Semestre 4, Année 2006-2007 SESSION 2

**UE** : MAP403

Date : 27 Juin 2007, 14h-17h Durée : 3h

Calculatrices, Notes de cours, de TD et TP autorisées

Texte (*en italiques*) et corrigé (en roman)

Le barème utilisé pour la correction est précisé.

**Exercice 1 (50 pts).** *Soit $a$ un paramètre strictement entre* $0$ *et* $1$.

**a (10 pts)** *Montrer que l'équation*

$$x^3 + ax^2 + 1 = 0$$

*admet une unique racine entre* $-2$ *et* $-1$.

La fonction $f_a \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3 + ax^2 + 1$ a pour dérivée $3x^2 + 2ax = x(3x+2a)$ et est donc strictement croissante sur les intervalles $]-\infty, -2a/3[$ et $]0, +\infty[$, strictement décroissante sur $]-2a/3, 0[$. Comme $-2 < -1 < -2a/3$ car $a \in ]0, 1[$, cette fonction $f_a$ est strictement croissante sur $[-2, -1]$. Or $f_a(-2) = -8 + 4a + 1 < -3 < 0$ tandis que $f(-1) = -1 + a + 1 = a > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence d'une racine $\xi_a$ de $f_a(x) = 0$ ; l'unicité vient du fait que $f_a$ est strictement croissante.

**b (10 pts)** *Montrer que la méthode de Newton, initiée avec $x_0 = -1$, fournit une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ convergeant vers $\xi_a$. Ecrire (en fonction de $a$) la relation entre $x_n$ et $x_{n+1}$.*

La fonction $f_a'$ reste strictement positive sur $]-\infty, -1]$ comme on l'a vu au **a** ; d'autre part $f_a''(x) = 6x + 2a < 0$ sur $]-\infty, -1]$, ce qui implique que le graphe de $f_a$ présente sur $]-\infty, -1]$ une concavité tournée vers les $y < 0$. On constate donc que la suite récurrente initiée à $x_0 = -1$ et régie par la relation

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_a(x_n)}{f_a'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + ax_n^2 + 1}{3x_n^2 + 2ax_n}$$

(fondant la méthode de Newton) est une suite croissante (à partir de $x_1 = -2 < \xi_a$) majorée (à partir du cran un) par $\xi_a$ ; ceci résulte du fait que la tangente au graphe de $f_a$ au point $(x_n, f_a(x_n))$ reste au dessus ce graphe (du fait de la concavité orientée vers le bas). On a donc $-2 < x_n < x_{n+1} < \xi_a$ pour tout $n > 1$. La seule limite possible pour cette suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est $\xi_a$ et l'on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \xi_a$.

**c (10 pts)** *Calculer les trois premières décimales de $\xi_a$ lorsque $a = 1$.*

On écrit la procédure suivante pour calculer les $x_n$ de proche en proche ; en implémentant cette procédure sur la calculette, il vient :

```
>> x=-1;
>> x=x-(x^3 + x^2 +1)/(3*x^2 + 2*x)
x = -2
>> x=x-(x^3 + x^2 +1)/(3*x^2 + 2*x)
x = -1.6250
>> x=x-(x^3 + x^2 +1)/(3*x^2 + 2*x)
x = -1.4858
>> x=x-(x^3 + x^2 +1)/(3*x^2 + 2*x)
x = -1.4660
>> x=x-(x^3 + x^2 +1)/(3*x^2 + 2*x)
x = -1.4656
>> x=x-(x^3 + x^2 +1)/(3*x^2 + 2*x)
x = -1.4656
>> x=x-(x^3 + x^2 +1)/(3*x^2 + 2*x)
x = -1.4656
```

On constate la stabilisation à partir de cinq itérations de l'algorithme et la valeur numérique de $\xi_1$ avec trois décimales exactes est donc $\xi_1 \simeq -1.4656$.

