Semestre 4, Année 2011-2012 SESSION 2

UE MA4021 : Intégration et équations différentielles

Date : 22 Juin 2012, 14h00-17h00 Durée : 3h00

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice 1 *Pour chacune des deux intégrales doubles I_1 et I_2 suivantes :*

1. *représenter le domaine d'intégration $D \subset \mathbb{R}^2$;*
2. *exprimer ce que devient l'expression de l'intégrale une fois interverti l'ordre d'intégration (c'est-à-dire lorsque que l'on effectue d'abord l'intégration en x à y fixé, puis dans un second temps l'intégration en y du résultat obtenu) ;*
3. *préciser quelle hypothèse on doit faire sur la fonction f pour que cette intervertion des intégrations par rapport à x et à y soit justifiée.*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \Big(\int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy\Big)\,dx \\ I_2 &= \int_{a/2}^{a} \Big(\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx \qquad (a>0). \end{aligned}$$

1. Le domaine d'intégration correspondant à I_1 est le triangle de sommets les trois points $(0,0)$, $(1,2)$ et $(1,3)$. Il est représenté sur la figure **??** ci-dessous (figure de gauche). Le domaine d'intégration corrspondant à I_2 est l'intersection de la bande verticale $a/2 \leq x \leq a-$ avec le demi-disque de centre a et de rayon a situé dans le demi-plan $\{y>0\}$, puisque l'équation de ce cercle est $(x-a)^2+y^2-a^2 = y^2-(2ax-x^2)=0$ (voir la figure **??** ci dessous, figure de droite).
2. Si l'on intervertit l'ordre d'intégration, la première intégrale I_1 devient :

$$I_1 = \int_0^2 \Big(\int_{y/3}^{y/2} f(x,y)\,dx\Big)\,dy + \int_2^3 \Big(\int_{y/3}^{1} f(x,y)\,dx\Big)\,dy$$

(ceci se voit immédiatement en examinant la figure). La seconde intégrale I_2 devient, elle :

$$I_2 = \int_0^{a\sqrt{3}/2} \Big(\int_{a/2}^{a} f(x,y)\,dx\Big)\,dx + \int_{a\sqrt{3}/2}^{a} \Big(\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x,y)\,dx\Big)\,dx.$$

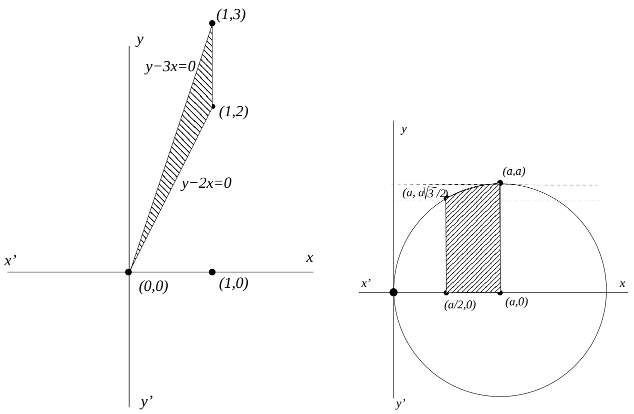

FIGURE 1 – Domaines d'intégration pour I_1 (à gauche) et I_2 (à droite)

Ceci se voit encore sur la figure : le point d'intersection du cercle d'équation $(x-a)^2 + y^2 - a^2 = y^2 - (2ax - x^2) = 0$ avec la droite verticale $x = a/2$ est en effet le point $(a/2, a\sqrt{3}/2)$; d'autre part, l'expression de x en fonction de y le long du cercle de centre a et de rayon a lorsque $x \leq a$ est $x = a - \sqrt{a^2 - y^2}$.

3. Dans les deux cas, pour que le Théorème de Fubini (Théorème 1.5 du cours) s'applique (pour justifier les intervertions de limites), il faut que l'intégrale

$$\iint_D |f(x,y)|\, dxdy$$

soit finie (D désinant dans les deux cas le domaine d'intégration). Cette condition est (par exemple) remplie si $|f|$ est bornée sur ce domaine D, en particulier dans le cas où f est continue sur D.

Exercice 2.

1. *Justifier le fait que la fonction*

$$(x,y) \in [0,1] \times [0,+\infty[\longmapsto e^{-y} \sin(2xy)$$

soit intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1] \times [0,+\infty[$.

