

Traitement du Signal et Ondelettes
Master Ingénierie Mathématique

Alain Yger

22 septembre 2008

Table des matières

1	Introduction : signaux et images	1
1.1	De l'analogique au digital	1
1.2	Du déterministe au stochastique	4
1.3	L'analyse de Fourier	5
1.3.1	Spectre d'un signal ou d'une image d'énergie finie	5
1.3.2	Un premier souci : le principe d'incertitude	9
1.3.3	Le spectre des signaux périodiques	10
1.3.4	Un souci numérique : le problème de l'échantillonnage	12
2	L'outil Fourier	15
2.1	La transformée de Fourier discrète d'une signal digital ou d'une image	15
2.1.1	Définition de la transformation ; notion de dft	15
2.1.2	Aspects algorithmiques de la dft ; algorithmes de fft	19
2.2	Sommes d'exponentielles et transformation de Fourier	25
2.3	Corrélation et algorithme autorégressif	30
2.3.1	Matrice de covariance, corrélation, densité spectrale de puissance	30
2.3.2	La recherche des paramètres d'autorégressivité	34
2.4	Les transformations du type Wigner-Ville	37
3	L'analyse temps-échelles et ses applications	45
3.1	Pourquoi analyser en temps et en échelles ?	45
3.2	Le principe de l'analyse temps-échelles continue (Continuous Wavelet Transform)	46
3.3	Deux applications de la transformation temps-échelles continue	54
3.3.1	Séparation signal/bruit	54
3.3.2	Restauration d'un signal depuis les extréma locaux de $ CWT[s] $	57
3.4	La décomposition de Franklin d'un signal digital	59
3.5	La perception "visuelle" d'une information et l'algorithme pyramidal	62
3.6	Le concept d'analyse multi-résolution	68
3.6.1	L'instrument d'analyse	68
3.6.2	De l'information à son "résumé".	70
3.6.3	La mère de l'analyse multi-résolution	73
3.6.4	De l'information à ses détails	74
3.6.5	La décomposition traitée sur un exemple	76
3.6.6	Les deux écueils de l'analyse multi-résolution	78
3.7	Le matching poursuit	79
3.8	La "Proper Orthogonal Decomposition"	83

4	La notion d'entropie et les algorithmes d'analyse du signal afférents	87
4.1	La notion d'entropie dans le cadre Hilbertien	87
4.1.1	Dimension théorique d'une information	89
4.2	Le <i>splitting lemma</i> (lemme de décomposition) dans le cadre dyadique	90
4.3	L'algorithme " <i>Split and Merge</i> " de V. Wickerhauser	93
4.3.1	Le cadre des signaux digitaux	93
4.3.2	Le cas des images digitales	96
4.3.3	Implémentation algorithmique en 1D	96
4.3.4	La généralisation au cadre p -adique	101
4.4	La décomposition temps-fréquences adaptative	106
5	L'outil Fourier, combiné avec l'algorithmique Hilbertienne	113
5.1	Les transformations de type Radon et leur inversion	114
5.1.1	Aspects théoriques : deux transformation mathématiques . . .	114
5.1.2	Aspects pratiques : l'imagerie médicale	116
5.1.3	Aspects numériques en 2D	118
5.2	Face au problème de l'extrapolation des informations	123
6	Quelques aspects du traitement des signaux : le filtrage	129
6.1	Filtres digitaux ; réalisabilité, causalité, stationnarité	129
6.2	Le <i>design</i> d'un filtre digital stationnaire à partir de sa fonction de transfert	131
6.3	Notion de z -transformée d'un filtre digital	134
6.4	Quelques rappels d'algèbre concernant $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$	136
6.5	Filtres A.R, filtres A.R.M.A	138
6.6	Les filtres analogiques	139
6.6.1	Signaux analogiques : le point de vue "distribution"	139
6.6.2	Filtres analogiques causaux, filtres rationnels	141
6.6.3	Filtres analogiques rationnels de Butterworth, de Tchebychev, <i>etc.</i>	142
6.6.4	Le passage de l'analogique au digital	147
7	Quelques notions de filtrage stochastique des processus discrets	153
7.1	Densité spectrale de puissance d'un processus stationnaire	153
7.2	Action d'un filtre digital sur un processus discret	154
7.3	Aspects pratiques du calcul de l'estimation spectrale stochastique . .	155
7.4	Filtrage de Wiener et déconvolution	159
7.4.1	Le filtrage de Wiener des processus discrets	159
7.4.2	La déconvolution des processus stationnaires discrets	160
7.4.3	Le filtrage de Wiener-Hopf	162

