Université Bordeaux 1
UFR de Mathématiques et Informatique
351, Cours de la Libération
33405 Talence

Analyse Harmonique Appliquée I

UE MAP 608

Mercredi 7 Avril 2004

Durée 3 heures
Notes de cours et de TD autorisées, à l'exclusion d'autres documents

Partie I

Dans cette partie, N désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2.

Soit $(h(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ la réponse impulsionnelle d'un filtre digital stationnaire $\mathcal{L}$; on considère un appareil $\mathcal{G}_N$ dont l'effet est de transformer une suite d'entrées $(e(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ (tous les $e(k)$ étant nuls sauf au plus un nombre fini) en la suite de sorties $(s(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ donnée par :

$$s(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(n-Nk)e(k)\,.$$

I.1. L'appareil $\mathcal{G}_N$ est-il un filtre ?

I.2. On rappelle que la transformée de Fourier d'une suite $(x(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est définie comme la fonction 2π-périodique d'énergie finie sur $[0,2\pi]$

$$\omega \to \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,e^{-ik\omega}\ ;$$

trouver une relation simple entre la transformée de Fourier F_e de l'entrée $(e(k))_{k\in\mathbb{Z}}$, la transformée de Fourier de la sortie $(s(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ après passage à travers l'appareil $\mathcal{G}_N$, et la transformée de Fourier H du filtre digital $\mathcal{L}$.

I.3. On note $l^2(\mathbb{Z})$ l'espace des signaux digitaux d'énergie finie, *i.e.* des suites $(x(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes telles que $\sum_k |x(k)|^2 < \infty$ et l'on définit sur cet espace le produit scalaire dit *corrélation discrète* défini par :

$$\Big\langle (x(k))_k \,,\, (y(k)_k \Big\rangle := \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,\overline{y(k)}\,.$$

On rappelle que $\mathcal{L}$ est un opérateur continu de $l^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même (définition de la stationsnarité). L'adjoint $\mathcal{G}_N^*$ de $\mathcal{G}_N$ est défini comme l'opérateur linéaire continu de $l^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même tel que

$$\forall\, (x(k))_k\,, (y(k)_k \,\in l^2(\mathbb{Z})\,,\, \Big\langle \mathcal{G}_N[(x(k))_k]\,,\, (y(k))_k \Big\rangle = \Big\langle (x(k))_k\,,\, \mathcal{G}_N^*[(y(k))_k] \Big\rangle.$$

Montrer que l'adjoint de $\mathcal{G}_N$ est l'opérateur qui transforme le signal d'entrée $(e(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ en le signal de sortie $(s(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{h(k-Nn)}\, e(k).$$

I.4. Trouver une relation entre la transformée de Fourier d'un signal digital d'entrée $(e(k))_k$, la transformée de Fourier du signal déduit de $(e(k))_k$ après passage au travers de l'appareil $\mathcal{G}_N^*$ et la transformée de Fourier du filtre $\mathcal{L}$ (on pensera à utiliser la formule de Plancherel et le fait que $\mathcal{G}_N^*$ est l'adjoint de $\mathcal{G}_N$.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction de transfert du filtre $\mathcal{L}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, 2\pi/N]$ (périodisée avec la période 2π).

II.1. Calculer la réponse impulsionnelle $(h(k))_k$ du filtre $\mathcal{L}$. Le filtre $\mathcal{L}$ est-il un filtre stationnaire ? un filtre réalisable ?

II.2. Indiquez de quelle manière pratique on peut corriger le filtre $\mathcal{L}$ pour "l'approcher" par un filtre réalisable ; quel écueil pratique doit-on tenter de contourner ?

II.3. Quelle est la réponse impulsionnelle du filtre de Hamming dont la fonction de transfert est la fonction

$$\omega \to \alpha D_N(\omega) + \frac{1-\alpha}{2}\left(D_N\Big(\omega - \frac{2\pi}{2N+1}\Big) + D_N\Big(\omega + \frac{2\pi}{2N+1}\Big)\right),$$

où

$$D_N(\omega) := \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\Big(N+\frac{1}{2}\Big)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}},$$

avec $\alpha = .54$? Quelle est la justification du choix de α (on pourra s'aider de représentations graphiques pour appuyer les affirmations).

II.4. On note $\widetilde{\mathcal{L}}$ le filtre réalisable approchant le filtre $\mathcal{L}$ et l'on suppose que la réponse impulsionnelle de $\widetilde{\mathcal{L}}$ est une suite $(\tilde{h}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ avec $\tilde{h}(k) = 0$ si $k < -M$ et $k > M$. On note P la polynôme

$$P(X) = \tilde{h}(-M) + \tilde{h}(-M+1)X + \cdots + \tilde{h}(M)X^{2M};$$

quelle condition doivent vérifier les zéros du polynôme P pour que l'on puisse construire un filtre stationnaire réalisable $\check{\mathcal{L}}$ tel que $\check{\mathcal{L}} \circ \mathcal{L} = \mathrm{Id}_{l^2(\mathbb{Z})}$? Comment peut-on calculer la réponse impulsionnelle de ce filtre stationnaire réalisable $\check{\mathcal{L}}$?

Partie III

III.1. On appelle *ondelette de Shannon* le signal d'énergie finie sur $\mathbb{R}$ dont le spectre est la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Calculer explicitement ce signal continu φ (en utilisant la formule d'inversion de Fourier).

III.2. En utilisant la formule de Plancherel (c'est-à-dire le principe de conservation de l'énergie), montrer que la famille des fonctions du type $(\varphi(t-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ constitue une base orthonormée de l'espace V_0 des signaux continus d'énergie finie de spectre dans $[-\pi, \pi]$. Vérifier la formule

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\sin\pi(t-k)}{\pi(t-k)}\right)^2 \equiv 1\,.$$

III.3. Étant donné un signal continu de spectre inclus dans $[-\pi, \pi]$, quel est le seuil maximal tolérable auquel il puisse être échantillonné ?

III.4. On note V_1 l'espace des signaux continus d'énergie finie et de spectre dans $[-\pi/2, \pi/2]$; montrer qu'il existe une fonction 2π-périodique m_0 (que l'on calculera) telle que $\widehat{\varphi}(2\omega) = m_0(\omega)\widehat{\varphi}(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$; calculer la réponse impulsionnelle $(h(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ du filtre digital stationnaire $\mathcal{L}$ dont $\sqrt{2}\, m_0$ est la transformée de Fourier.

III.5. Montrer que la famille des fonctions $(2^{-1/2}\varphi((t-k)/2))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de l'espace V_1.

III.6. Si

$$e \ : t \to \sum_{k\in\mathbb{Z}} e(k)\varphi(t-k)$$

est un élément de V_0, calculer en fonction des nombres $e(k)$ et des nombres $h(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, les coefficients $(s(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ de la projection orthogonale de e sur V_1 (exprimée dans la base orthonormée $(2^{-1/2}\varphi(t-k)/2))_{k\in\mathbb{Z}}$).