La fonction en question est dominée en module par la fonction $(x,y) \mapsto e^{-y}$ dans le domaine d'intégration $[0,1] \times [0,+\infty[$ puisque $|\sin(2xy)| \leq 1$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Or, d'après le Théorème de Fubini-Tonnelli, on a

$$\iint_{[0,1]\times[0,+\infty[} e^{-y}\, dxdy = \int_0^1 \Big(\int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy \Big)\, dx = 1 < +\infty.$$

Le critère de domination (Remarque 1.6 du cours) s'applique et la fonction en question est bien intégrable sur $[0,1] \times [0,+\infty[$, car dominée sur ce sous-ensemble (mesurable) par une fonction intégrable sur ce sous-ensemble.

2. *En utilisant judicieusement le théorème de Fubini (intégration dans un premier temps par rapport à y, puis dans un second temps par rapport à x) en même temps qu'en justifiant pourquoi son application ici est licite, vérifier la formule :*

$$\iint_{[0,1]\times]0,+\infty[} e^{-y} \sin(2xy)\, dx\, dy = \frac{\log 5}{4}. \qquad (*)$$

Comme la clause d'application du Théorème de Fubini (Théorème 1.5 du cours) est remplie (d'après la question 1), on a

$$\iint_{[0,1]\times]0,+\infty[} e^{-y} \sin(2xy)\, dx\, dy = \int_0^1 \Big(\int_0^\infty e^{-y} \sin(2xy)\, dy\Big)\, dx$$
$$= \int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,+\infty[} \Big(\frac{e^{-y(1-2xi)} - e^{-y(1+2xi)}}{2i}\Big)\, dy\Big)\, dx. \qquad (1)$$

Or, d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.2 du cours), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (donc en particulier pour tout $x \in [0,1]$)

$$\begin{aligned} \int_{[0,\infty[} e^{-y(1\pm 2ix)}\, dy &= \lim_{Y\to+\infty} \int_0^Y e^{-y(1\pm 2ix)}\, dy \\ &= \lim_{Y\to+\infty} \Big[-\frac{e^{-y(1\pm 2ix)}}{1\pm 2ix}\Big]_0^Y = \frac{1}{1\pm 2ix}. \end{aligned}$$

On observe, après simplification, que :

$$\frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{1-2ix} - \frac{1}{1+2ix}\Big) = \frac{2x}{1+4x^2}.$$

On a donc, en reportant au membre de droite de la formule (**??**) :

$$\iint_{[0,1]\times]0,+\infty[} e^{-y} \sin(2xy)\, dx\, dy = \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2}\, dx = \Big[\frac{\log(1+4x^2)}{4}\Big]_0^1 = \frac{\log 5}{4}.$$

3. *En exprimant différemment l'intégrale double $(*)$, déduire du résultat établi au (**2**) la convergence et la valeur numérique de l'intégrale*

$$I = \int_0^\infty e^{-y}\, \frac{1-\cos(2y)}{y}\, dy.$$

Puisque le Théorème de Fubini (Théorème 1.5 du cours) s'applique ici (voir la question 1), on peut aussi écrire l'intégrale double

$$\iint_{[0,1]\times]0,+\infty[} e^{-y}\sin(2xy)\,dx\,dy$$

en sommant par rapport à x d'abord, puis par rapport à y ensuite, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\iint_{[0,1]\times]0,+\infty[} e^{-y}\sin(2xy)\,dx\,dy &= \int_{[0,\infty[}\Big(\int_{[0,1]} e^{-y}\ \sin(2xy)\,dx\Big)\,dy \\
&= \int_{]0,+\infty[} e^{-y}\Big(\int_{[0,1]}\sin(2xy)\,dx\Big)\,dy \\
&= \int_{]0,+\infty[} e^{-y}\Big[\frac{\cos(2xy)}{2y}\Big]_0^1\,dy \\
&= \int_{]0,+\infty[} e^{-y}\frac{1-\cos(2y)}{2y}\,dy.
\end{aligned}$$

Comme le membre de gauche de cette formule vaut $(\log 5)/4$ (d'après la question 2), on a

$$I = \int_0^\infty e^{-y}\,\frac{1-\cos(2y)}{y}\,dy = 2\times\frac{(\log 5)}{4} = \frac{\log 5}{2}.$$

Exercice 3. *Soient α et β deux nombres réels strictement positifs.*

1. *Représenter sur une figure le domaine plan $D_{\alpha,\beta}$ défini dans $\mathbb{R}^2$ par les conditions $y^2-\alpha x\le 0$ et $x^2-\beta y\le 0$.*

La courbe plane d'équation $x = y^2/\alpha$ est une parabole de sommet l'origine et d'axe de symétrie la demi-droite $0x$, tandis que la courbe plane $y = x^2/\beta$ est une parabole de sommet toujours l'origine, mais d'axe de symétrie cette fois la demi-droite Oy. Les points d'intersection de ces deux paraboles sont l'origine et le point $A(\alpha,\beta)$ de coordonnées $x=\alpha^{1/3}\beta^{2/3}$ et $y=\alpha^{2/3}\beta^{1/3}$. Le domaine $D_{\alpha,\beta}$ est représenté (hachuré) sur la figure **??** ci-dessous.

