Semestre 4, Année 2011-2012 SESSION 1

UE N1MA6031 : Probabilités et Statistique

Date : 10 Mai 2012, 14h00-17h00 Durée : 3h00

Polycopié de cours autorisé, à l'exclusion de tout autre document.

Texte (en *italiques*) et corrigé

Exercice 1. *On compte dans une population* 30% *d'hommes et* 70% *de femmes. Un homme sur deux et une femme sur trois portent des lunettes. Quelle est la probabilité qu'une personne portant des lunettes soit une femme ?*

Supposons la population Ω (univers des possibles, de cardinal N) équipée avec la loi uniforme $\mathscr{U}(N)$. La probabilité du sous-ensemble H constitué des hommes vaut 0.3, tandis que celle du sous-ensemble F constitué des femmes vaut 0.7. Soit L le sous-ensemble constitué des individus portant des lunettes. Par hypothèses, on a $P(L \mid H) = 0.5$ et $P(L \mid F) = 0.3$. On a, d'après la formule de causes (Proposition 1.3 du cours)

$$P(F \mid L) = \frac{P(F \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L \mid F)\, P(F)}{P(L \mid H)P(H) + P(L \mid F)P(F)} = 7/12 \simeq .5833.$$

Exercice 2. *Soit* $c > 0$ *un paramètre réel et* f_c *la fonction :*

$$x \in [1,4] \mapsto f_c(x) = c\, x^2(4-x),$$

prolongée par 0 *hors de* $[1,4]$*. À quelle condition sur* c *la fonction* f_c *est-elle une densité de probabilité sur* $\mathbb{R}$ *? On suppose cette condition remplie. Soit* X *une variable aléatoire réelle (VAR) de loi de probabilité la loi ainsi définie. Calculer l'espérance de* X*. Calculer ensuite la probabilité conditionnelle* $P(\{X > 2\} \mid \{X \leq 3\})$.

Pour que f_c soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que f_c soit une fonction positive ou nulle (c'est le cas ici puisque $c > 0$ et $4 - x \geq 0$ sur $]-\infty, 4]$) et que

$$\int_{\mathbb{R}} f_c(t)\, dt = c \int_1^4 t^2(4-t)\, dt = c \Big[4t^3/3 - t^4/4\Big]_1^4 = 81\, c/4 = 1.$$

On a donc $c = 4/81$. L'espérance de la VAR X est (*cf.* le calcul de l'espérance d'ne VAR à densité, section 2.1.3 du cours) :

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} t\, f_c(t)\, dt = \frac{4}{81} \int_1^4 t^3(4-t)\, dt = \frac{112}{45}.$$

On a

$$
\begin{aligned}
P(\{X>2\}\mid\{X\le 3\}) &= \frac{P(\{2<X\le 3\})}{P(\{X\le 3\})} = \frac{\int_2^3 t^2(4-t)\,dt}{\int_1^3 t^2(4-t)\,dt} \\
&= \frac{109/12}{158/5} = \frac{545}{1896} \simeq 0.287.
\end{aligned}
$$

Exercice 3.

1. *Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles (VAR) mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$. Soit $M\in\mathbb{N}^*$. Quelle loi suit la VAR*

$$X^{\rm emp}_{[M]} := \frac{X_1+\cdots+X_M}{M} \ ?$$

Exprimer en fonction de p et de M l'espérance et la variance de la VAR $X^{\rm emp}_{[M]}$.

Cette variable $X^{\rm emp}_{[M]}$ est la somme de M variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathscr{B}(1,p/M)$ (loi de Bernoulli de paramètre ou espérance p/M). La variable $X^{\rm emp}_{[M]}$ suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(M,p/M)$. L'espérance de $X^{\rm emp}_{[M]}$ vaut donc $M\times p/M = p$, tandis que la variance vaut $M\times p/M\times(1-p/M) = p(1-p/M)$ puisque la variance d'une VAR suivant une loi de Bernoulli de paramètre p/M vaut $p/M\times(1-p/M)$.

