ANNÉE 2006-2007 SESSION DE FEVRIER 2007

GU : MISMI **UE** : MIS101

Date : 26/02/2007, 14.00-17.00 Durée : 3h00

Texte (*en italiques*) et corrigé détaillé (en roman)

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Question I

On considère les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} f &: x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3 \in \mathbb{R} \\ g &: z \in \mathbb{C} \longmapsto z^3 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

1. *L'application f (considérée comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est-elle injective ? surjective ?*
2. *L'application g (considérée comme une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) est-elle injective ? surjective ?*

Justifier soigneusement vos réponses.

Si x_1 et x_2 sont deux nombres réels tels que $x_1^3 = x_2^3$, on a $x_1 = x_2$ puisque $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$ si l'un des deux nombres x_j est non nul. La fonction f est donc injective (tout nombre réel a au plus un antécédent). Comme $y \in \mathbb{R}$ a pour antécédent $\mathrm{sign}\,(y) \times |y|^{1/3}$, f est surjective.
Si Z est un nombre complexe non nul, l'équation $z^3 = Z$ admet trois racines distinctes ; donc g n'est pas injective (un nombre complexe non nul a trois antécédents distincts). Comme $Z = 0$ a pour antécédent 0, tout nombre complexe a au moins un antécédent et g est donc surjective.

Série de questions II

II.a. *Rappeler ce que signifie le fait qu'une fonction f définie dans $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ ($a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$) et à valeurs réelles soit dérivable au point a ? Le fait que f soit continue au voisinage de a implique-t-il que f soit dérivable en a ? On justifiera la réponse, qu'elle soit positive ou négative.*

Dire qu'une fonction f définie dans $]a - \epsilon, a + \epsilon[$ est dérivable en a équivaut à dire qu'il existe un nombre $l := f'(a)$ tel que, pour tout $h \in \mathbb{R}$ assez petit

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\epsilon(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. On a en particulier $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Une fonction dérivable en a est donc continue en ce point, mais l'inverse est faux : par exemple $x \longmapsto |x|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0 (il y a un nombre dérivé à gauche valant -1, un nombre dérivé à droite valant $+1$).

II.b. *Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos a \neq 0$ et f une fonction définie au voisinage de a et dérivable au point a. Calculer en fonction du nombre dérivé $f'(a)$ la limite*

$$\lim_{x\to a} \Big(\frac{f(x) - f(a)}{\sin x - \sin a} \Big) \, .$$

On écrit

$$\frac{f(x) - f(a)}{\sin x - \sin a} = \frac{f(x) - f(a)}{\sin x - \sin a} \times \frac{x - a}{\sin x - \sin a} \, .$$

Comme f est dérivable en a, on a

$$\lim_{x\to a} \Big(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Big) = f'(a).$$

Comme la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée cos, elle est dérivable en a, avec comme nombre dérivé $\cos a$ et on a

$$\lim_{x\to a} \Big(\frac{\sin x - \sin a}{x - a} \Big) = \cos a \neq 0 \, .$$

Par les règles sur les quotients de limites, on a donc

$$\lim_{x\to a} \Big(\frac{f(x) - f(a)}{\sin x - \sin a} \Big) = f'(a) \times \frac{1}{\cos a} = \frac{f'(a)}{\cos a} \, .$$

<u>Série de questions III</u>

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe ($a, b \in \mathbb{R}$), on pose

$$\exp(z) := e^a (\cos b + i \sin b) = e^a \times e^{ib} \, .$$

Trouver tous les nombres complexes z solutions de l'équation

$$\exp(z) = \sqrt{e} \, ,$$

où e est le nombre réel défini par $\log e = 1$ ($\log$ désignant ici le logarithme népérien).