2. *En utilisant le changement de variables consistant à poser, lorsque x et y sont deux nombres réels strictement positifs $x=u^2v, y=uv^2$, calculer en fonction de α et β la valeur de l'intégrale double*

$$\iint_{D_{\alpha,\beta}}\exp\Big(-\frac{x^3+y^3}{xy}\Big)\,dxdy$$

(on justifiera pourquoi la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue s'applique).

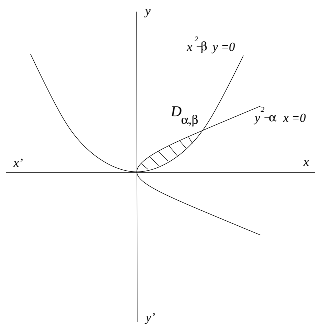

FIGURE 2 – La ≪ lentille ≫ entre deux paraboles $D_{\alpha,\beta}$ (exercice 3)

L'application $(u,v) \mapsto (u^2v, uv^2)$ est un C^1 difféomorphisme du premier quadrant $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ dans lui-même. En effet, le système d'équations

$$x = u^2v,\ y = uv^2,\ u > 0, v > 0$$

(lorsque $x > 0$ et $y > 0$) admet l'unique solution

$$u = x^{2/3}y^{-1/3},\ v = y^{2/3}v^{-1/3}.$$

Les applications

$$(u,v) \mapsto (u^2v, uv^2) \quad , \quad (x,y) \mapsto (x^{2/3}y^{-1/3}, y^{2/3}x^{-1/3})$$

sont toutes les deux de classe C^∞ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et inverses l'une de l'autre (comme applicatiuons du premier quadrant $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ dans lui-même). Le jacobien de l'application

$$(u,v) \mapsto (u^2v, uv^2) = (x,y)$$

vaut

$$\begin{vmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{vmatrix} = 3u^2v^2 > 0.$$

Les hypothèses de la formule de changement de variable dans les intégrales de Lebesgue (Théorème 1.3 du cours) sont ici remplies (on prend $A = \Phi^{-1}(\mathrm{int}(D_{\alpha,\beta}))$ et $B = \mathrm{int}(D_{\alpha,\beta})$, où int désigne l'opération de prise d'intérieur. Le domaine A est décrit par les conditions

$$\Big(y^2 = u^2v^4 \leq \alpha x = \alpha u^2 v\Big) \Longleftrightarrow v \leq \alpha^{1/3}$$

et

$$\Big(x^2 = u^4v^2 \leq \beta y = \beta uv^2\Big) \Longleftrightarrow u \leq \beta^{1/3}.$$

La formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue (Théorème 1.3 du cours) , suivie de l'application du Théorème de Fubini-Tonnelli (Théorème 1.4 du cours), donne donc ici :

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{\alpha,\beta}} \exp\Big(-\frac{x^3+y^3}{xy}\Big)\,dxdy &= 3\int\int_{\substack{0\le u\le \beta^{1/3}\\ 0\le v\le \alpha^{1/3}}} \exp(-u^3-v^3)\,u^2v^2\,dudv \\
&= 3\Big[-\frac{\exp(-u^3)}{3}\Big]_0^{\beta^{1/3}} \times \Big[-\frac{\exp(-v^3)}{3}\Big]_0^{\alpha^{1/3}} \\
&= \frac{(1-e^{-\alpha})(1-e^{-\beta})}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. *On considère l'équation différentielle du second ordre*

$$y''(t) - 4\,y'(t) + 13\,y(t) = \cos t, \qquad (\dagger)$$

où l'espace des états est ici $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

1. *Donner une base de l'espace des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène*

$$y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0$$

dans $\mathbb{R}$.

