

C'est dans son mémoire *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe* (*Problème de Cauchy* III), publié en 1959 (Bull. Soc. math. France, 87, 1959, 81-180), qu'en introduisant, suivant en cela Poincaré et de Rham, le formalisme de la division des formes et son pendant homologique, Jean Leray a posé les jalons de ce qui était appelé, tout au long des trente années qui ont suivi ce travail de pionnier, à se muer en une théorie opérationnelle du calcul résiduel.

L'histoire commence avec un lemme effectif de division des formes différentielles adapté de de Rham par Leray: si U est un ouvert de \mathbf{C}^n , s une fonction holomorphe dans U telle que $ds \neq 0$ sur $\{s = 0\}$, k un entier strictement positif arbitraire, p un entier entre 0 et $2n - 1$, alors, toute $p + 1$ forme régulière fermée φ dans $U \setminus \{s = 0\}$ semi-méromorphe et présentant un pôle d'ordre k le long de $\{s = 0\}$ (ceci signifiant que $s^k \varphi$ est une forme C^∞ dans U) se "divise" par ds sous la forme

$$\varphi = \frac{ds}{s^k} \wedge \psi + \frac{\theta}{s^{k-1}},$$

ψ et θ étant des formes régulières dans U . Particulièrement intéressant est le cas $k = 1$, car alors la restriction de ψ à l'hypersurface lisse $\{s = 0\}$ est une forme fermée, que Leray appelle *forme résidu* de φ relativement à l'hypersurface lisse $\{s = 0\}$ (ou encore dérivée de φ sur $\{s = 0\}$ par rapport à s). Notons que le lemme de division des formes, une fois itéré, autorise ce que l'on appelle *le relèvement de l'ordre du pôle*: étant donnée une $p + 1$ forme fermée dans $U \setminus \{s = 0\}$, à pôle d'ordre au plus k sur $\{s = 0\}$, on peut trouver dans la classe de cohomologie qu'elle définit dans $H^{p+1}(U \setminus \{s = 0\})$ un représentant semi-méromorphe à pôle au plus simple le long de $\{s = 0\}$.

Ce mécanisme permet d'associer, à toute $p + 1$ -classe de cohomologie $\dot{\varphi}$ de $U \setminus \{s = 0\}$ admettant un représentant semi-méromorphe à pôles le long de $\{s = 0\}$, une classe de cohomologie $\text{Res}[\dot{\varphi}]$ de $H^p(\{s = 0\})$, à savoir la classe dont un représentant est la forme résidu de φ_1 , représentant de la classe $\dot{\varphi}$ ayant un pôle au plus simple le long de $\{s = 0\}$. De fait, l'hypothèse suivant laquelle la classe de cohomologie $\dot{\varphi}$ de $U \setminus \{s = 0\}$ contient un représentant semi-méromorphe s'avère inutile, et le mérite de la théorie de Leray est précisément de mettre en évidence, par le jeu de la dualité homologie-cohomologie chère à Poincaré, que le morphisme résidu est bien défini de $H^{p+1}(U \setminus \{s = 0\})$ dans $H^p(\{s = 0\})$, et qu'il lui est associé un *morphisme cobord* δ_p de $H_p(\{s = 0\})$ dans $H_{p+1}(U \setminus \{s = 0\})$, le couplage des deux morphismes se trouvant précisément réalisé par la *formule des résidus*

$$\int_\gamma \varphi = 2i\pi \int_h \text{Res}[\dot{\varphi}], \quad \dot{h} \in H_p(\{s = 0\}), \quad \dot{\varphi} \in H^{p+1}(U \setminus \{s = 0\}), \quad \gamma \in \delta_p(\dot{h}), \quad (1)$$