2. *Que signifie le fait qu'une suite de VAR $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une VAR Z ? Quel théorème du cours permet d'assurer que la suite de VAR $(Z_n)_{n\geq 1}$, où*

$$Z_n := \sqrt{n}\,\frac{X^{\rm emp}_{[n]}-p}{\sqrt{p(1-p)}} \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}^*$$

converge en loi vers une VAR Z ? Quelle est dans ce cas la loi de la VAR limite Z ?

Dire qu'une suite de VAR $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une VAR Z signifie que la suite des fonctions de répartition $(F_{Z_n})_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction de répartition F_Z de la VAR limite Z. C'est le Théorème Limite Central (TLC) (Théorème 2.1 du cours) qui permet d'affirmer que la suite de variables $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge vers une VAR suivant une loi $\mathscr{N}(0,1)$.

3. *Que signifie le fait qu'une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de VAR converge en probabilité vers une VAR U ? Quel théorème du cours permet d'assurer que la suite de VAR $\big((X^{\rm emp}_{[n]}(1-X^{\rm emp}_{[n]})\big)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une VAR U ? Quelle est cette VAR U dans ce cas ?*

Dire qu'une suite de VAR $(U_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une VAR U signifie :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P\big(\{|U_n - U| \geq \epsilon\}\big) = 0.$$

La Loi Forte des Grands Nombres (Théorème 2.3 du cours) assure que la suite de VAR $\big(X_{[n]}^{\text{emp}}\big)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers la VAR constante $p = E[X_1]$. La suite de VAR $\big((X_{[n]}^{\text{emp}}(1 - X_{[n]}^{\text{emp}})\big)_{n\geq 1}$ converge donc presque sûrement vers la VAR (presque partout) constante $p(1-p)$. Comme la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité, la suite de VAR $\big((X_{[n]}^{\text{emp}}(1 - X_{[n]}^{\text{emp}})\big)_{n\geq 1}$ converge aussi en probabilité vers la VAR (presque partout) constante égale à $p(1-p)$.

4. *On admettra (théorème de Slutsky) que si $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une suite de VAR convergeant en loi vers une VAR Z et $(V_n)_{n\geq 1}$ une suite de VAR convergeant en probabilité vers une VAR constante égale à $v \in \mathbb{R}$, la suite de VAR $(V_nZ_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la VAR vZ. Montrer que la suite de VAR*

$$\Big(\sqrt{n}\,\frac{X_{[n]}^{\text{emp}} - p}{\sqrt{(X_{[n]}^{\text{emp}}(1 - X_{[n]}^{\text{emp}})}}\Big)_{n\geq 1}$$

converge en loi vers une VAR dont on précisera la loi.

On prend comme suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ la suite

$$\Big(\sqrt{n}\,\frac{X_{[n]}^{\text{emp}} - p}{\sqrt{p(1-p)}}\Big)$$

(qui converge en loi vers une VAR suivant une loi $\mathscr{N}(0,1)$ d'après la question 2) et comme suite $(V_n)_{n\geq 1}$ la suite

$$\Big(\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{(X_{[n]}^{\text{emp}}(1 - X_{[n]}^{\text{emp}})}}\Big)_{n\geq 1}$$

qui converge en probabilité (d'après la question 3, la convergence ayant même lieu en fait presque sûrement) vers la VAR (presque partout) constante égale à 1. Le Théorème (admis) de Slutsky (Théorème 3.1 du cours) implique la convergence en loi de la suite de VAR

$$V_nZ_n = \sqrt{n}\,\frac{X_{[n]}^{\text{emp}} - p}{\sqrt{(X_{[n]}^{\text{emp}}(1 - X_{[n]}^{\text{emp}})}}, \quad n \geq 1,$$

vers une VAR suivant une loi $\mathscr{N}(0,1)$.