On cherche z sous la forme $a+ib$. Comme le module de e^z est e^a, l'égalité $e^z=\sqrt{e}=e^{1/2}$ implique $e^a=e^{1/2}$, donc $a=1/2$ car $\exp\ :\mathbb{R}\longrightarrow]0,+\infty[$ est injective. L'argument b est tel que $e^{ib}=1$, soit $b=2k\pi$. Les solutions de l'équation $e^z=\sqrt{e}$ sont donc tous les nombres

$$\frac{1}{2}+2ik\pi\ ,\ \ k\in\mathbb{Z}\,.$$

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

1.a. *Énoncer le théorème de la division euclidienne.*

Si a et b sont deux entiers relatifs avec $b>0$, il existe un unique couple d'entiers (q,r) avec $a=bq+r$ et $0\le r<b$. Le nombre q est dit *quotient* dans la division euclidienne de a par b, tandis que r est appelé *reste* dans cette même division euclidienne.

1.b. *Soient a,b deux entiers, tels que $a\ge b>0$. On écrit la division euclidienne de a par b : $a=bq+r$.*

1. *Montrer que $q\ge 1$.*
2. *En déduire que $a\ge b+r$, puis que $a>2r$.*

Si $q\le 0$, on aurait $a\le r$, ce qui est impossible car $a\ge b$ et $r<b$. Donc $q\ge 1$. On a donc, puisque $b>0$,

$$a\ge bq+r\ge b+r>2r$$

puisque $r<b$.

1.c. *On suppose toujours que a et b sont deux entiers tels que $a\ge b>0$. Soit $r_0=r,r_1,\dots,r_n=0$ la suite des restes obtenus lors du calcul de* $\mathrm{PGCD}(a,b)$ *par l'algorithme d'Euclide. On suppose pour simplifier que $n=2k$ est pair; montrer (en utilisant le résultat établi en* **1.b***) que*

$$a>2r_0>2^2r_2>\cdots>2^kr_{2k-2}>2^{k+1}r_{2k}=0.$$

En déduire que $k<\frac{\log a}{\log 2}$, où log *désigne le logarithme néperien.*

En divisant a par b, on trouve $a=bq+r_0$ et $a>2r_0$ d'après le **1.b**. Si $r_0=0$, on a les résultats voulus. Si $r_0>0$, en divisant b par r_0, on trouve $b=r_0q_1+r_1$ avec $b>2r_1$, puis en divisant r_0 par r_1 (si $r_1>0$, ce que l'on suppose puisque l'on suppose que le dernier reste non nul correspond à un indice impair), il vient $r_0 = r_1 q_2 + r_2$ avec $r_0 > 2r_2$, ce qui donne finalement

$$a > 2r_0 > 2(2r_2) = 4r_2\,.$$

Si $r_2 = 0$, on s'arrête et on a les résultats voulus. Sinon, on continue jusqu'à trouver r_4. Finalement, on a bien

$$a > 2r_0 > 4r_2 > 8r_4 > \cdots > 2^k r_{2(k-1)} > 2^{k+1} r_{2k} = 0$$

si r_{2k+1} est le dernier reste non nul (donc le PGCD de a et b). Comme $r_{2(k-1)} \geq 1$, on a $a > 2^k$, soit, en prenant les logarithmes népériens,

$$k \log 2 < \log a\,,$$

ce qui est l'inégalité voulue.

Exercice 2.

2.a. *Soit j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$; montrer que*

$$1 + j + j^2 = 0$$

Ce nombre est différent de 1 et solution de $X^3 - 1 = (X-1)(1+X+X^2) = 0$. On a donc $1+j+j^2 = 0$ (on pouvait aussi faire le calcul et vérifier ce résultat).

2.b. *Quelles sont les valeurs possibles du reste $r(k)$ lors de la division euclidienne d'un entier $k \in \mathbb{N}$ par 3 ? Calculer suivant les différentes valeurs possibles prises par $r(k)$ les nombres j^k et $1 + j^k + j^{2k}$.*

Les valeurs possibles du reste sont $r(k) = 0, 1, 2$. On a $j^k = j^{3q+r(k)} = j^{r(k)}$ car $j^3 = 1$. Le nombre j^k vaut 1 si $r(k) = 0$, j si $r(k) = 1$ et j^2 si $r(k) = 2$. Le nombre $1 + j^k + j^{2k}$ vaut 3 si $r(k) = 0$ et $0 = 1 + j + j^2 = 1 + j^2 + j^4$ si $r(k) = 1$ ou $r(k) = 2$.