**d (10 pts)** *Montrer que la méthode de la sécante, initiée avec $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, fournit une suite $(\tilde{x}_n)_{n\geq 0}$ convergeant aussi vers $\xi_a$. Ecrire (en fonction de a) la relation entre $\tilde{x}_n$, $\tilde{x}_{n-1}$ et $\tilde{x}_{n+1}$ lorsque $n \geq 2$. Calculer en fonction de a les approximations $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3$.*

Si l'on initie la méthode de la sécante avec $x_0 = -2$ et $x_1 = -1$, on trouve

$$x_2 = x_1 - \frac{f_a(x_1)(x_1 - x_0)}{f_a(x_1) - f_a(x_0)} \in [\xi_a, -1]$$

du fait de la concavité (regardant vers le bas) du graphe de $f_a$ (la corde joignant les deux points $(x_0, f_a(x_0))$ et $(x_1, f_a(x_1))$ du graphe reste sous ce graphe). La pente de la tangente en $(x_1, f_a(x_1))$ étant égale à $3-2a \geq 1$, cette tangente coupe l'axe des $x$ en un point de $[-2, -1]$ (ce point étant le point $-2$ dans le cas extrême $a = 1$) ; la corde joignant $(x_1, f(x_1))$ à $(x_2, f(x_2))$ étant sous cette tangente, le nombre

$$x_3 = x_2 - \frac{f_a(x_2)(x_2 - x_1)}{f_a(x_2) - f_a(x_1)}$$

(abscisse du point où cette corde coupe l'axe des $x$) est dans $[-2, x_a]$. Si l'on pose

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f_a(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f_a(x_n) - f_a(x_{n-1})} \\ &= x_n - \frac{(x_n^3 + a x_n^2 + 1)}{x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 + a(x_n + x_{n+1})} . \end{aligned} \tag{1}$$

on constate ainsi que la suite $(x_{2k+1})_{k\geq 1}$ est une suite croissante dans $[-2, \xi_a]$ tandis que la suite $(x_{2k})_{k\geq 1}$ est, elle, une suite décroissante dans $[\xi_a, -1]$. Ces deux suites sont convergentes et ne peuvent converger que vers la même limite : ceci résulte de la relation (1) appliquée avec $n = 2k$, $k \geq 1$ lorsque $k$ tend vers l'infini, de la continuité de $f$ et du fait que $f$ est strictement croissante et positive sur $[-2, -1]$. La limite commune de ces deux suites adjacentes est donc $\xi_a$ et la méthode de la sécante initiée avec $x_0 = -2$ et $x_1 = -1$ (c'est précisément elle que nous venons de décrire) fournit une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ convergeant vers $\xi_a$. On rappelle (d'après (1)) que

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{(x_1^3 + a x_1^2 + 1)}{x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2 + a(x_1 + x_0)} = \frac{2a - 7}{7 - 3a} \\ x_3 &= x_2 - \frac{(x_2^3 + a x_2^2 + 1)}{x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 + a(x_2 + x_1)} \\ &= x_2 - \frac{x_2^3 + a x_2^2 + 1}{x_2^2 + (a-1)x_2 + (1-a)} \\ &= -\frac{x_2^2 + (a-1)x_2 + 1}{x_2^2 + (a-1)x_2 + (1-a)} \\ &= -1 - \frac{a}{x_2^2 + (a-1)(x_2 - 1)} \\ &= -1 - \frac{(7-3a)^2}{(2a-7)^2 + (a-1)(5a-14)(7-3a)} . \end{aligned}$$

**e (10 pts)** *On suppose $a = 1$. Au bout de combien d'itérations la méthode de la sécante initiée avec $x_0 = -2$ et $x_1 = -1$ permet-elle de retrouver les trois premières décimales de $\xi_a$ obtenues au* **c** *?*

La procédure

```
function x=secante(N)
x0=-2;
x1=-1;
for i=1:N
   y=x0;
```

```
    x0=x1;
    x1=x1 - (x1^3 + x1^2 + 1)/(x1^2 + x1*y + y^2 + x1+y);
end
x=x1;
```

conduit aux valeurs suivantes (en fonction des valeurs de $N$) :

```
>> x=secante(1);
x = -1.2500
>> x=secante(2);
x = -1.6400
>> x=secante(3);
x = -1.4286
>> x=secante(4);
x = -1.4599
>> x=secante(5);
x = -1.4658
>> x=secante(6);
x = -1.4656
>> x=secante(7);
x = -1.4656
```

On voit donc qu'il faut au minimum 6 itérations de la méthode de la sécante pour retrouver $\xi_a \simeq -1.4656$ avec au moins trois décimales exactes.