Les racines de l'équation (caractéristique) du second degré

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

sont $2-3i$ et $2+3i$ car le discriminant réduit de ce trinôme vaut $4-13 = -9 = (3i)^2$. Une base de l'espace des solutions de l'équation homogène dans $\mathbb{C}$ est donnée par

$$t \mapsto e^{(2+3i)t}, \quad t\mapsto e^{(2-3i)t}.$$

Une base de l'espace des solutions de l'équation homogène dans $\mathbb{R}$ est donc donnée par

$$t\mapsto e^{2t}\cos(3t), \quad t\mapsto e^{2t}\,\sin(3t).$$

2. *Exhiber une solution particulière* $\varphi\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *de l'équation* $(\dagger)$.

L'opérateur différentiel $d^2/dt^2 - 4d/dt + 13\mathrm{Id}$ transforme $t\mapsto e^{i\omega t}$ en

$$t\mapsto (-\omega^2 - 4i\omega + 13)e^{i\omega t}.$$

En particulier, si $\omega = 1$ et $\omega = -1$, on trouve respectivement :

$$\begin{aligned}
\Big(d^2/dt^2 - 4d/dt + 13\,\mathrm{Id}\Big)[e^{it}] &= 4(3-i)\,e^{it} \\
\Big(d^2/dt^2 - 4d/dt + 13\,\mathrm{Id}\Big)[e^{-it}] &= 4(3+i)\,e^{-it}.
\end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation (†) est donc donnée par

$$y(t) = \frac{1}{8}\Big(\frac{e^{it}}{3-i} + \frac{e^{-it}}{3+i}\Big) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\Big[\frac{e^{it}}{3-i}\Big] = \frac{3\cos(t)-\sin(t)}{40}.$$

3. *Soient y_0 et y_0' deux nombres réels. Donner l'expression de la solution $t \in \mathbb{R} \mapsto y(t)$ du problème de Cauchy suivant :*

$$y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = \cos t \quad \text{avec conditions initiales : } y(1) = y_0,\ y'(1) = y_0'.$$

La solution du problème de Cauchy avec conditions initiales posé ici doit être de la forme

$$y(t) = e^{2t}(\lambda\cos(3t) + \mu\sin(3t)) + \frac{3\cos(t)-\sin(t)}{40},$$

où λ et μ sont deux constantes réelles à déterminer. Ces constantes s'obtiennent en injectant les deux conditions initiales imposées au point $t=1$, c'est-à-dire en résolvant ici le système de Cramer en les inconnues (λ,μ) :

$$\begin{aligned} \cos(3)\,\lambda + \sin(3)\,\mu &= \frac{1}{e^2}\Big(y_0 - \frac{3\cos(1)-\sin(1)}{40}\Big) \\ (2\cos(3) - 3\sin(3))\,\lambda + (2\sin(3)+3\cos(3))\,\mu &= \frac{1}{e^2}\Big(y_0' + \frac{3\sin(1)+\cos(1)}{40}\Big). \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système linéaire aux inconnues λ,μ vaut

$$3\left((\cos(3))^2 + (\sin(3))^2\right) = 3\ ;$$

il est donc non nul et le système a une et une seule solution (λ,μ) que l'on exprlicite avec les formules de Cramer.

Exercice 5. *Soit l'équation différentielle*

$$t^4(y'(t) + y^2(t)) = 1 \qquad (\star)$$

envisagée dans tout cet exercice avec espace des états $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

1. *À quel type d'EDO cette équation différentielle se rattache-t-elle ?*

Cette équation s'écrit, puisque t ne s'annule pas dans l'espace des états :

$$y'(t) = \frac{1}{t^4} - y^2(t)$$

C'est donc une équation du type de Riccatti avec $c(t) \equiv 1/t^4$, $b(t) \equiv 0$ et $a(t) \equiv -1$ (voir la section 2.4.4 du cours).