2.c. *Soit $n = 3m$ un entier positif ou nul multiple de 3. Calculer en fonction de m les nombres $(1+j)^n$, $(1+j^2)^n$, $2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n$.*

On a

$$\begin{aligned}
(1+j)^{3m} &= (-j^2)^{3m} = (-1)^m \\
(1+j^2)^{3m} &= (-j)^{3m} = (-1)^m \\
2^{3m} + (1+j)^{3m} + (1+j^2)^{3m} &= 8^m + 2(-1)^m
\end{aligned}$$

puisque $1 + j + j^2 = 0$ (voir le **2.a**) et $j^3 = j^6 = 1$.

Exercice 3.
Exprimer la fonction

$$f \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(t)\ \sin^2(t) + \sin(t)\ \cos(2t)$$

sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions

$$\begin{array}{ccl} t & \longmapsto & \sin(kt)\,,\ \ k \in \mathbb{N}^* \\ & \text{ou} & \\ t & \longmapsto & \cos(mt)\,,\ \ m \in \mathbb{N}^*\,. \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos t - \cos^3 t + \sin t(1 - 2\sin^2 t) = \cos t + \sin t - \cos^3 t - 2\sin^3 t \\ &= \cos t + \sin t - \frac{\cos 3t}{4} - \frac{3\cos t}{4} - 2\Big(\frac{3\sin t}{4} - \frac{\sin 3t}{4}\Big) \\ &= \frac{\cos t}{4} - \frac{\sin t}{2} - \frac{\cos 3t}{4} + \frac{\sin 3t}{2}\,. \end{aligned}$$

Exercice 4.
Soit T un nombre réel strictement positif. Déterminer (en fonction de T) l'unique fonction

$$y_T \ :]0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}\,,$$

dérivable sur $]0, +\infty[$ et solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} xy'(x) + 2y(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\ y_T(T) &= 1 \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation homogène

$$xy'(x) + 2y(x) = 0\,,\ \ x \in]0, +\infty[$$

est solution de

$$y'(x)/y(x) = -2/x\,,$$

soit

$$\log|y(x)| = -2\log|x| + \text{constante}\,,$$

ce qui équivaut à

$$y(x) = \frac{C}{x^2},$$

C désignant une constante arbitraire. La méthode de variation des constantes donne, pour la recherche d'une solution particulière du type $x \longmapsto C(x)/x^2$,

$$x\frac{C'(x)}{x^2} = \frac{x}{x^2+1}, \ x \in]0, +\infty[,$$

soit

$$C'(x) = \frac{x}{x^2+1},$$

qui s'intègre en

$$C(x) = \log\sqrt{x^2+1} + K,$$

où K est une constante arbitraire. La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$y(x) = \frac{K}{x^2} + \frac{\log\sqrt{x^2+1}}{x^2},$$

où K est une constante arbitraire. Pour avoir $y(T) = 1$, on doit choisir la constante K ainsi :

$$K = T^2 - \log\sqrt{T^2+1}.$$

<u>Exercice 5.</u>

5.a. *Exprimer en termes d'expressions usuelles, pour $x \in]-1, +\infty[$, l'intégrale*

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2+3t+2}.$$

On remarque que

$$(t^2+3t+2) = (t+1)(t+2)$$

et que l'on peut par conséquent écrire

$$\frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2},$$

où a et b sont des constantes à déterminer. Par simple identification, on trouve

$$b(t+1) + a(t+2) \equiv 1,$$

soit $a = -b$ et $2a + b = 1$, ce qui nous donne $a = 1$ et $b = -1$. On a donc, pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{dt}{t^2+3t+2} &= \int_0^x \frac{dt}{t+1} - \int_0^x \frac{dt}{t+2} \\ &= \log(x+1) - (\log(x+2) - \log 2) = \log\left[\frac{2(x+1)}{x+2}\right].\end{aligned}$$