* A. Yger, Laboratoire de Mathématiques Pures, Université Bordeaux 1, 33405, Talence yger@math.u-bordeaux.fr

généralisation naturelle du théorème des résidus à une variable, qui devient ainsi, comme dans ce cadre, l'outil-clef du calcul d'intégrales. Le mérite de Leray est d'avoir aussi proposé une réalisation géométrique du *morphisme cobord*: si \dot{h} désigne un élément du groupe d'homologie $H_p(\{s=0\})$, un cycle $\gamma \in Z_{p+1}(U \setminus \{s=0\})$ est un représentant de $\delta_p(\dot{h})$ si et seulement si il existe un cycle $\tau \in Z_p(\{s=0\})$ tel que $\dot{\tau} = \dot{h}$ dans $H_p(\{s=0\})$, un $p+2$ -simplexe $\tilde{\tau}$ de U (que l'on construit par le biais d'une *rétraction* sur l'hypersurface $\{s=0\}$), dont le support intersecte cette hypersurface lisse précisément le long du support du cycle τ et ce de manière transverse, tel que γ soit homologue à $\partial\tilde{\tau}$ dans $U \setminus \{s=0\}$. Cette construction ne fait que reproduire la situation naïve de la dimension 1, celle où $\tau = \{0\}$, $\tilde{\tau}$ est un disque du plan complexe de centre l'origine (donc rétractable sur ce point); un cycle γ de $U \setminus \{0\}$ est un représentant de $\delta(\{0\})$ s'il est homologue au bord d'un tel disque $\tilde{\tau}$ dans $U \setminus \{0\}$; ceci est en conformité avec la classique formule des résidus à une variable.

Les morphismes *cobord* et *résidu* de Leray sont ainsi des êtres géométriques et l'on peut les penser dans une situation non plus locale mais globale, celle où \mathcal{X} est une variété analytique complexe de dimension n dans laquelle \mathcal{S} serait une hypersurface complexe lisse. Le lemme de division des formes, ou de relèvement de l'ordre du pôle, posé cette fois en termes globaux, est à l'origine de nombre de questions géométriques très intéressantes ne serait-ce que dans l'espace projectif: on se référera au mémoire de Griffiths [G] sur les périodes d'intégrales abéliennes ou aux travaux de l'école de Krasnoiarsk [A-Y]. La présentation de la théorie de Leray dans la monographie de L.A. Aizenberg et A.P. Yuzhakov [A-Y] (avec les applications naturelles auxquelles elle conduit), ainsi dans celle de A. Tsikh [T], m'ont été d'une aide précieuse dans la rédaction de ce court texte initiatique à cet aspect des travaux de Jean Leray. J'ajoute que l'idée de relèvement de l'ordre du pôle a poursuivi son chemin depuis les travaux de Leray, puis de P. Griffiths: en introduisant par exemple des méthodes basées sur la théorie de Hodge mixte, P. Deligne et A. Dimca [D-D] ont étudié la filtration par l'ordre du pôle (relatif à une hypersurface \mathcal{S} dans \mathbf{P}^n) et pu ainsi étendre au cas singulier certains résultats de relèvement que la théorie de Leray permettait jusque là d'interpréter dans le cas où \mathcal{S} s'avérait être lisse. Dans le même esprit, le point de vue géométrique de Leray, couplé avec les idées analytiques introduites et développées par D. Barlet, soutant aussi les efforts visant à comprendre les êtres globaux que sont les $(k,0)$ -formes de première espèce sur une sous-variété singulière de \mathbf{P}^n (comme dans le travail récent de G. Henkin et M. Passare [H-P]).

Le *morphisme cobord* de Leray transporte l'homologie sur \mathcal{S} en l'homologie sur $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$, tandis que le *morphisme résidu* transforme lui la cohomologie sur $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$ en la cohomologie sur \mathcal{S} , le couplage entre les deux chaînes de morphismes étant réalisé par la *formule des résidus* (1). Si l'on a en tête le calcul d'intégrales, objectif majeur de cette formule, il est naturel, et c'est ce qu'a fait Leray, de penser à itérer la construction des deux morphismes comme suit. Soient $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$, $1 \leq m \leq n$, m hypersurfaces de \mathcal{X} , en position transverse.