2. *Déterminer des réels a et b tels que la fonction $\varphi : t \mapsto a/t + b/t^2$ soit solution de $(\star)$ sur $]0, +\infty[$.*
On a
$$\varphi'(t) = -a/t^2 - 2b/t^3.$$
En reportant, on voit que φ vérifie l'équation différentielle de Riccatti $(\star)$ si et seulement si
$$a(a-1)\,t^2 + 2b(a-1)\,t + b^2 \equiv 1.$$
Le choix de $a = 1$ et $b = 1$ convient. On prend donc $\varphi(t) = 1/t + 1/t^2$.
3. *En introduisant le changement de fonction inconnue consistant à poser $y(t) = \varphi(t) + 1/z(t)$, φ étant la fonction définie au* **(2)**, *montrer que la résolution de l'équation $(\star)$ en y se ramène à la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre en z.*
On a
$$\varphi'(t) - \frac{z'(t)}{z^2(t)} = \frac{1}{t^4} - (\varphi(t))^2 - \frac{1}{(z(t))^2} - 2\,\frac{\varphi(t)}{z(t)}.$$
Comme φ est solution particulière de l'EDO $(\star)$, il reste juste, après multiplication par la fonction $(z(t))^2$:
$$z'(t) = 1 + 2\,\varphi(t)\,z(t).$$
Si l'équation de Riccatti $(\star)$ est posée avec comme espace des états l'ouvert
$$U := \Big\{(t,y) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}\,;\, y - \varphi(t) \neq 0\Big\},$$
il est licite de poser
$$y(t) - \varphi(t) = 1/z(t)$$
et la résolution de l'EDO $(\star)$ lorsque U est pris comme espace des états se ramène bien à la résolution de l'EDO linéaire du premier ordre :
$$z'(t) = 1 + 2\,\varphi(t)\,z(t).$$
4. *Soit $t_0 > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, avec $y_0 \neq \varphi(t_0)$, φ étant toujours la fonction définie au* **(2)**. *Déterminer en fonction de t_0 et y_0 l'expression, ainsi que l'intervalle de vie, de la solution du problème de Cauchy :*
$$t^4(y'(t) + y^2(t)) = 1 \quad \text{avec condition initiale : } \; y(t_0) = y_0.$$
On a
$$y_0 - \varphi(t_0) = y_0 - 1/t_0 - 1/t_0^2 = \frac{t_0^2 y_0 - t_0 - 1}{t_0^2}.$$

On pose donc

$$z_0 = z_0(t_0, y_0) := \frac{1}{y_0 - \varphi(t_0)} = \frac{t_0^2}{t_0^2 y_0 - t_0 - 1}.$$

La solution générale de l'équation linéaire sans second membre

$$z'(t) - 2\,\varphi(t)\,z(t) = 0$$

au voisinage de t_0 est

$$z(t) = C\,t^2 e^{-2/t}, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

(puisque $z'(t)/z(t) = (\log|z(t)|)' = 2/t + 2/t^2 = (2\log|t| - 2/t)'$). La méthode de variation des constantes (voir la section 2.4.1 du cours), pour calculer la solution que l'on cherche, conduit à intégrer $C'(t)\,t^2 e^{-2/t} = 1$, soit

$$C'(t) = \frac{1}{t^2}\,e^{2/t}$$

avec la condition initiale $C(t_0)\,t_0^2\,e^{-2/t_0} = z_0$, soit

$$C(t) = z_0 \frac{e^{2/t_0}}{t_0^2} + \int_{t_0}^{t} \frac{e^{2/\tau}}{\tau^2}\,d\tau = z_0 \frac{e^{2/t_0}}{t_0^2} + \Big[\frac{-e^{2/\tau}}{2}\Big]_{t_0}^{t}.$$

La solution cherchée est donc la fonction définie par

$$y(t) = \varphi(t) + \frac{1}{z_{y_0}(t)},$$

où

$$z_{y_0}(t) = t^2 e^{-2/t} \times \Big(z_0 \frac{e^{2/t_0}}{t_0^2} + \frac{e^{2/t_0} - e^{2/t}}{2}\Big).$$

Si l'on pose

$$K_{t_0,y_0} = z_0 \frac{e^{2/t_0}}{t_0^2} + \frac{e^{2/t_0}}{2},$$

la fonction z_{y_0} s'écrit

$$z_{y_0}(t) = t^2 e^{-2/t}\Big(K_{t_0,y_0} - \frac{e^{2/t}}{2}\Big).$$

L'intervalle de vie de la solution cherchée y est le plus grand intervalle ouvert contenant t_0 sur laquelle la fonction z_{y_0} ainsi trouvée ne s'annule pas, c'est à dire le plus grand intervalle ouvert contenant t_0 sur lequel

$$2K_{t_0,y_0} - \exp(2/t)$$

ne s'annule pas. Deux cas sont à distinguer :

– si $K_{t_0,y_0} \leq 1/2$, cet intervalle de vie est $]0, +\infty[$ (car on a $e^{2/t} > 1$ pour tout $t > 0$) ;
– si l'on a $K_{t_0,y_0} > 1/2$, l'intervalle de vie doit admettre nécessairement comme borne le nombre $\tau = 2/\log(2\,K_{t_0,y_0}) > 0$ (qu'il ne saurait contenir). C'est alors le plus grand intervalle ouvert contenant t_0 et ne contenant pas ce nombre $2/\log(2\,K_{t_0,y_0}) > 0$; cet intervalle de vie se trouve limité alors par le fait que cette valeur $2/\log(2\,K_{t_0,y_0})$ doit en être une borne (d'un côté ou de l'autre de t_0).