5.b. *La fonction $x \in]-1, +\infty[\longmapsto F(x)$ est-elle dérivable sur $]-1, +\infty[$? Si oui, quelle est sa fonction dérivée ?*

La fonction F est, d'après le cours, une primitive de la fonction continue

$$x \in]-1, +\infty[\longmapsto \frac{1}{x^2+3x+2}.$$

Elle est donc dérivable sur $]-1, +\infty[$, de dérivée précisément cette fonction

$$f\ : x \in]-1, +\infty[\longmapsto \frac{1}{x^2+3x+2}.$$

5.c. *Calculez les limites de la fonction F respectivement en -1 (à droite) et $+\infty$. Montrer que $F(]-1, +\infty[)$ est un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ (que l'on précisera) et que la fonction $F\ : I \longrightarrow J$ admet une fonction réciproque $G\ : J \longrightarrow I$.*

Comme

$$F(x) = \log\left[\frac{2(x+1)}{x+2}\right] \qquad \forall x \in]-1, +\infty[,$$

on a

$$\lim_{x\to -1^+} F(x) = \lim_{x\to -1^+} \log(x+1) = -\infty$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\log 2 + \log\frac{1+1/x}{1+2/x}\right) = \log 2.$$

Comme la fonction F a pour dérivée sur $]-1, +\infty[$ la fonction strictement positive (sur cet intervalle) f, la fonction F est une application strictement croissante sur $]-1, +\infty[$. L'image de F est donc incluse dans l'intervalle $]-\infty, \log 2[$ puisque F est croissante et que $\log 2$ est la limite lorsque x tend vers $+\infty$. Comme F tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers -1, F peut prendre des valeurs arbitrairement petites ; comme F tend vers $\log 2$ lrsque x tend vers $+\infty$, F peit prendre sur $]-1, +\infty[$ des valeurs arbitrairement proches de $\log 2$. Comme de plus, F est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que toutes les valeurs entre $-\infty$ et $\log 2$ (exclu) sont attteintes sur $]-1,+\infty[$. L'image par F de l'intervalle $]-1,+\infty[$ est donc l'intervalle $J =]-\infty, \log 2[$ et F est bijective (injective car strictement croissante, surjective comme on vient de le voir) de I dans J. La fonction F admet donc une fonction réciproque $G\ : J \longrightarrow I$.

5.d. Calculer $G(y)$ en fonction de y. Montrer que G est dérivable en tout point y de J et calculer $G'(y)$ pour $y \in J$.

Pour trouver la fonction réciproque G, il suffit, étant donné $y \in]-\infty, \log 2[$, de résoudre

$$\begin{aligned} \log\left[\frac{2(x+1)}{x+2}\right] = y &\iff \frac{2(x+1)}{x+2} = e^y \\ &\iff 2(x+1) = (x+2)e^y \\ &\iff x = \frac{2(e^y-1)}{2-e^y}\,. \end{aligned}$$

On a donc

$$G(y) = \frac{2(e^y-1)}{2-e^y} \qquad \forall\, y \in]-\infty, \log 2[\,.$$

Soit on peut vérifier que G est dérivable (quotient de fonctions dérivables) et calculer $G'(y)$ directement, soit on peut appliquer le résultat du cours qui nous permet d'affirmer que $G\ : J \to I$ est dérivable comme fonction inverse d'une fonction F dont la dérivée f ne s'annule pas sur I et que

$$G'(y) = \frac{1}{f(G(y))} = G(y)^2 + 3G(y) + 2\,.$$

Les deux calculs conduisent au même résultat, à savoir :

$$G'(y) = \frac{2e^y}{(2-e^y)^2} \qquad \forall\, y \in]-\infty, \log 2[\,.$$

Exercice 6.