On a la chaîne d'inclusions

$$\begin{aligned}
& \mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_m \subset \mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_{m-1} \\
& \left(\mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_{m-1} \right) \setminus \mathcal{S}_m \subset \left(\mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_{m-2} \right) \setminus \mathcal{S}_m, \\
& \left(\mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_{m-2} \right) \setminus \left(\mathcal{S}_{m-1} \cup \mathcal{S}_m \right) \subset \left(\mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_{m-3} \right) \setminus \left(\mathcal{S}_{m-1} \cup \mathcal{S}_m \right) \\
& \dots \\
& \mathcal{S}_1 \setminus \left(\mathcal{S}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_m \right) \subset \mathcal{X} \setminus \left(\mathcal{S}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_m \right);
\end{aligned}$$

l'itération des morphismes cobord permet alors de construire un *morphisme cobord itéré* (noté $\delta^{\text{itéré}}$) transformant l'homologie sur la variété lisse $\mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_m$ en l'homologie sur $\mathcal{X} \setminus (\mathcal{S}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_m)$. Ce morphisme va de pair avec un *morphisme résidu itéré* (noté cette fois $\text{Res}^{\text{itéré}}$) transformant, lui, la cohomologie sur $\mathcal{X} \setminus (\mathcal{S}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_m)$ en la cohomologie sur $\mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_m$, les deux morphismes étant couplés via la *formule des résidus itérés*

$$\int_{\gamma} \varphi = (2i\pi)^m \int_h \text{Res}^{\text{itéré}}[\dot{\varphi}], \quad \dot{h} \in H_p \left(\bigcap_{l=1}^m \mathcal{S}_l \right), \quad \dot{\varphi} \in H^{p+m} \left(\mathcal{X} \setminus \bigcup_{l=1}^m \mathcal{S}_l \right), \quad \gamma \in \delta^{\text{itéré}}(\dot{h}). \quad (2)$$

C'est certainement dans les travaux de Jean Leray, au travers de son approche de la construction du *morphisme cobord* via l'idée géométrique de rétraction évoquée plus haut, qu'il faut chercher l'essence de la théorie qu'ont par la suite développé depuis les années 1970 (une fois établi par H. Hironaka en 1969 le mécanisme de résolution des singularités en caractéristique 0) N. Coleff et M. Herrera, puis les élèves de Miguel Herrera, A. Dickenstein et C. Sessa. Du fait qu'elle allie le principe de la construction de l'objet cohomologique avec le point de vue moins rigide des courants (autorisant ainsi le maniement des formes différentielles C^∞ mais non nécessairement fermées), cette théorie, développée dans la décennie 70-80, élargit à la fois le cadre et l'aspect opérationnel du calcul résiduel multi-variables en analyse. Notons que le souci de cet aspect opérationnel était déjà, nous y reviendrons, une priorité dans les travaux de Leray. Disons quelques mots de la construction des courants résiduels suivant les idées de Coleff et Herrera [C-H] pour souligner à quel point elle s'inscrit en droite ligne dans le cadre de la théorie proposée dès 1959. Étant donnée une famille $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$ d'hypersurfaces de \mathcal{X} définies localement par les équations réduites $\{s_1 = 0\}, \dots, \{s_m = 0\}$ et une r forme ω semi-méromorphe à pôles le long de $\mathcal{S}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_m$, on définit l'action d'un (r, m) -courant résiduel $\mathcal{R}_{(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m)}[\omega]$ sur une $(n-r, n-m)$ -forme test φ via ce que l'on pourrait considérer comme une transcription au cadre de la théorie des courants de la formule de Leray (2)

$$\langle \mathcal{R}_{(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m)}[\omega], \varphi \rangle = \frac{1}{(2i\pi)^m} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{|s_1|=\epsilon_1(\xi), \dots, |s_m|=\epsilon_m(\xi)} \omega \wedge \varphi,$$