Chapitre 1

Introduction : signaux et images

1.1 De l'analogique au digital

Un *signal analogique* désigne un phénomène physique à valeurs réelles ou complexes mesuré (en termes d'énergie locale ou d'amplitude et de phase instantanées) dans un système d'unités. Le phénomène dépend en général d'une variable, le plus souvent matérialisée par le temps. Lorsqu'il dépend de deux variables, on parle d'*image analogique* plutôt que de signal analogique. Puisqu'il est utopique de penser que la mesure instantanée d'un signal ne puisse être entachée d'une erreur, il est naturel de modéliser les signaux (resp. les images) par des classes de fonctions mesurables de \mathbb{R} ou d'un intervalle de \mathbb{R} (resp. de \mathbb{R}^2 ou d'un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^2), à valeurs dans \mathbb{C} , auquel cas la définition du signal ou de l'image n'a de sens qu'à un ensemble négligeable (au sens de Lebesgue) près. Puisque l'on ne prétend traiter que des signaux auxquels on sache attacher soit une énergie, soit un module d'intensité instantanée ou de brillance, il est naturel de ne considérer comme signaux ou images que des fonctions localement intégrables au voisinage de tout point de leur domaine de définition (\mathbb{R} pour les signaux, \mathbb{R}^2 pour les images); la valeur du signal analogique s à l'instant t (ou de l'image analogique I au point (x, y)) doit être pensée comme la moyenne (pondérée selon une règle à définir, ceci sera important, nous le verrons par la suite) des valeurs de s prises au voisinage de t (ou du point (x, y) dans le cas des images). En ce sens, la théorie mathématique des distributions (une distribution s sur \mathbb{R} est par définition une forme linéaire continue de l'espace des fonctions-test C^∞ et à support compact, continue au sens où si $(\varphi_n)_n$ est une suite d'atomes-test de mieux en mieux localisés près d'un atome φ , alors $\langle s, \varphi_n \rangle$ converge vers $\langle s, \varphi \rangle$) fournit un bon modèle mathématique pour le concept de signal analogique.

Comme modèle de signal analogique, on peut par exemple citer le signal fourni sur un écran d'oscilloscope lors de la mesure d'un électrocardiogramme, ou du potentiel électrique de la peau comme sur la figure 1.1 ci-dessous.

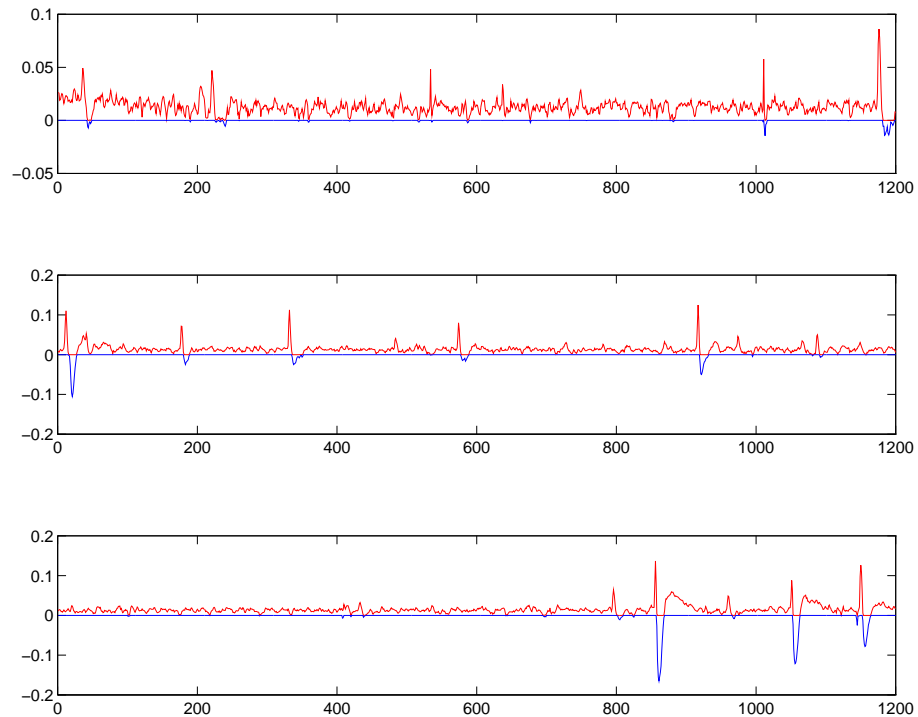


FIG. 1.1 – Un signal analogique (signal de SPR)

Parallèlement à l'étude des signaux analogiques, on peut imaginer la réalisation de signaux construits "artificiellement" à partir de signaux analogiques ; ces signaux sont indexés par l'ensemble des entiers (relatifs ou naturels) ou par l'ensemble des entiers compris entre 1 et N ; un tel signal correspond donc à une suite de nombres réels ou complexes (indexée par \mathbf{N} ou \mathbf{Z}) ou à un vecteur de \mathbf{R}^N ou \mathbf{C}^N . Par exemple, dans des signaux analogiques correspondant à l'évolution des taux boursiers, on peut mesurer la distance entre deux "creux" consécutifs et la reporter en ordonnées (indexée par le numéro du creux, ceux-ci étant pris dans l'ordre croissant) ; dans un signal tel un électrocardiogramme, on peut mesurer les distances successives entre deux pics consécutifs, $s(1)$, $s(2)$, ..., $s(j)$ = distance entre le j -ème pic et le $(j + 1)$ -ème pic et fabriquer ainsi un signal digital, dit tachogramme (on reporte la différence entre la distance d'un pic au suivant et la valeur moyenne de cette distance). L'étude du contenu fréquentiel d'un tel signal (mélangeant une composante hautes-fréquences correspondant à l'activité respiratoire et une composante moyennes-fréquences correspondant à l'activité vagale) est bien sûr très intéressante du point de vue physiologique ; voici, sur la figure 1.2 ci-dessous, deux exemples de tachogrammes.

