DESS Codes, Cryptologie, Sécurité Informatique
Année 2004-2005
Jeudi 20 Janvier 2005

UE MAI933 (Codes/Signal)

Epreuve de théorie du signal

(notes de cours autorisées)

Partie I (autour de l'outil Fourier)

I.1. Quelle est l'opération mathématique correspondant au passage d'une information digitale 1-dimensionnelle dans un appareil agissant linéairement et dont les paramètres restent immuables dans le temps ? Comment se traduit (en termes mathématiques) la relation entrée/sortie *via* une telle opération (on notera $(h(k))_k$ la réponse impulsionnelle de l'appareil) ?

I.2. On suppose que N désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2. Soit $(h(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels ; on considère un appareil $\mathcal{G}_N$ dont l'effet est de transformer une suite d'entrées $(e(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ (tous les $e(k)$ étant nuls sauf au plus un nombre fini) en la suite de sorties $(s(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ donnée par :

$$s(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(n-Nk)e(k)\,.$$

L'appareil $\mathcal{G}_N$ est-il un filtre ?

I.3. On rappelle que la transformée de Fourier d'une suite $(x(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est définie comme la fonction 2π-périodique d'énergie finie sur $[0,2\pi]$

$$\omega \rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\,e^{-ik\omega}\ ;$$

trouver une relation simple entre la transformée de Fourier F_e de l'entrée $(e(k))_{k\in\mathbb{Z}}$, la transformée de Fourier de la sortie $(s(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ après passage à travers l'appareil $\mathcal{G}_N$, et la transformée de Fourier H de la suite $(h(k)_{k\in\mathbb{Z}}$ (on supposera cette suite d'énergie finie, c'est-à-dire telle que $\sum_k |h(k)|^2 < +\infty$).

I.4. Soient N_1 et N_2 deux nombres entiers strictement positifs. Indiquer un moyen rapide de calculer les coefficients du produit de deux polynômes à coefficients complexes

$$P_1(X) = \sum_{k=0}^{N_1-1} a_k X^k\,, \qquad P_2(X) = \sum_{k=0}^{N_2-1} b_k X^k$$

en utilisant la convolution discrète et la transformation de Fourier rapide (on pensera à travailler modulo une puissance de deux convenable que l'on précisera comment choisir en fonction de N_1 et N_2). Quel est le nombre de multiplications entre nombres complexes impliqué dans ce calcul ?

Partie II (autour de la notion d'entropie)

II.1. On considère une image digitale $(I(k_1, k_2))$, $0 \leq k_1, k_2 \leq 1023$ de 1024 pixels sur 1024 pixels et deux suites $(h(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(g(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ correspondant à une analyse multi-résolution $1D$. Expliquer comment faire apparaître les coefficients de l'image I dans une autre base orthonormée en exploitant l'idée de l'analyse multirésolution (scindage d'une information en "résumé" et "détails") suivant un arbre quaternaire que l'on précisera.

II.2. On fait tourner trois fois l'algorithme de recherche de meilleure base ; de combien de bases orthonormées dispose-t-on pour représenter l'image originelle ?

II.3. Rappeler ce qu'est l'entropie de Shannon d'une information exprimée dans une base orthonormée et expliquer (de la manière que vous jugerez la plus parlante possible pour un non initié) l'intérêt de la minimisation de l'entropie face au problème de la compression de l'information.

II.4. On suppose que l'image est essentiellement constituée d'"accidents" et non de textures ; quelle est à votre avis la base orthonormée dans laquelle l'entropie de Shannon de l'image sera minimale ? Indiquer l'arbre de sélection qui conduit à cette base et préciser comment se "visualise" directement la liste des coefficients de l'image dans cette nouvelle base orthonormée.

II.5. Dans un tel arbre de sélection de base, chaque sous-base de la base (correspondant à un noeud de l'arbre) admet une certaine "étiquette" (liée au processus de sélection de cet arbre quaternaire). Quelle relation simple y-a-t'il entre l'étiquette de la sous-base b de la base et le contenu fréquentiel de la composante de l'image correspondant à la projection sur b ? Avec quelle analyse multi-résolution faut-il travailler pour que la relation entre étiquette de la sous-base b et localisation en fréquences de la projection sur b soit une relation parfaite ? On présisera les suites $(h(k))_k$ et $(g(k))_k$ correspondant à cette analyse multirésolution particulière (dite de Shannon).