**Exercice 2 (30 pts)** *On considère l'équation différentielle*

$$y'(t) = 1 + t^2 + \arctan(ty(t))\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

*avec la condition initiale* $y(0) = 0$ *(*$\arctan$ *désigne la fonction arc tangente).*

**a (10 pts)** *Soit* $R > 0$*. Vérifier que les conditions d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz énoncé dans le cours sont remplies pour résoudre le problème sur* $[0, R]$*.*

Posons

$$f(t, y) := 1 + t^2 + \arctan(ty) \quad \forall\, t, y \in \mathbb{R}\,.$$

Pour $t, y_1, y_2$ quelconques avec $t \in [0, R]$, on a

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |\arctan(ty_1) - \arctan(ty_2)| \leq |t|\,|y_1 - y_2| \leq R|y_1 - y_2|$$

d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction

$$u \longmapsto \arctan(u)$$

dont la dérivée $u \longmapsto 1/(1+u^2)$ est bornée en module par 1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz du cours (théorème 2.2) s'applique donc car la clause (2.4) du cours est bien remplie (ici $a = 0$, $b = R$).

**b (10 pts)** *On prend $R = 1$. Ecrire explicitement la procédure qui permet, $p$ étant un entier strictement positif fixé, de déterminer les valeurs approchées aux points $k10^{-p}$, $k = 0, ..., 10^p$, de la solution $t \longmapsto y(t)$ du problème.*

La méthode utilisée pour calculer ces valeurs approchées $y_{p,k}$, $k = 0, ..., 10^p$, est la méthode d'Euler. Les valeurs approchées $y_{p,k}$, $k = 0, ..., 10^p$ sont données par la procédure inductive

$$y_{p,k+1} = y_{p,k} + \frac{1}{10^p}\Big[1 + (k10^{-p})^2 + \arctan\Big(\frac{ky_{p,k}}{10^p}\Big)\Big] \quad k = 0, ..., 10^p - 1\,,$$

initiée avec $y_{p,0} = 0$. Voici la procédure algorithmique donnant le vecteur (ligne) dont les coordonnées sont les $y_{p,k}$, $k = 0, ..., 10^p$ :

```
tau=1/10^p;
t=0:tau:1;
M=length(t);
y=1;
yy=1;
for k=1:M-1
    yy = yy + tau*(1+ (t(k))^2 + atan ((t(k))*yy));
    y = [y yy];
end
```

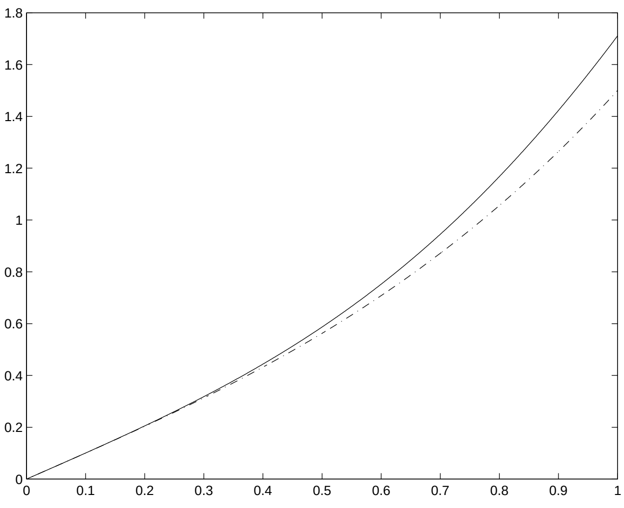


Figure 1: Graphe de la solution obtenue *via* Euler

Sur la figure ci-dessus, on a représenté (en plein) le graphe obtenu (avec $p = 3$) ainsi que le graphe (en pointillés) de la fonction $t \longmapsto t + t^3/3$, solution de l'équation différentielle

$$y' = 1 + t^2$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$.

**c (10 pts)** *Cette procédure génère-t-elle une méthode d'ordre 2 ? Sinon, comment doit-on rectifier le tir pour obtenir une méthode qui soit d'ordre 2 ?*

La méthode d'Euler est une méthode d'ordre 1. Pour avoir une méthode d'ordre 2, il faut (par exemple) avoir recours à la méthode d'Euler modifiée. Si l'on pose

$$f(t, y) = 1 + t^2 + \operatorname{artan}(ty)\,,$$

la suite $\tilde{y}_{p,k}$ à calculer par récurrence doit obéïr cette fois à la relation

$$\tilde{y}_{p,k+1} = \tilde{y}_{p,k} + \frac{1}{10^p}\, f\Big(\frac{2k+1}{2 \times 10^p}\,,\, \tilde{y}_{p,k} + \frac{f(\frac{k}{10^p}, \tilde{y}_{p,k})}{2 \times 10^p}\Big)\,,\ k = 0, ..., 10^p - 1\,.$$