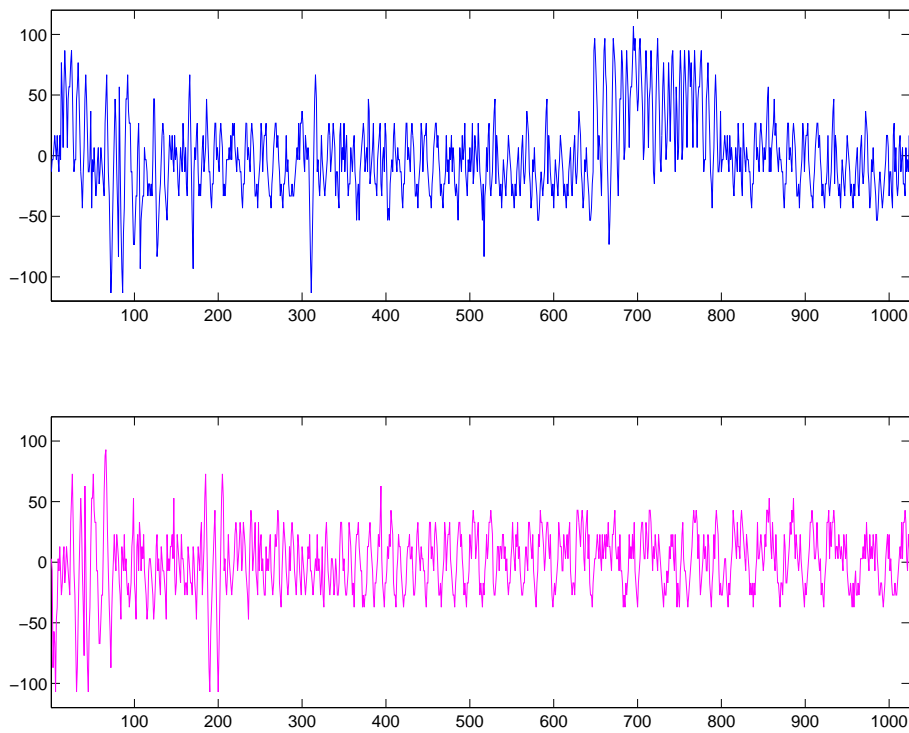


FIG. 1.2 – Deux exemples de tachogrammes

Si N est un entier strictement positif, l'espace \mathbf{R}^N (resp. \mathbf{C}^N) est un espace de Hilbert, lorsqu'il est équipé du produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{k=1}^N x_k \overline{y_k}, \quad X = (x_1, \dots, x_N), \quad Y = (y_1, \dots, y_N).$$

On peut le penser comme un espace de fonctions, puisque l'on peut identifier le vecteur X avec la fonction $\{1, \dots, N\} \mapsto \mathbb{C}, k \mapsto X(k) = x_k$. Une telle fonction est un *signal digital réel* (resp. *complexe*)

De même, si N_1 et N_2 sont deux entiers strictement positifs, l'espace des matrices réelles (resp. complexes) I de type $N_1 \times N_2$, équipé du produit scalaire

$$\langle I_1, I_2 \rangle := \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} I_1(k_1, k_2) \overline{I_2(k_1, k_2)} \quad \left(\text{resp.} \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} I_1(k_1, k_2) \overline{I_2(k_1, k_2)} \right)$$

est un espace de Hilbert ; un élément de cet espace est une *image digitale réelle* (resp. *complexe*) de type (N_1, N_2) . Chaque point marqué d'un tableau $I(k_1, k_2)$ représente l'intensité (mesurée avec une unité convenue) de ce que l'on conviendra d'appeler un *pixel*; le "nombre" $I(k_1, k_2)$ peut aussi correspondre à un code de couleurs.

Remarquons enfin que tout signal analogique se trouve toujours "échantillonné" (nous y reviendrons, car nous verrons que ceci pose un problème sérieux, dit problème de l'échantillonnage, auquel répondra le théorème de Shannon), donnant ainsi naissance à un signal digital.

Toutes les routines **MATLAB** ainsi que les signaux modèles utilisés dans ce cours peuvent être rapatriés depuis le site web

<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger>

sous la rubrique “Outils d’analyse du signal”. Ils n’ont été conçus que dans un but didactique et sans souci d’aucune performance numérique.

1.2 Du déterministe au stochastique

La mesure de tout phénomène physique, qu’il s’agisse d’un phénomène suivi au cours d’une évolution continue du temps (ce qui en pratique, on l’a déjà souligné, est irréalisable), ou suivant un maillage temporel, est entachée d’erreurs de calculs ou de bruit inhérents à l’instrumentation ou à l’espace ambiant dans lequel est effectué l’enregistrement. Ces avatars échappent à une modélisation déterministe, d’où la nécessité d’introduire parallèlement (ou en contrepoint) au point de vue déterministe un point de vue stochastique. Cette nécessité se trouve confortée par le fait que bien souvent les signaux que l’on souhaite enregistrer ou mesurer correspondent eux même à des modèles probabilistes (tels des bruits poissonniens d’émission en imagerie médicale ou échographie).

Des logiciels scientifiques tels que MATLAB simulent la réalisation de signaux probabilistes ; de fait, ce qui est simulé est une réalisation d’un tel signal. Si l’on se place du point de vue discret, un signal discret probabiliste correspond à la donnée d’une suite de variables aléatoires $(X_k)_k$ indexée par \mathbb{Z} (ou par $\{1, \dots, N\}$), toutes définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) , et ayant toutes un moment d’ordre 2

$$\int_{\Omega} |X_k(\omega)|^2 dP(\omega) = \text{Espérance de } |X_k|^2$$

fini. Une commande telle que

```
> s= 2*rand(1,N)-1;
```

simule par exemple sous MATLAB un vecteur ligne $(X_1(\omega_0), \dots, X_N(\omega_0))$ correspondant à un événement donné ω_0 , où la suite d’aléas X_1, \dots, X_N est ce que l’on appelle un bruit blanc : ces aléas sont tous de moyenne nulle et la corrélation entre les aléas X_{k_1} et X_{k_2} , soit

$$\int_{\Omega} X_{k_1}(\omega) \overline{X_{k_2}(\omega)} dP(\omega) = \text{Espérance de } X_{k_1} \overline{X_{k_2}}$$

vaut 1 si $k_1 = k_2$, 0 sinon. On peut aussi imaginer des bruits “colorés” (la corrélation entre X_{k_1} et X_{k_2} est une fonction de $k_1 - k_2$ plus complexe que la fonction valant 1 en 0 et 0 partout ailleurs). On verra aussi plus loin dans le cours des exemples importants de processus, ceux de Poisson (les signaux émis par un organe émettant un rayonnement capté dans un dispositif échographique ou tomographique comme le CAT-Scanner sont en général des bruits poissonniens) ou de Wiener.