Exercice 6. *Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. *Soit Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par les conditions $x^2 + y^2 = 1$ et $0 \leq z \leq 3$. Calculer l'intégrale de la fonction $(x, y, z) \mapsto x + 1$ sur la surface Σ (par rapport à la mesure de Lebesgue sur cette surface), c'est-à-dire, avec les notations du cours :*

$$\iint_\Sigma (x + 1)\, d[\mathrm{vol}_{2,\Sigma}].$$

La surface sur laquelle on intègre est une portion de cylindre. Elle est paramétrée par $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in [1, 3]$ par

$$x = \cos(\theta),\ y = \sin(\theta),\ z = z.$$

Soit

$$\sigma\ : (\theta, z) \mapsto \big(\cos(\theta), \sin(\theta), z\big).$$

On a

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$d[\mathrm{vol}_{2,\Sigma}](\theta, z) = \left\| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\| d\theta dz = d\theta\, dz.$$

On a donc

$$\iint_\Sigma (x + 1)\, d[\mathrm{vol}_{2,\Sigma}] = \int_1^3 \int_0^{2\pi} (r\cos\theta + 1)\, d\theta dz = 4\pi.$$

2. *En utilisant la formule de Green-Ostrogradski, calculer le flux au travers de la demi-sphère $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ z \geq 0\}$, la normale pointant vers les $z > 0$, du champ de vecteurs $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} - z\,\vec{k}$.*

La divergence de ce champ de vecteurs $\vec{F} = (P, Q, R)$ est constante et égale à

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv 1.$$

D'après la formule de Green-Ostrogradski (Théorème 1.9 du cours), le flux sortant à calculer est égal à l'intégrale triple de la divergence du champ dans la demi-sphère (pleine) $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,;\, z \geq 0\}$. Comme la divergence du champ $\vec{F}$ est constante et égale à 1, le flux à calculer est égal au volume de cette hémisphère, soit $2\pi/3$.

3. *Vérifier que la courbe paramétrée par*

$$\theta \in [0, 2\pi] \longmapsto (\cos^3\theta, \sin^3\theta) \qquad (**)$$

(que l'on appelle une astroïde) est une courbe fermée (on dit aussi un lacet) qui n'a pas de point double (c'est-à-dire que le paramétrage $(**)$ *restreint à* $[0, 2\pi[$ *est injectif) et enserre donc un domaine borné* D *du plan. Vérifier que l'aire* A *de ce domaine* D *est égale à l'intégrale curviligne*

$$A = \frac{1}{2}\int_\gamma (xdy - ydx).$$

Calculer la valeur de A.

Comme l'application $x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même et que $\theta \in [0, 2\pi[\mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2$ est une application injective, l'application

$$\theta \in [0, 2\pi[\mapsto M(\theta) = \big((\cos(\theta))^3, (\sin(\theta))^3\big)$$

est injective : en effet, si $M(\theta_1) = M(\theta_2)$, avec $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$, on a $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$ et $\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2)$, donc $\theta_1 = \theta_2$. L'astroïde ainsi paramétrée n'a donc pas de point double. Le calcul de l'aire du domaine D enserré par cette courbe se fait en utilisant la formule de Stokes (voir l'exemple 1.19 du cours). On a

$$A = \text{Aire}(D) = \int_\gamma (x\,dy) = \int_\gamma (-y\,dx) = \frac{1}{2}\int_\gamma (x\,dy - y\,dx)$$

si $\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \longmapsto (\cos^3\theta, \sin^3\theta)$. On a donc, puisque

$$dy = 3(\sin(\theta))^2 \cos(\theta)\,d\theta, \quad dx = -3(\cos(\theta))^2 \sin(\theta)\,d\theta,$$

et donc

$$x\,dy - y\,dx = (\cos(\theta))^2(\sin(\theta))^2\,d\theta$$

le long du chemin paramétré γ. On en déduit :

$$A = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} (\sin(2\theta))^2\,d\theta = \frac{3}{16}\int_0^{4\pi} (\sin(u))^2\,du = \frac{3\pi}{8}.$$