**Exercice 3 (40 pts)**

*Soit $p$ un entier strictement positif et $f_p$ la fonction*

$$t \in [0, +\infty[ \longmapsto \frac{1}{(1+t)^p}\,.$$

*On considère $N+1$ points $t_0, ..., t_N$ distincts de $[0, +\infty[$ et $P_{p,N}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré au plus $N$ interpolant au point $t_k$ la valeur $f_p(t_k)$.*

**a (20 pts)** *Expliciter $P_{p,N}$ en fonction de $t_0, ..., t_N$ et décrire un algorithme de calcul de $P_{p,N}$ lorsque les $t_k$, $k = 0, ..., N$ sont connus.*

On a

$$P_{p,N}(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(1+t_k)^p} \times \frac{\prod\limits_{j \neq k} (X - t_j)}{\prod\limits_{j \neq k} (t_k - t_j)}\,.$$

L'algorithme de calcul le plus classique est celui consistant à calculer $P_{p,N}$ en l'exprimant dans le système libre constituée des polynômes

$$1, (X - t_0), (X - t_0)(X - t_1), ..., (X - t_0)...(X - t_{N-1})\,.$$

On écrit

$$P_{p,N}(X) = u_0 + u_1(X - t_0) + u_2(X - t_0)(X - t_1) + \cdots + u_{N-1}(X - t_0)...(X - t_{N-1})$$

et on calcule les $u_k$ de proche en proche suivant l'algorithme des différences divisées,en remarquant au départ que $u_0 = f_p(t_0)$ et en utilisant le fait que $P_{p,N}(t_k) = f_p(t_k)$ pour $k = 0, ..., N$.

**b (10 pts)** *Lorsque* $p = 1$, $N = 3$, *calculer explicitement* $P_{1,3}$ *si*

$$t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3\,.$$

Cherchons

$$P(X) = P_{1,3}(X) = u_0 + u_1 X + u_2 X(X-1) + u_3 X(X-1)(X-2)\,.$$

On a $u_0 = f_1(0) = 1$. En injectant $P(1) = f_1(1) = 1/2$, on trouve

$$u_0 + u_1 = 1/2\,,$$

d'où $u_1 = -1/2$. En injectant $P(2) = f_1(2) = 1/3$, il vient

$$1/3 = 1 - \frac{1}{2} \times 2 + 2\,u_2\,,$$

ce qui donne $u_2 = 1/6$. Finalement, on utilise $P(3) = 1/4$ pour obtenir

$$1/4 = 1 - \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{6} \times 6 + 6u_3\,,$$

ce qui donne $u_3 = -1/24$. On a donc

$$\begin{aligned} P_{1,3}(X) &= 1 - X/2 + \frac{X(X-1)}{6} - \frac{X(X-1)(X-2)}{24} \\ &= -\frac{X^3}{24} + \frac{7X^2}{24} - \frac{3X}{4} + 1\,. \end{aligned}$$

**c (10 pts)** *Déterminer une constante positive* $C_{p,N}$ *telle que*

$$|P_{p,N}(t) - f_p(t)| \leq C_{p,N} |t - t_0| \dots |t - t_N|$$

*pour tout* $t \in [0, +\infty[$.

D'après le cours (proposition 3.1), on sait que l'on peut choisir comme constante $C_{p,N}$ la constante

$$C_{p,N} = \frac{1}{(N+1)!} \times \sup_{t \in [0,+\infty[} |f_p^{(N+1)}(t)|\,.$$

Or la dérivée à l'ordre $N+1$ de $f_p$ vaut

$$f_p^{(N+1)}(t) = (-p)(-p-1)\cdots(-p-N) \times \frac{1}{(1+t)^{p+N+1}}$$

et la constante $C_{p,N}$ ainsi choisie vaut

$$C_{p,N} = \frac{(p+N)!}{(p-1)!(N+1)!} = \binom{p+N}{N+1}\,.$$

**Exercice 4 (40 pts)** *Soient dans le plan* $\mathbb{R}^2$ *les quatre points* $(x_k, y_k)$ *numérotés par* $k = 0, ..., 3$ *:*

$$(-1,2)\,,\ (0,3)\,,\ (1,0)\,,\ (2,-1)\,.$$

**a (15 pts)** *Déterminer la droite de régression de ce nuage de points.*
Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V$ des fonctions polynômiales de degré au plus 1, on introduit le produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle := P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)\,.$$