Concernant les signaux probabilistes, un concept important se fait jour, celui de *stationnarité*. La stationnarité d’un signal équivaut au fait que la loi conjointe des aléas $(X_{k_1+m}, \dots, X_{k_N+m})$ ne dépend que de m , et ce pour tout choix des instants k_1, \dots, k_N (la loi du processus ne dépend pas de l’instant à partir duquel on le regarde). On verra dans la section suivante quel est le pendant déterministe de ce concept (en gros, les fréquences du signal ne changent pas et les amplitudes sont faiblement modulées). Dans la pratique, et comme la notion de stationnarité est trop

contraignante à manier, on introduit la notion de stationnarité “au sens faible” (ou encore au second ordre) en disant qu’un signal probabiliste $(X_k)_k$ est stationnaire au sens faible si et seulement si tous les aléas X_k ont même espérance m et sont tels que la corrélation entre X_{k_1} et X_{k_2} , soit

$$\int_{\Omega} (X_{k_1}(\omega) - m)(\overline{X_{k_2}(\omega) - m}) dP(\omega),$$

ne dépende que de $k_2 - k_1$ (et non de k_1 et k_2 considérés comme des indices indépendants).

On comprend aisément pourquoi la notion de *corrélation* (et les calculs de corrélation entre signaux digitaux) jouera un rôle majeur dans ce cours, même si celui-ci est plus dévolu à l’étude des signaux déterministes qu’à celle des signaux probabilistes (on dit aussi les processus stochastiques pour parler de tels signaux dont les modèles sont bien sûr les bruits).

1.3 L’analyse de Fourier

Les idées développées tout au long du 19-ème siècle avec les travaux de Joseph Fourier (1768-1830) et de Maxwell ont conduit à l’idée majeure selon laquelle tout phénomène est un “empilement” de phénomènes oscillants. Il convient cependant de distinguer deux points de vue : celui qui consiste à concevoir les phénomènes comme “s’évanouissant” à l’infini et celui qui consiste à les imaginer se reproduisant à l’infini de manière périodique : le phénomène correspond alors à un “motif” sur le laps de temps $[0, T]$, l’intervalle digital $\{1, \dots, N\}$, ou le rectangle spatial $[0, T_1] \times [0, T_2]$, motif qui se trouve périodisé de manière à générer un signal ou une image périodique du \mathbb{R} , sur \mathbb{Z} , ou sur \mathbb{R}^2 . Ces deux points de vue doivent être dissociés, car un phénomène périodique ne saurait s’évanouir à l’infini ! Le premier implique l’utilisation de la *transformation de Fourier*, le second les concepts de *série de Fourier* et d’*harmoniques fondamentales*.

1.3.1 Spectre d’un signal ou d’une image d’énergie finie

Un signal s d’énergie finie est une fonction s localement intégrable sur \mathbb{R} telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt < \infty$$

(ceci implique qu’au moins en termes énergétiques, le signal s’évanouit à l’infini). L’espace des signaux d’énergie finie est, du point de vue purement mathématique, un espace sur lequel on peut définir un produit scalaire

$$\langle s_1, s_2 \rangle := \int_{\mathbb{R}} s_1(t) \overline{s_2(t)} dt$$

et copier donc les idées issues de la géométrie usuelle inspirées du théorème de Pythagore. Un modèle de signal d’énergie finie est par exemple celui des signaux correspondant à l’enregistrement d’une secousse sismique, comme sur la figure 1.3.

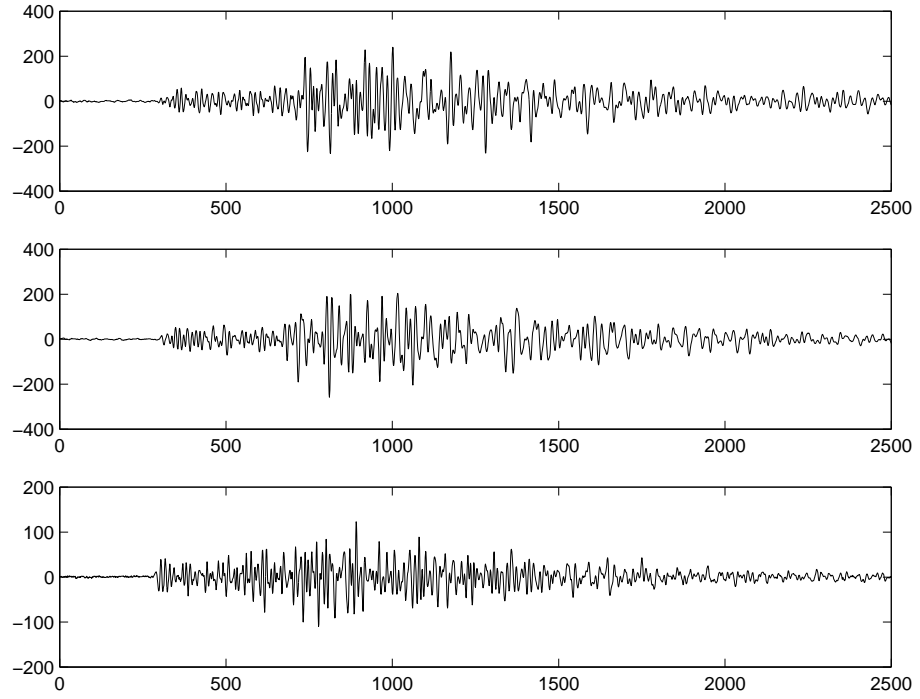


FIG. 1.3 – Mesure d’une secousse sismique dans les 3 directions E/0, N/S, vertical