où $\epsilon_l(\xi)$ tend vers 0 pour tout l avec ξ et $\epsilon_l = o(\epsilon_{l+1}^j)$ au voisinage de 0 pour tout l entre 1 et $m-1$ et tout entier positif j . Si une telle définition dépend à priori de l'ordre dans lequel sont indexées les hypersurfaces, il ne subsiste plus qu'une dépendance alternée

en cet ordre lorsque ces hypersurfaces définissent une intersection complète. Dans le cas particulier où $m = n$ et où les hypersurfaces s'intersectent proprement, mais cette fois non nécessairement de manière transverse comme dans la théorie de Leray, on peut voir le cycle $\{|s_1| = \epsilon_1, \dots, |s_n| = \epsilon_n\}$ comme le cycle obtenu après n itérations du *morphisme cobord* depuis $\mathcal{S}_1 \cap \dots \cap \mathcal{S}_n$; si ω est la fonction $1/s_1^{q_1} \dots s_n^{q_n}$, l'application qui, suivant la définition de $R_{(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n)}[\omega]$, associe à la $(n, 0)$ -forme φ (que nous supposons holomorphe au voisinage de $\mathcal{S}_1 \cap \dots \cap \mathcal{S}_n$ pour respecter le point de vue cohomologique de Leray) le nombre

$$\frac{1}{(2i\pi)^n} \lim_{\vec{\epsilon} \rightarrow 0} \int_{|s_1|=\epsilon_1, \dots, |s_n|=\epsilon_n} \frac{\varphi}{s_1^{q_1} \dots s_n^{q_n}}$$

est, vu sous un angle géométrique, le *morphisme résidu* de Grothendieck; si les hypersurfaces sont de plus supposées transverses au sens de Leray, le calcul du résidu de Grothendieck correspond donc dans ce cas à celui du résidu itéré de Leray; mais autant les points de vue de A. Grothendieck, G. Scheja, U. Storch, E. Kunz, et plus récemment J. Lipman, privilégient les aspects algébriques, même si l'on y retrouve aussi le formalisme du calcul extérieur, autant celui de Leray privilégie, lui, l'aspect géométrique de la théorie des résidus, ce qui a permis à la théorie des courants d'en élargir les possibilités aux fins de questions de nature analytique telles que celles qu'il se posait. Notons aussi que les classiques et importantes formules des résidus de Jacobi dans le cadre projectif (voir par exemple [G-H]) ou de A. Khovanskii [Kho] dans le cas torique, généralisant de une à plusieurs variables le fameux résultat d'Euler

$$\sum_{\alpha, P(\alpha)=0} \text{Res}_\alpha [Qdz/P] = 0$$

si $P, Q \in \mathbf{C}[X]$, $\deg Q \leq \deg P - 2$, s'expliquent aisément du point de vue géométrique (du moins sous des hypothèses de généricité) comme conséquences de la théorie de Leray. Ceci est à souligner d'autant plus que l'on pressent aujourd'hui le rôle majeur que semblent avoir de telles formules dans les questions d'effectivité en géométrie algébrique.

Pour motiver notre conclusion, signalons quelques faits révélateurs de l'importance des idées introduites par Leray. Parmi les diverses conséquences de la théorie des résidus vue sous l'angle analytique, telle qu'elle a été développée depuis Coleff-Herrera sous l'impulsion de P. Dolbeault, F. Norguet, J. Poly, M. Passare, A. Tsikh, V. Palamodov, J.E. Björk, C.A. Berenstein, R. Gay et moi même, on retrouve (avec par exemple les résultats de Berndtsson-Passare et la toute récente thèse de Stéphane Rigat soutenue à Marseille en Décembre 1998) une formulation du principe fondamental de L. Ehrenpreis sur la représentation explicite des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles dont les symboles définissent une intersection complète. Dès 1980, D. Zeilberger [Z], s'inspirant précisément de la méthode des résidus itérés de Leray, judicieusement combinée avec l'utilisation de la transformée de Cauchy, avait proposé une approche semi-locale de ce principe. Ainsi, la motivation principale qui guidait Leray en 1959 retrouve t-elle son écho aujourd'hui au travers des retombées de ces nouveaux développements. Autre point qui situe bien le rôle de pionnier de Jean Leray, il convient aussi de souligner l'importance capitale que prennent actuellement, au moment où l'outil résidu se mue en un outil de calcul opérationnel, les