La matrice de Gram du système $(1, X)$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & -1+0+1+2 \\ -1+0+1+2 & (-1)^2+0^2+1^2+2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire ci-dessus s'étend au $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 des fonctions $Y = (y(-1), y(0), y(1), y(2))$ de $\{-1,0,1,2\}$ dans $\mathbb{R}$ (dont $V$ peut être considéré comme un sous-espace de dimension 2) et l'on a, si l'on pose $Y = (2,3,0,-1)$

$$\langle 1, Y\rangle = 2+3-1 = 4\,, \qquad \langle X\,,\,Y\rangle = (-1)\times 2+0\times 3+1\times 0+2\times(-1) = -4\,.$$

Le système à résoudre pour trouver la droite de régression sous la forme $y = ax + b$ est donc le système

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}\,.$$

La résolution est immédiate et donne $a = -6/5$ et $b = 8/5$.
**b (15 pts)** *On cherche le polynôme* $P(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ *tel que*

$$\sum_{k=0}^{3} |y_k - P(x_k)|^2$$

*soit minimal. Ecrire le système de trois équations linéaires à trois inconnues qu'il convient de résoudre pour trouver la solution du problème.*

Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $W$ des fonctions polynômiales de degré au plus 2, on introduit le produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle := P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)\,.$$

La matrice de Gram du système $(1, X, X^2)$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,X\rangle & \langle 1,X^2\rangle \\ \langle X,1\rangle & \langle X,X\rangle & \langle X,X^2\rangle \\ \langle X^2,1\rangle & \langle X^2,X\rangle & \langle X^2,X^2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

Le produit scalaire ci-dessus s'étend au $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 des fonctions $Y = (y(-1), y(0), y(1), y(2))$ de $\{-1, 0, 1, 2\}$ dans $\mathbb{R}$ (dont $W$ peut être considéré comme un sous-espace de dimension 3) et l'on a, si l'on pose $Y = (2, 3, 0, -1)$

$$\begin{aligned} \langle 1, Y\rangle &= 2 + 3 - 1 = 4 \\ \langle X\,,\, Y\rangle &= (-1)\times 2 + 0\times 3 + 1\times 0 + 2\times(-1) = -4 \\ \langle X^2\,,\, Y\rangle &= = 1\times 2 + 0\times 3 + 1\times 0 + 4\times(-1) = -2\,. \end{aligned}$$

Le système à résoudre pour trouver $\alpha, \beta, \gamma$ est donc le système

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

soit le système

$$\begin{aligned} 4\alpha + 2\beta + 6\gamma &= 4 \\ 2\alpha + 6\beta + 8\gamma &= -4 \\ 6\alpha + 8\beta + 18\gamma &= -2\,. \end{aligned}$$

**c (10 pts)** *Résoudre le système linéaire du* **b** *par la méthode du pivot de Gauss.*

En retranchant à la dernière ligne la somme des deux premières (méthode du pivot), on voit que le système équivaut au système

$$\begin{aligned} 4\alpha + 2\beta + 6\gamma &= 4 \\ 2\alpha + 6\beta + 8\gamma &= -4 \\ 4\gamma &= -2\,. \end{aligned}$$

Il vient donc $\gamma = -1/2$. Il reste à résoudre le système

$$\begin{aligned} 4\alpha + 2\beta &= 7 \\ 2\alpha + 6\beta &= 0\,. \end{aligned}$$

On multiplie la ligne 2 par 2 et on la soustrait à la première ligne pour trouver

$$-10\beta = 7\,,$$

soit $\beta = -7/10$ ; on trouve finalement en reportant dans la seconde ligne $\alpha = 21/10$. On a donc

$$P(X) = \frac{1}{2}\Big(\frac{7(3-X)}{5} - X^2\Big)\,.$$

**Exercice 5 (40 pts).** On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 20 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}\,.$$

**a (10 pts)** *Pour quel choix de norme sur $\mathbb{R}^n$ est on certain que la norme de la matrice $D^{-1}E$ ou $T_{\rm inf}^{-1}F$ impliquée dans les algorithmes de Jacobi ou Gauss-Seidel est-elle strictement inférieure à 1 ?*