Étant donné un signal fonction s (à valeurs réelles ou complexes) d’énergie finie, on définit son spectre comme le signal d’énergie finie sur \mathbb{R} défini par la formule

$$\widehat{s}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.1)$$

Il est important de souligner que, si le signal et son spectre sont tous les deux définis sur \mathbb{R} , il s’agit en fait de signaux définis sur deux copies différentes de \mathbb{R} , l’une étant l’espace des temps, celui sur lequel est défini presque partout le signal s , l’autre étant l’espace des fréquences, espace sur lequel est défini (partout cette fois) le signal \widehat{s} .

Il faut prendre garde au fait que la formule (1.1) définissant le spectre doit être pensée en termes d’un calcul au sens de l’énergie; la formulation mathématique correcte est de fait :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{s}(\omega) - \int_{-T}^T s(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 d\omega = 0$$

et c’est de ceci que l’on s’inspire pour en conduire le calcul numérique comme ci-dessous.

Illustration numérique. Le spectre d’un tel signal d’énergie fini s (que l’on supposera modélisé par une fonction continue) peut être approché numériquement comme une intégrale calculée par la méthode des rectangles ou celle des trapèzes; on a par exemple, si l’on utilise la méthode des rectangles, T étant un nombre strictement positif fixé

$$s\widehat{\chi_{[-T,T]}}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2T}{N} \sum_{l=0}^{N-1} s\left(-T + \frac{2lT}{N}\right) e^{-i\omega\left(-T + \frac{2lT}{N}\right)}.$$

L’évaluation de l’expression approchée

$$\frac{2T}{N} \sum_{l=0}^{N-1} s\left(-T + \frac{2lT}{N}\right) e^{-i\omega\left(-T + \frac{2lT}{N}\right)}$$

en $\omega = k\pi/T$, $k \in \{0, \dots, N-1\}$, donne, lorsque N est un entier pair, $N = 2M$,

$$\begin{aligned} \frac{2T}{N} e^{-jk\pi} \sum_{l=0}^{N-1} s\left(-T + \frac{2lT}{N}\right) e^{-2kl\pi/N} &= \frac{2T}{N} \sum_{l=0}^{N-1} s\left(-T + \frac{2lT}{N}\right) e^{-2i(l-N/2)k\pi/N} \\ &= \frac{T}{M} W_{2M}^{kM} \sum_{l=0}^{2M-1} s\left(-T + \frac{lT}{M}\right) W_{2M}^{kl}, \\ &\quad k = 0, \dots, 2M-1, \end{aligned}$$

en posant

$$W_{2M} := \exp(-2i\pi/(2M)) = \exp(-i\pi/M).$$

Ce calcul sera mis en pratique au chapitre 2 lorsque nous étudierons la transformation de Fourier discrète.

Le spectre d'une image d'énergie finie I est l'image définie dans le plan des fréquences par la formule formelle

$$\hat{I}(\xi, \eta) = \iint_{\mathbf{R}^2} I(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy,$$

qu'il faut lire en fait comme :

$$\lim_{\substack{T_1 \rightarrow +\infty \\ T_2 \rightarrow +\infty}} \iint_{\mathbf{R}^2} \left| \hat{I}(\omega_1, \omega_2) - \int \int_{[-T_1, T_1] \times [-T_2, T_2]} I(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy \right|^2 d\xi d\eta = 0.$$

Le fait que la transformation de Fourier préserve l'énergie (et donc l'orthogonalité au sens du produit scalaire) des signaux ou des images n'est pas réellement une surprise car la transformation de Fourier (ou prise de spectre), outre qu'elle est une transformation mathématique, a avant tout une réalité physique. C'est la *diffraction de Fraunhofer* qui réalise de manière optique la transformation de Fourier. Supposons qu'une onde sphérique monochromatique (λ),

$$(t, x, y, z) \mapsto a \exp\left(-i\omega t - ik \frac{x^2 + y^2}{2d}\right)$$

(avec $k = 2\pi/\lambda$), convergeant à la distance d du plan diffractant $\pi = xOy = \{z = 0\}$ (voir la figure 1.4), éclaire un objet qui se trouve dans le plan diffractant π et dont la transmittance en amplitude réalise une distribution d'image $(x, y) \mapsto I(x, y)$; alors (sous réserve que l'on puisse se placer dans le contexte où est valide la règle d'approximation dite "des petits angles"), l'amplitude diffractée dans le plan de convergence $\xi U \eta$ vaut

$$a_{\text{diffract}}(\xi, \eta) = \frac{ka}{2\pi id} \exp\left(ikd - i\omega t + ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{2d}\right) \hat{I}(\xi k/d, \eta k/d).$$