5. *On suppose M assez grand. Comment faut-il choisir τ pour que*

$$P\Big(\Big\{X_{[M]}^{\rm emp}-\tau\sqrt{\frac{X_{[M]}^{\rm emp}(1-X_{[M]}^{\rm emp})}{M}}\leq p\leq X_{[M]}^{\rm emp}+\tau\sqrt{\frac{X_{[M]}^{\rm emp}(1-X_{[M]}^{\rm emp})}{M}}\Big\}\Big)\geq .95\ ?$$

Utiliser pour cela la table fournie en annexe dans ce texte.

Comme M est supposé choisi assez grand, on peut (d'après le résultat établi à la question 4) assimiler le membre de gauche de cette inégalité à

$$P(Z\in[-\tau,\tau]),$$

où Z suit une loi $\mathcal{N}(O,1)$: on prend en effet pour Z la limite de la suite de VAR

$$\Big(\sqrt{n}\,\frac{X_{[n]}^{\rm emp}-p}{\sqrt{(X_{[n]}^{\rm emp}(1-X_{[n]}^{\rm emp})}}\Big)_{n\geq 1}.$$

La table fournie donne la condition $\tau\geq 1.96$ pour que soit réalisée la clause $P(Z\in[-\tau,\tau])\geq 0.95$.

6. *Dans un échantillon de 350 barquettes de fraises en provenance d'Espagne, on dénombre* 38 *barquettes contenant des fruits avariés. Déterminer un intervalle de confiance (aux risques partagés) au facteur de risque* 5% *près pour la proportion p de barquettes contenant des fruits avariés, parmi les barquettes de fraises importées d'Espagne.*

La réalisation de l'espérance empirique $X_{[350]}^{\rm emp}$ est ici 38/350. La réalisation de l'intervalle de confiance (aléatoire)

$$\Big]X_{[M]}^{\rm emp}-1.96\sqrt{\frac{X_{[M]}^{\rm emp}(1-X_{[M]}^{\rm emp})}{M}}\,,\,X_{[M]}^{\rm emp}+1.96\sqrt{\frac{X_{[M]}^{\rm emp}(1-X_{[M]}^{\rm emp})}{M}}\Big[$$

cherché est donc

$$\Big]\frac{38}{350}-1.96\frac{\sqrt{\frac{38}{350}(1-\frac{38}{350})}}{\sqrt{350}}\,,\,\frac{38}{350}+1.96\frac{\sqrt{\frac{38}{350}(1-\frac{38}{350})}}{\sqrt{350}}\Big[\ \simeq]0.0760,0.1412[.$$

Exercice 4.

1. *Soient $Y_1,...,Y_M$ M variables aléatoires réelles (VAR) mutuellement indépendantes, toutes de même loi, et ξ un nombre réel. Justifier la formule :*

$$E(e^{i\xi(Y_1+\cdots+Y_M)})=\big(E(e^{i\xi Y_1})\big)^M.$$

D'après la formule (2.17) du cours, si $Z_1, ..., Z_M$ sont M VAR mutuellement indépendantes et ayant toutes des moments d'ordre M, la VAR $Z_1 \dots Z_M$ a encore une espérance, qui est le produit des espérances des Z_j. Ici, on prend $Z_j = \exp(i\xi Y_j)$; ces variables Z_j sont mutuellement indépendantes car les Y_j le sont. Comme $|Z_j| \equiv 1$, Z_k a des moments d'ordre M pour tout $k = 1, ..., M$. Toutes les espérances $E(Z_k)$, $k = 1, ..., M$, sont égales à $E(e^{i\xi Y_1})$ puisque les Y_j ont même loi. On a donc bien la formule voulue.

2. *On suppose que la loi commune des Y_j est une loi $\mathscr{N}(\mu_M, \sigma_M^2)$. Calculer, pour $\xi \in \mathbb{R}$, en fonction de ξ, μ_M, σ_M^2, l'espérance $E(e^{i\xi Y_1})$ en admettant que*

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2}.$$

En déduire que la loi de $Y_1 + \cdots + Y_M$ est une loi normale dont on donnera les deux paramètres en fonction de μ_M et de σ_M^2.