La matrice $A$ est clairement une matrice à diagonale dominante. On sait d'après le cours que la norme qu'il convient de prendre sur $\mathbb{R}^n$ pour assurer que la norme de la matrice $D^{-1}E$ ou $T_{\rm inf}^{-1}F$ impliquée dans les algorithmes de Jacobi ou Gauss-Seidel est strictement inférieure à 1 est la norme $\|\ \|_\infty$ définie par

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty := \sup_j |x_j|\,.$$

**b (10 pts)** *Pourquoi les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel (appliquées à la résolution du système $A.X = B$) sont elles toutes les deux convergentes ?*

Il s'agit d'une application immédiate du cours : la méthode de Jacobi converge dès que $D^{-1}E$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1 (ce qui est ici le cas d'après la question précédente puisque le rayon spectral est majoré par n'importe quelle norme) ; la méthode de Gauss-Seidel converge dès que $T_{\rm inf}^{-1}F$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1 (ce qui est ici le cas d'après la question précédente puisque le rayon spectral est majoré par n'importe quelle norme).

**c (10 pts)** *Si $X_0$ désigne le vecteur $(1, -1, 1)$, calculer les vecteurs $X_1$, $X_2$, $X_3$ obtenus suivant l'algorithme de Gauss - Seidel appliqué à la résolution du système linéaire $A.X = B$ et initié au vecteur $X_0$.*

On a $A = T_{\text{inf}} - F$, où

$$T_{\text{inf}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 2 & 2 & 20 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de $T_{\text{inf}}^{-1}$ est immédiat à conduire (on résout un système triangulaire) et on trouve

```
>> >> T^(-1)

    0.1000         0         0
   -0.0100    0.1000         0
   -0.0090   -0.0100    0.0500
```

La matrice $T_{\text{inf}}^{-1} \cdot F$ se calcule aisément :

```
>> T^(-1)*F

         0   -0.2000    0.2000
         0    0.0200   -0.1200
         0    0.0180   -0.0080
```

Les vecteurs $X_1, X_2, X_3$ se calculent immédiatement à partir de $X_0$ suivant la relation inductive

$$X_{k+1} = T_{\text{inf}}^{-1} \cdot F \cdot X_k + T_{\text{inf}}^{-1} \cdot B$$

et l'on trouve les trois vecteurs ci dessous :

```
>> X0=[1 ; -1 ; 1];
>> X1=T^(-1)*F*X0+T^(-1)*B

    0.5000
    0.2500
   -0.3250

>> X2=T^(-1)*F*X1+T^(-1)*B

   -0.0150
    0.4340
   -0.2919
```

```
>> X3=T^(-1)*F*X2+T^(-1)*B

   -0.0452
    0.4337
   -0.2889
```

**d (10 pts)** *Quel vecteur $V$ de $\mathbb{R}^3$ la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de la question* **c** *approche-t-elle lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ? À partir de quelle valeur de $n$ a-t'on $\|X_n - V\| \leq 10^{-3}$, la norme sur $\mathbb{R}^3$ étant ici la norme $\| \ \|_\infty$ ?*

C'est le vecteur $V$ solution de $A.V = B$ qui est approché par la suite générée par l'algorithme de Gauss-Seidel. D'après le cours, si $\kappa$ désigne la norme (induite par la norme $\| \ \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^3$) de $T_{\text{inf}}^{-1} \cdot F$, on sait d'après le cours que, pour tout $n \geq 1$,

$$\|X_n - V\|_\infty \leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\|X_1 - X_0\|_\infty .$$

La norme de $T_{\text{inf}}^{-1} \cdot F$ se calcule comme le sup des normes $\| \ \|_1$ des vecteurs lignes de la matrice et on constate ici que cette norme vaut $\kappa = 0.4$. On a d'autre part $\|X_1 - X_0\|_\infty = 1.325$. On a donc

$$\|X_n - V\|_\infty \leq (0.4)^k \times 2.2.$$

Pour que $n$ convienne, il suffit donc que $(0.4)^n < \frac{10^{-3}}{2.2} = 4.54 \times 10^{-4}$. On constate pour cela que $n \geq 9$ convient car

```
>> .4^8
  6.5536e-004
>> .4^9
  2.6214e-004
```

Il s'agit ici d'une majoration grossière car il se peut que le rayon spectral de $T_{\text{inf}}^{-1} \cdot F$ soit beaucoup plus petit que sa norme (ici ce rayon spectral vaut approximativement 0.3 et l'on voit que $n \geq 7$ conviendrait de fait).