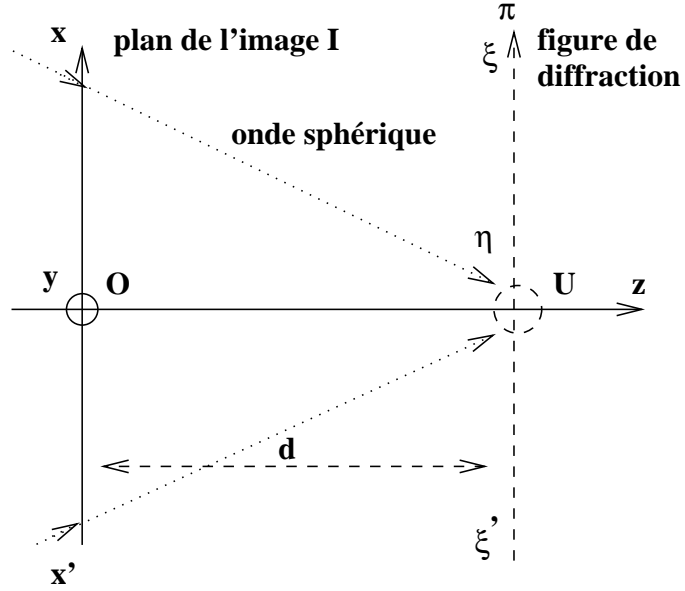


FIG. 1.4 – Réalisation de la FFT optique

Cette formule montre donc que le mécanisme de diffraction de Fraunhofer réalise optiquement la prise de spectre d’une image (à savoir ici l’image I dont le spectre se lit à partir de l’amplitude lumineuse diffractée a_{diffract}).

Si s_1 et s_2 sont deux signaux d’énergie finie, on a donc la formule de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}} s_1(t) \overline{s_2(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}_1(\omega) \overline{\widehat{s}_2(\omega)} d\omega,$$

donc aussi, pour tout signal d’énergie finie s , la conservation de l’énergie *via* la prise de spectre, soit

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega.$$

Même chose pour des images : si I_1 et I_2 sont deux images d’énergie finie, on a la formule de Plancherel

$$\iint_{\mathbb{R}^2} I_1(x, y) \overline{I_2(x, y)} dx dy = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \widehat{I}_1(\xi, \eta) \overline{\widehat{I}_2(\xi, \eta)} d\xi d\eta,$$

donc aussi, pour toute image d’énergie finie I , la conservation de l’énergie *via* la prise de spectre, soit

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |I(x, y)|^2 dx dy = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} |\widehat{I}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta.$$

La “recomposition” d’un signal d’énergie finie à partir de son spectre se lit dans la formule d’inversion de Fourier

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

qu’il convient de lire (pour une formulation mathématique correcte) :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left| s(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \widehat{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right|^2 d\omega = 0.$$

La “recomposition” d’une image d’énergie finie à partir de son spectre se lit dans la formule d’inversion de Fourier

$$I(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{I}(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta,$$

qu’il convient de lire (toujours pour une formulation mathématique correcte) :

$$\lim_{\substack{T_1 \rightarrow \infty \\ T_2 \rightarrow \infty}} \iint_{\mathbb{R}^2} \left| I(x, y) - \frac{1}{4\pi^2} \iint_{[-T_1, T_1] \times [-T_2, T_2]} \hat{I}(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right|^2 dx dy = 0.$$

Les composants élémentaires d’un signal s d’énergie finie sont donc les composants oscillants

$$t \rightarrow |\hat{s}(\omega)| e^{i \text{Arg}(\hat{s}(\omega))} e^{i\omega t},$$

composant dont la *pulsation* (ou *fréquence*) est ω (on dit aussi que ω représente le *nombre d’ondes*), l’*amplitude* est $|\hat{s}(\omega)|$ et la *phase* (ou *déphasage*) est $-\text{Arg}(\hat{s}(\omega))$ (modulo 2π). Ces composants (tous périodiques) s’empilent pour recomposer le signal s qui lui bien sûr n’est plus périodique ! On conçoit dès à présent que ce fait de nature paradoxale pose problème. Ceci sera souligné dans la section suivante, mais l’on peut voir tout de suite que la prise de spectre ne rend compte de la localisation du signal que dans le déphasage : le spectre du signal translaté $s(t - t_0)$ s’obtient en effet en multipliant le spectre de f par $\omega \rightarrow \exp(i\omega t_0)$.

1.3.2 Un premier souci : le principe d’incertitude

Voici une seconde remarque importante : le spectre du signal $t \rightarrow s(at)$ lorsque $a > 0$ est $\omega \rightarrow \hat{s}(\omega/a)/a$: plus a augmente (plus le signal $t \rightarrow s(at)$ est “localisé” près de $t = 0$), plus $1/a$ diminue (ce qui signifie que plus le spectre $\omega \rightarrow \hat{s}(\omega/a)/a$ est diffus).

Ce qu’indique la remarque trouve son explication dans le cadre de la physique. La transformation de Fourier (ou prise de spectre) correspondant au mécanisme physique de diffraction, elle ne localise pas les objets ; pire, plus une information est localisée, plus son spectre est diffus ; de même, plus le spectre est diffus, mieux l’information se trouve localisée. Ce principe d’incertitude (dit *principe d’Heisenberg*) peut d’ailleurs être quantifié : si s est un signal d’énergie 1, de classe C^∞ et ayant une décroissance rapide à l’infini, le produit des deux “moments d’inertie”

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 |s(t)|^2 dt \times \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega$$

est toujours minoré par $\pi/2$: si l’un des facteurs est petit, l’autre est grand, ce qui signifie que si s est bien localisé, le spectre \hat{s} l’est mal et *vice-versa*. Le meilleur “compromis” est réalisé par les signaux gaussiens

$$t \rightarrow C \exp(-\gamma t^2)$$

avec $\gamma > 0$, ce qui constitue une des raisons pour lesquelles les gaussiennes sont utilisées comme modèles des particules élémentaires en mécanique quantique. On exploitera souvent dans ce cours la décomposition des signaux ou des images suivant des dictionnaires constitués précisément d’atomes gaussiens (ce sont les idées de Gabor, et, sous-jacentes en filigrane, celles de l’analyse en ondelettes).