formules qui commandent tout le calcul résiduel, à savoir ce que depuis Griffiths on appelle *loi de transformation* (liant le calcul résiduel relativement à (f_1, \dots, f_n) à celui relativement à (g_1, \dots, g_n) lorsque $g = A.f$, voir encore [G-H], chapitre 6) ou ses diverses généralisations telles celles proposées par A. Kytmanov [Kyt]. C'est certainement à Leray, à travers le principe du lemme de division des formes évoqué au début de ce texte, que revient l'idée qui consiste à remarquer que ces lois de transformation (qui, vues sous le regard des algébristes, s'interprètent comme des conséquences du théorème d'algèbre linéaire de Wiebe) peuvent aussi être pensées comme des avatars de la chain-rule du calcul différentiel de Leibnitz (comme l'ont souligné F. Norguet et S. Ofman). Profitons ici de cette occasion pour renvoyer le lecteur au joli texte de F. Norguet [N], où l'on voit les formules de Bochner-Martinelli entrer également en jeu, ce qu'elles n'auront de cesse de faire dans toutes les années qui suivront.

Précisément parce que le point de vue de Leray est un point de vue géométrique (issu de celui de Poincaré et de de Rham) tandis que ses motivations sont d'ordre analytique (problème de Cauchy, formule de Cauchy-Fantappié), il a su inspirer autant de développements qui en ont fait une étape vers l'unification tant souhaitée des diverses démarches entreprises tant par les algébristes que les analystes vers une réalisation effective de la théorie de la dualité et du programme de A. Grothendieck. Pour toutes ces raisons, les idées développées dans *Problème de Cauchy III* resteront des idées phares dans un domaine aujourd'hui en pleine renaissance.

[A-Y] L.A Aizenberg, A. P. Yuzhakov, *Integral representation in multidimensional residue calculus*, Translation of Amer. Math. Soc. 58, 1980.

[C-H] N. Coleff et M. Herrera, *Les courants résiduels associés à une forme méromorphe*, Lect. Notes in Math 633, Springer 1978.

[D-D] P. Deligne et A. Dimca, Filtrations de Hodge et par l'ordre du pôle pour les hypersurfaces singulières, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 23, 1990, 645-656.

[G] P. Griffiths, On the periods of certain abelian integrals I, Ann. of Maths. (2), 90 (1969), 460-495.

[G-H] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1978.

[H-P] G. Henkin et M. Passare, Abelian differentials on singular varieties and variations on a theorem of Lie-Griffiths. Invent. Math. 135 1999, no. 2, 297-328.

[Kho] A. Khovanskii, Newtopn polyedra and the Euler-Jacobi formula, Russian Math Surveys 33, 1978, 6, 237-238.

[Kyt] A. M. Kytmanov, A transformation formula for Grothendieck residues and some of its applications, Siberian Math. J. 29, 1988, 495-499.

[N] F. Norguet, Dérivées partielles et résidus de formes différentielles sur une variété analytique complexe, Séminaire Lelong 1958/59, exposé 10.

[T] A. Tsikh, *Multidimensional residues and their applications*, Translation of Amer. Math. Soc. 103, 1992.

[Z] D. Zeilberger, A new proof to Ehrenpreis's semilocal quotient structure theorem, Amer. J. Math. 100 (1978), 6, 1317-1332.