Soit $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \exp(-1/t) \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

6.a. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en $t = 0$.*

La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ comme composée de la fonction continue $t \in]0, +\infty[\longmapsto 1/t$ avec la fonction continue $u \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-u}$. Elle est continue sur $]-\infty, 0[$ car égale sur cet intervalle à la fonction identiquement nulle. Reste le problème en 0. On a

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} e^{-1/t} = 0$$

car $1/t$ tend vers $+\infty$ si t tend vers 0 par valeurs supérieures et que

$$\lim_{u \to +\infty} e^{-u} = 0\,.$$

La fonction f (qui est identiquement nulle à gauche de 0 et admet en 0 la valeur $0 = f(0)$ comme limite à droite) est bien continue aussi en $t = 0$.

6.b. *Montrer que f est dérivable en $t = 0$ et calculer $f'(0)$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et tracer sommairement le graphe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.*

On a

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{e^{-1/t}}{t} = \lim_{u \to +\infty} u e^{-u} = 0$$

car l'exponentielle impose sa limite aux fonctions puissances. Comme f est identiquement nulle sur $]-\infty, 0[$, on a donc

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 0$$

et la fonction f est donc dérivable en $t = 0$ avec $f'(0) = 0$. On a

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = e^0 = 1$$

et la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Voici donc sur la figure ci-dessous l'allure du graphe de f. On constate qu'au voisinage de 0, le graphe de f est tangent à l'axe des x et que la fonction croît lentement ; en revanche la croissance « s'accélère très vite vers l'asymptote horizontale $y = 1$.

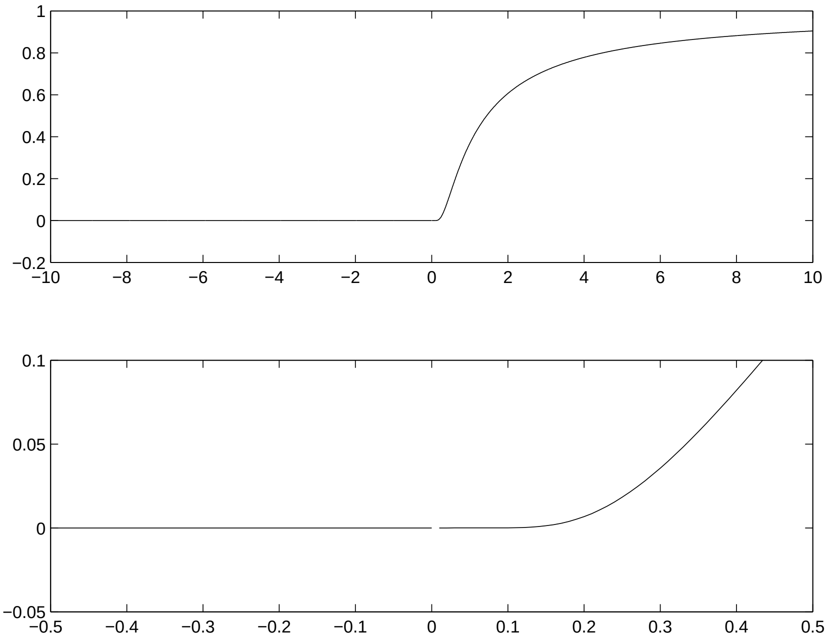

FIG. 1 – Tracé du graphe complet de f et des détails près de l'origine

6.c. *On rappelle qu'une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est indéfiniment dérivable sur I si f est dérivable sur I, de fonction dérivée $f' = f^{(1)}$, avec f' dérivable sur I et de fonction dérivée $f'' = f^{(2)}$, f'' dérivable sur I et de fonction dérivée $f^{(3)}$,..., $f^{(n)}$ dérivable sur I et de fonction dérivée $f^{(n+1)}$, etc.*