Ce principe d'incertitude nous assure qu'autant l'analyse de Fourier (c'est-à-dire la prise de spectre) s'avère un bon outil pour dégager les *structures cohérentes* (voir périodiques) d'un signal ou d'une image, autant les détails (ou les accidents) de ce signal ou cette image se trouvent dilués dans l'espace des fréquences après la prise de spectre et par conséquent rendus indiscernables. La comparaison avec l'amphi de cours est intéressante : la prise de spectre permettra indubitablement de repérer (et d'isoler) la structure cohérente des rangées de tables ainsi que la répartition des étudiants, mais non les détails par exemple vestimentaires de chacun d'eux pris individuellement.

De fait, on sait depuis le moyen-âge que le codage des signaux avec deux paramètres, le temps t et la fréquence ω , s'avère beaucoup plus riche que le codage avec un seul paramètre (à savoir la fréquence) ; c'est le codage musical que matérialisent les partitions orchestrales comme sur la figure 1.5. La lecture du spectre d'un signal (fonction du seul paramètre ω) nous indique simplement comment, statistiquement, une fréquence ω donnée se révèle importante dans la décomposition d'un signal ; elle ne nous indique nullement à quels instants, pendant quels laps de temps, telle fréquence (ou telle autre) est importante. La lecture en temps et en fréquences répond, elle, à ces exigences plus précises et constitue donc une première parade au principe d'incertitude d'Heisenberg.



FIG. 1.5 – Le codage musical en temps et en fréquences

1.3.3 Le spectre des signaux périodiques

Si T est un nombre réel strictement positif donné (un “laps” de temps), tout “motif” s sur $[0, T]$, mesurable et d'énergie finie sur $[0, T]$ (et non plus sur \mathbb{R} cette fois comme dans la sous-section 1.3.1) s'écrit comme un empilement

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(s) e^{\frac{2i\pi n t}{T}},$$

ce qu'il convient de lire

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \left| s(t) - \sum_{n=-N}^{n=N} c_n(s) e^{\frac{2i\pi n t}{T}} \right|^2 dt,$$

où la suite $(c_n(s))_n$ représente la suite des coefficients de Fourier de s , soit

$$c_n(s) := \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-\frac{2i\pi n t}{T}} dt, \quad n \in \mathbb{Z};$$

cette suite $(c_n(s))_n$ est dite *spectre du motif* s et le principe de conservation d'énergie encore valide ici, assure

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(s)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt.$$

Le motif s , et par conséquent le signal périodique de période T obtenu en périodisant ce motif, se présente donc comme un empilement d'harmoniques fondamentaux

$$t \rightarrow e^{\frac{2i\pi n t}{T}},$$

affectés de coefficients donnés par le spectre. Notons qu'ici, on recompose un signal périodique de période T et donc que la gamme des fréquences se réduit aux nombres $2\pi n/T$, $n \in \mathbb{Z}$; cette gamme de fréquences n'est donc pas aussi riche que la gamme nécessaire à la reconstitution des signaux d'énergie finie sur \mathbb{R} .

La difficulté majeure avec les signaux observables dans la nature est qu'ils se présentent comme un empilement de structures cohérentes (par exemple des signaux oscillants périodiques avec une fréquence basse) et de structures annexes dont les fréquences, elles, changent dans le temps; de tels signaux sont dits *non-stationnaires* et ni leur étude en temps que signal périodique de période T très grande, ni leur étude en tant que signaux d'énergie finie, ne sont totalement satisfaisantes, car les propriétés spectrales de certains phénomènes présents dans le signal (les discontinuités, les singularités, les glissements d'une fréquence à une autre comme dans une partition symphonique ou un pépiement d'oiseau) se lisent à l'infini dans le domaine des fréquences, tandis que les structures cohérentes se lisent, elles, dans la gamme de fréquences proche de 0. Traiter le signal comme un signal périodique de période T ne permet pas l'accès à la gamme de fréquences $] -2\pi/T, 2\pi/T[$ (ou aux gammes intermédiaires $]2k\pi/T, 2(k+1)\pi/T[$, $k \in \mathbb{Z}$); prendre en contre que certaines composantes ne conservent les mêmes fréquences que pendant un temps court oblige à réduire la valeur de T , et donc à perdre en résolution fréquentielle. Nous verrons au chapitre suivant comment la transformation de Fourier à fenêtre, exploitée numériquement, illustre cette difficulté inhérente, pour une part, au principe d'incertitude d'Heisenberg.