Comme Y_1 suit une loi $\mathscr{N}(0,1)$, alors (d'après la remarque 2.3 du cours),

$$\begin{aligned} E[e^{i\xi Y_1}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_M}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} e^{-(t-\mu_M)^2/2\sigma_M^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{i\xi\mu_M} \int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma_M \xi u} e^{-u^2/2}\, du \\ &= e^{i\mu_M \xi} e^{-\sigma_M^2 \xi^2/2} \end{aligned}$$

compte-tenu de la formule admise. On a donc

$$E[e^{i\xi(Y_1+\cdots+Y_M)}] = e^{i\xi M\mu_M} e^{-M\sigma_M^2\ \xi^2/2}.$$

On reconnait la fonction caractéristique d'une loi $\mathscr{N}(M\mu_M, M\sigma_M^2)$. La VAR $Y_1 + \cdots + Y_M$ suit donc une loi $\mathscr{N}(M\mu_M, M\sigma_M^2)$.

3. *Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VAR mutuellement indépendantes et suivant toutes une loi $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$. Déterminer, en utilisant le résultat établi à la question **2**, pour $M \in \mathbb{N}^*$, la loi de la VAR :*

$$X_{[M]}^{\text{emp}} := \frac{X_1 + \cdots + X_M}{M}.$$

On pose $Y_j = X_j/M$. Chaque Y_j suit une loi $\mathscr{N}(\mu/N, \sigma^2/M^2)$. La variable $X_{[M]}^{\text{emp}}$ suit donc, d'après le résultat établi à la question 2, une loi $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2/M)$.

4. *Une société fabrique des cables d'acier pour télécabines. La société demande un audit pour déterminer la résistance moyenne à la rupture de ces cables. Les ingénieurs s'accordent à penser que la résistance d'un cable à la rupture suit une loi normale dont l'écart type est de 25 kilos. Le cabinet* *d'audit teste un lot de 100 cables, pour lesquels il détermine (après essais pour chaque cable du lot) une résistance moyenne à la rupture de* 2750 *kilos. Donner un intervalle de confiance (aux risques partagés) au niveau de confiance* 98% *pour la résistance moyenne à la rupture des cables fabriqués par la société.*

En raisonnant comme à la question précédente, on voit que la variable

$$Z = \frac{\sqrt{M}}{\sigma}\Big(X^{\mathrm{emp}}_{[M]} - \mu\Big) = \frac{1}{\sqrt{M}\sigma}\sum_{j=1}^{M}(X_j - \mu)$$

suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. La table fournie donne la condition $\tau \geq 2.326$ pour que soit réalisé $P(Z \in [-\tau, \tau]) \geq 0.98$. La réalisation de l'intervalle de confiance (aléatoire) est alors

$$\Big]2750 - 2.326\frac{\sigma}{\sqrt{100}}, 2750 + 2.326\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\Big[=$$
$$= \Big]2750 - 2.326\frac{25}{\sqrt{100}}, 2750 + 2.326\frac{25}{\sqrt{100}}\Big[\simeq]2744, 2756[.$$

Exercice 5. *Un joueur joue avec un banquier suivant le principe suivant : il paye à la banque avant de jouer une somme finie S, puis lance ensuite une pièce de monnaie non pipée en répétant ces lancers indépendamment. On dit qu'un lancer est gagnant si le résultat est « Face ». Le banquier rembourse au joueur 2^k euros (s'il en a les possibilité) si celui ci obtient « Face » pour la première fois au k-ième lancer, le jeu s'arrêtant aussitôt après ce premier lancer gagnant ; si le banquier n'est pas en mesure de lui rembourser cette somme après ce premier lancer gagnant, il lui donne tout ce qu'il a et le jeu s'arrête également aussitôt.*

1. *On suppose que le banquier dispose d'un capital illimité. Montrer que l'espérance de gain du joueur est $+\infty$. Le jeu est-il plus (ou moins) favorable au joueur qu'au banquier ?*

La probabilité d'obtenir « Face » pour la première fois au k-ième lancer vaut $(1/2)^{k-1} \times 1/2 = 1/2^k$. L'espérance de gain du joueur est

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, 2^k - S = +\infty.$$

Le jeu est donc défavorable au banquier puisque le joueur ne mise au départ qu'une somme finie.