Après avoir rappelé le principe du raisonnement par récurrence, montrer que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction dérivée à l'ordre n (notée $f^{(n)}$) est de la forme

$$f^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \dfrac{P_n(t)}{t^{2n}} \exp(-1/t) \text{ si } t > 0\,, \end{cases}$$

où P_n est une fonction polynômiale de degré exactement $n-1$. Préciser la relation de récurrence permettant d'exprimer le polynôme P_{n+1} à partir du polynôme P_n lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

Le principe de récurrence repose sur l'axiome de Peano et se formule ainsi : supposons que l'on veuille montrer une propriété $\mathcal{P}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (ici par exemple que f est dérivable à l'ordre n sur $\mathbb{R}$ avec une dérivée n-ème du type voulu) ; on commence par vérifier $\mathcal{P}(n)$ au cran initial (ici $n = 1$), puis on démontre l'implication

$$\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire ; il en résultera que $\mathcal{P}(n)$ sera vraie pour tout entier $n \geq 1$. Dans notre cas, f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ à l'ordre 1 et l'on a

$$\forall t \in]0, +\infty[\,,\ f'(t) = \frac{1}{t^2}\, e^{-1/t}$$

et, pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = 0$; la propriété $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que f est dérivable à l'ordre n sur $\mathbb{R}$ et que

$$f^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \dfrac{P_n(t)}{t^{2n}} \exp(-1/t) \text{ si } t > 0\,, \end{cases}$$

où P_n est une fonction polynômiale de degré exactement $n-1$. La fonction $f^{(n)}$ est naturellement dérivable (de dérivée identiquement nulle) sur $]-\infty, 0[$ (car $f^{(n)}$ est la fonction nulle sur cet intervalle) et dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables ; sur $]0, +\infty[$, on a (en utilisant les règles de dérivation d'un produit, d'un quotient ou d'une application composée)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f^{(n)}(t)] &= \frac{P_n'(t)t^{2n} - 2nt^{2n-1}P_n(t)}{t^{4n}}\, e^{-1/t} + \frac{P_n(t)}{t^{2(n+1)}}\, e^{-1/t} \\ &= \Big(\frac{tP_n'(t) - 2nP_n(t)}{t^{2n+1}} + \frac{P_n(t)}{t^{2(n+1)}}\Big) \times e^{-1/t} \\ &= \frac{t^2P_n'(t) - (2nt-1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}} \times e^{-1/t} \\ &= \frac{P_{n+1}(t)}{t^{2(n+1)}} \times e^{-1/t}\,, \end{aligned}$$

où

$$P_{n+1}(t) := t^2 P_n'(t) - (2nt-1)P_n(t)\,.$$

Le polynôme P_{n+1} est exactement de degré n car si

$$P_n(X) = a_n X^{n-1} + \cdots$$

avec $a_n \neq 0$, alors

$$P_{n+1}(X) = [a_n(n-1) - 2na_n]X^n + \cdots = -(n+1)a_nX^n + \cdots$$

La dérivée de $f^{(n)}$ est donc de la forme requise dans la clause $\mathcal{P}(n+1)$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Comme l'exponentielle impose sa limite aux fonctions puissances, on a

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{f^{(n)}(t)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \left[\frac{P_n(t)}{t^{2n+1}} \, e^{-1/t} \right] = 0$$

et la fonction $f^{(n)}$ est aussi dérivable en $t = 0$, de nombre dérivé $f^{(n+1)}(0) = 0$ en ce point. La fonction $f^{(n)}$ est donc bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est de la forme

$$f^{(n+1)}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \dfrac{P_{n+1}(t)}{t^{2(n+1)}} \exp(-1/t) \text{ si } t > 0 \, , \end{cases}$$

avec

$$P_{n+1}(X) := t^2 P_n'(X) - (2nX - 1) P_n(X)$$

et

$$\deg P_{n+1} = n = (n+1) - 1 \, .$$

Toutes les affirmations contenues dans l'assertion $\mathcal{P}(n+1)$ sont bien démontrées et on vient de prouver que $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$ en précisant au passage comment le polynôme P_{n+1} se déduisait de P_n. On a répondu complètement à la question.