum_{k=1}^{n}e^{ik\theta}\Big]\\ &= \mathrm{Im}\Big[\frac{1-e^{(n+1)i\theta}}{1-e^{i\theta}}\Big],\end{aligned}$$

donc

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta)\Big|\leq\frac{2}{|1-e^{i\theta}|}\quad\forall n\geq 1\,.$$

Le premier critère d'Abel s'applique donc et l'on peut affirmer que la série numérique

$$\Big[\frac{\log n}{n}\sin(n\theta)\Big]_{n\geq 1}$$

est convergente. Comme la série de terme général $[1/n]_{n\geq 1}$ est divergente, la série de terme général

$$u_n=\frac{1+(\log n)\sin(n\theta)}{n}=\frac{1}{n}+\frac{\log n}{n}\sin(n\theta)$$

est donc aussi divergente (le terme général étant la somme du terme général d'une série convergente et du terme général d'une série convergente).

Exercice 3.

a. *La fonction définie par*

$$f(t)=\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}$$

est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$ *? (dans tous les cas, justifier le résultat).*

Au voisinage de $t=0$, on a

$$\sin t\sim t\,.$$

Il existe donc une constante C telle que

$$\forall t\in]0,1]\,,\ \Big|\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\Big|\leq\frac{C}{\sqrt{t}}\,.$$

Comme la fonction $t \longmapsto 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0,1]$ (critère de Riemann), le critère de comparaison nous assure que l'intégrale

$$\int_0^1 \Big|\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\Big|\, dt$$

est convergente, ce qui prouve bien la convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt\,.$$

D'autre part

$$\forall t \geq 1\,, \qquad \Big|\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\Big| \leq \frac{1}{t^{3/2}}\,.$$

Comme la fonction $t \longmapsto t^{-3/2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (critère de Riemann), le critère de comparaison encore nous assure que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \Big|\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\Big|\, dt$$

est convergente, ce qui prouve bien la convergence de l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt\,.$$

Comme les deux intégrales impropres sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ sont convergentes, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt$$

est convergente.

b. *Quelle est la nature asymptotique (convergence ? divergence ? rien du tout ?) de la série numérique de terme général*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\,,\ n \geq 1\ ?$$

C'est une série convergente en vertu du critère des séries alternées qui s'applique ici puisque la suite $(1/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ est une suite décroissante tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

c. *Montrer que la fonction*

$$t \in]0,+\infty[\to \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$$

a une limite (que l'on calculera) en $t=0$. Prouver que l'intǵrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$$

est une intégrale impropre semi-convergente ; la fonction définie par

$$f(t) := \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$$

est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$ *? (justifier le résultat).*

Au voisinage de $t=0$, on a

$$\sin t \sim t\,.$$

Par conséquent,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0\,.$$

Soit

$$u_k := \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\, dt\,,\ \ k=0,1,...$$

La suite $(u_k)_{k\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant car, pour tout $k\in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt \leq u_k \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt\,,$$

soit, puisque

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt = \int_0^{\pi} \sin t\ = [-\cos t]_{-1}^{1} = 2\,,$$

$$\frac{2}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq u_k \leq \frac{2}{\sqrt{k\pi}}\,.$$

La série de terme général $(-1)^k u_k$, $k\geq 0$ est donc une série convergente en vertu du critère des séries alternées. Or, puisque $\sin t = (-1)^k |\sin t|$ sur $[k\pi,(k+1)\pi]$, on a, pour tout $x>0$,

$$\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \sum_{k=0}^{E[x/\pi]} (-1)^k u_k + \int_{\pi E[x/\pi]}^{x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt\,,$$

$E[x/\pi]$ désignant la partie entière de x/π, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x/π. Or

$$\Big|\int_{\pi E[x/\pi]}^{x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt\Big| \leq \int_{\pi E[x/\pi]}^{x} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\, dt \leq \frac{1}{\sqrt{\pi E[x/\pi]}} \int_0^{\pi} |\sin t|\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi E[x/\pi]}}\,. \tag{$\dagger$}$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi E[x/\pi]}} = 0\,, \qquad (\dagger\dagger)$$

on a

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k\,,$$

ce qui prouve la semi-convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

(c'est une intégrale sur $[0,+\infty[$ car il n'y a aucun problème en $t=0$ vu que la fonction f sous l'intégrale a une limite en $t=0$ d'après le (c)).
Par contre, la fonction

$$t \longmapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$$

n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ car la série de terme général u_k est divergente ($u_k \sim 2/\sqrt{k\pi}$ et le critère de Riemann s'applique pour assurer la divergence de la série $[k^{-1/2}]_{k\geq 1}$) et que

$$\int_0^x \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\,dt = \sum_{k=0}^{E[x/\pi]} u_k + \int_{\pi E[x/\pi]}^x \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\,dt\,;$$

la divergence de la série $[u_k]_{k\geq 0}$ et le fait que

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\int_{\pi E[x/\pi]}^x \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\,dt \Big) = 0$$

(du fait de ($\dagger$) et ($\dagger\dagger$)) impliquent donc

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\,dt = +\infty\,,$$

ce qui prouve bien que la fonction f n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$.