2. *On suppose que le banquier ne dispose que de 2^N euros ($N \in \mathbb{N}^*$). Calculer l'espérance de gain du joueur. En dessous de quelle valeur de S le jeu est-il plus favorable au joueur qu'au banquier ?*

Dans ce cas, l'espérance du gain vaut

$$E = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2^k} \times 2^k + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} 2^N - S = N + 1 - S.$$

Si $S = N + 1$, le jeu est équitable. Si $S < N + 1$, le jeu est plus favorable au joueur, tandis que si $S > N + 1$, il est plus favorable au banquier.

Exercice 6.

On considère un ensemble fini d'états $E = \{e_1, ..., e_N\}$. Un robot se trouve positionné à l'instant $t = 0$ (le temps est ici discrétisé : $t = 0, 1, 2, ...$) en l'état e_1. Il se déplace ensuite d'un état à l'autre de manière stochastique suivant la règle suivante : s'il est positionné à l'instant $t = k$ sur un état e_i, la probabilité qu'il aille à l'instant $t = k + 1$ se positionner sur l'état e_j ne dépend pas de k et vaut un certain nombre $a_{i,j} \in [0, 1]$.

1. *On note X_k la VAR désignant le numéro de l'état sur lequel se trouve le robot à l'instant k. Vérifier que l'on a :*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad P(X_{k+1} = j) = \sum_{i=1}^{N} a_{i,j} P(X_k = i).$$

On applique la formule de Bayes (Proposition 1.2 du cours). Le nombre $a_{i,j}$ s'interprète en effet comme la la probabilité conditionnelle :

$$P(\text{le robot va en } e_j \text{ à l'instant } k + 1 \mid \text{il est positionné en } e_i \text{ à l'instant } k),$$

soit

$$P(X_{k+1} = j \mid X_k = i).$$

2. *On note A la matrice $[a_{i,j}]_{1 \le i,j \le N}$ (i : indice de ligne, j : indice de colonne). Que peut-on dire de la somme des éléments de chaque ligne de la matrice A ? Calculer en fonction de A la loi de probabilité de la VAR X_k.*

La somme des éléments de chaque ligne de la matrice A vaut 1 puisque le chaque vecteur ligne $[a_{i,1}, ..., a_{i,N}]$ représente une distribution de probabilité (conditionnelle) sur $\{1, ..., N\}$. La loi de probabilité de la variable X_k se calcule comme le vecteur ligne

$$X_0 * A^k = [1, 0, ..., 0] * A^k.$$

Exercice 7. *L'expérience a montré qu'un tireur à l'arc atteignait, lors d'un tir donné, sa cible avec une probabilité* $p \in]0,1[$. *Il effectue une suite de tirs consécutifs* t_j, $j = 1, 2, ...,$ *dans des conditions d'indépendance mutuelle. Soit* M *un entier supérieur ou égal à* 1. *Soit* T_M *la VAR correspondant au nombre de tirs qui lui sont nécessaires pour atteindre exactement* M *fois la cible.*
1. *Calculer, pour* $k \in \mathbb{N}^*$, *la probabilité de l'évènement* $\{T_M = k\}$.
On a, pour $k \geq M$,

$$P(\{T_M = k\}) = p^M (1-p)^{k-M} \binom{k-1}{M-1}$$

puisque cette probabilité correspond en fait à celle de l'évènement suivant : $(k-1) - (M-1) = k - M$ échecs exactement lors des $k-1$ premiers tirs, un succès au k-ième (et que les tirs sont indépendants).
2. *Calculer la fonction génératrice de la loi de* T_M *en utilisant la formule :*

$$\forall\, y \in]-1,1[,\ \frac{1}{(1-y)^M} = \sum_{k=M}^{\infty} \binom{k-1}{M-1} y^{k-M}$$

(que l'on justifiera). En déduire la valeur de $E(T_M)$.
La fonction génératrice de T_M est définie formellement par

$$\begin{aligned} s \mapsto E[s^{T_M}] &= \sum_{k=M}^{\infty} P(\{T_M = k\})\, s^k \\ &= p^M s^M \sum_{k=M}^{\infty} \binom{k-1}{M-1} (1-p)^{k-M} s^{k-M} \\ &= (ps)^M \frac{1}{(1-(1-p)s)^M} = \Big(\frac{ps}{1-(1-p)s}\Big)^M \ (\text{si } |s| \leq 1). \end{aligned}$$

On utilise ici la formule proposée ; cette formule s'obtient en dérivant M fois les deux membres de

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k.$$

La dérivée de la fonction génératrice au voisinage de $[-1,1]$ vaut

$$s \mapsto M\Big(\frac{ps}{1-(1-p)s}\Big)^{M-1} \times \frac{p}{\big(1-(1-p)s\big)^2}.$$

La valeur de cette dérivée en $s = 1$ vaut $E[T_M] = M/p$.

Annexe

Quantiles de dépassement de l'écart absolu de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}(|X| > z_\alpha) = \alpha$$

(par exemple : si $\alpha = 0.13 + 0.005$, alors $z_\alpha = 1.495$)

α	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.00	∞	3.291	3.090	2.968	2.878	2.807	2.748	2.697	2.652	2.612
0.01	2.576	2.543	2.512	2.484	2.457	2.432	2.409	2.387	2.366	2.346
0.02	2.326	2.308	2.290	2.273	2.257	2.241	2.226	2.212	2.197	2.183
0.03	2.170	2.157	2.144	2.132	2.120	2.108	2.097	2.086	2.075	2.064
0.04	2.054	2.044	2.034	2.024	2.014	2.005	1.995	1.986	1.977	1.969
0.05	1.960	1.951	1.943	1.935	1.927	1.919	1.911	1.903	1.896	1.888
0.06	1.881	1.873	1.866	1.859	1.852	1.845	1.838	1.832	1.825	1.818
0.07	1.812	1.805	1.799	1.793	1.787	1.780	1.774	1.768	1.762	1.757
0.08	1.751	1.745	1.739	1.734	1.728	1.722	1.717	1.711	1.706	1.701
0.09	1.695	1.690	1.685	1.680	1.675	1.670	1.665	1.660	1.655	1.650
0.10	1.645	1.640	1.635	1.630	1.626	1.621	1.616	1.612	1.607	1.603
0.11	1.598	1.594	1.589	1.585	1.580	1.576	1.572	1.567	1.563	1.559
0.12	1.555	1.551	1.546	1.542	1.538	1.534	1.530	1.526	1.522	1.518
0.13	1.514	1.510	1.506	1.502	1.499	1.495	1.491	1.487	1.483	1.480
0.14	1.476	1.472	1.468	1.465	1.461	1.457	1.454	1.450	1.447	1.443
0.15	1.440	1.436	1.433	1.429	1.426	1.422	1.419	1.415	1.412	1.408
0.16	1.405	1.402	1.398	1.395	1.392	1.388	1.385	1.382	1.379	1.375
0.17	1.372	1.369	1.366	1.363	1.359	1.356	1.353	1.350	1.347	1.344
0.18	1.341	1.338	1.335	1.332	1.329	1.326	1.323	1.320	1.317	1.314
0.19	1.311	1.308	1.305	1.302	1.299	1.296	1.293	1.290	1.287	1.284
0.20	1.282	1.279	1.276	1.273	1.270	1.267	1.265	1.262	1.259	1.256