De même, toute image I sur $[0, T_1] \times [0, T_2]$ (mesurable et d'énergie finie sur ce domaine rectangulaire), se décompose comme

$$I(x, y) = \sum_{\mathbb{Z}^2} c_{n_1, n_2}(I) \exp \left(2i\pi \left(\frac{n_1 x}{T_1} + \frac{n_2 y}{T_2} \right) \right),$$

ce qu'il convient de comprendre

$$\lim_{\substack{N_1 \rightarrow \infty \\ N_2 \rightarrow \infty}} \iint_{[0, T_1] \times [0, T_2]} \left| I(x, y) - \sum_{n_1 = -N_1}^{n_1 = N_1} \sum_{n_2 = -N_2}^{n_2 = N_2} c_{n_1, n_2}(I) e^{2i\pi \left(\frac{n_1 x}{T_1} + \frac{n_2 y}{T_2} \right)} \right|^2 dx dy,$$

où la liste des coefficients $c_{n_1, n_2}(I)$, avec

$$c_{n_1, n_2}(I) = \frac{1}{T_1 T_2} \iint_{[0, T_1] \times [0, T_2]} I(x, y) e^{-2i\pi \left(\frac{n_1 x}{T_1} + \frac{n_2 y}{T_2} \right)} dx dy, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z},$$

représente le spectre du motif I . On retrouve en deux dimensions les difficultés inhérentes à la dimension 1 déjà mentionnées. Le fait que nous ayons cette fois deux degrés de liberté (au lieu d'un) pour envisager la cohérence des structures rend cependant l'analyse de Fourier plus fiable en ce qui concerne l'étude ou le traitement des images qu'elle ne l'est en ce qui concerne celle des signaux.

1.3.4 Un souci numérique : le problème de l'échantillonnage

Autre problème majeur, celui de l'échantillonnage : il est intuitivement clair que si l'on considère un signal périodique (au moins pendant le laps de temps où dure l'étude) de pulsation ω et qu'on l'échantillonne comme sur la figure 1.6 (avec un pas τ trop grand), le signal digital obtenu ne rendra absolument pas compte de l'information.

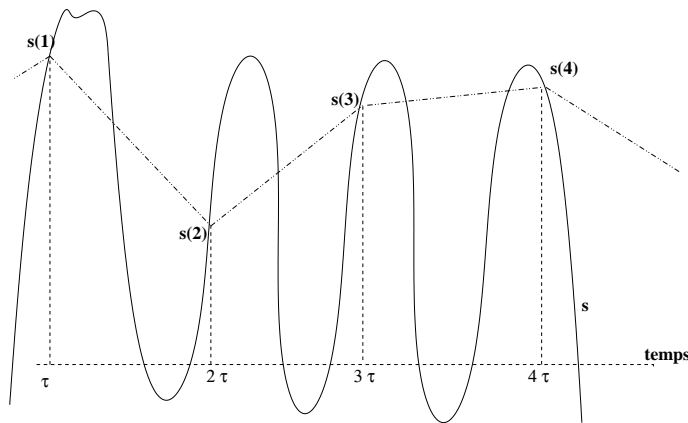


FIG. 1.6 – Le problème de l'échantillonnage

Si s est un signal d'énergie finie et de spectre borné (ce qui signifie que \hat{s} est presque partout nul sur $[-\Omega, \Omega]$, ce qui du point de vue pratique est utopique car tout signal est entaché de bruits hautes-fréquences), le signal s est nécessairement “régulier” (ceci est intuitif, il n'y a pas de composants hautes-fréquences) et la formule d'inversion de Fourier

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

montre que la définition de $s(n\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$ se fait sans ambiguïté pour chaque valeur de n ; dans la pratique bien sûr, cette valeur ponctuelle est enregistrée comme une moyenne de s près de $n\tau$ mais la régularité de s fait que cette moyenne ne diffère que peu de la valeur exacte.

Si le pas d'échantillonnage τ est assez petit ($\tau \leq \pi/\Omega$), la restitution de s à partir de ses échantillons se fait parfaitement par la formule

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n\tau) \operatorname{sinc} \frac{2(t - n\tau)}{\tau}, \quad (1.2)$$

où la fonction sinc dont le graphe figure sur la figure 1.7 ci-dessous est la fonction $t \rightarrow \sin(\pi t/2)/(\pi t/2)$, correspondant à la transformée de Fourier de la fonction

“créneau” $t \rightarrow \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}/\pi$ valant $1/\pi$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et 0 ailleurs. La convergence de la série dans la formule (1.2) ci-dessus se fait d'ailleurs uniformément sur \mathbb{R} , ce qui montre que l'on approche s uniformément avec une erreur uniforme aussi petite que l'on veut en tronquant la série ci-dessus entre $-N$ et N par exemple (pour N assez grand en fonction de l'erreur uniforme que l'on tolère). La fonction sinc est implémentée sous MATLAB en

```
>t=-T:pas:T
>f=sinc (t)
```

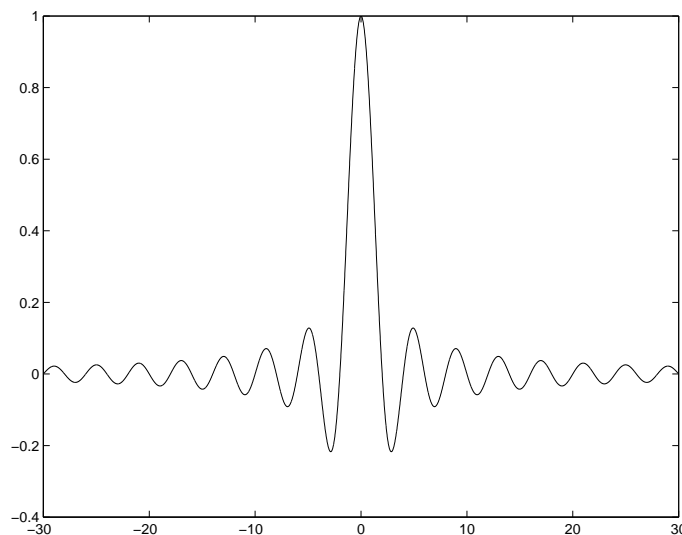


FIG. 1.7 – fonction sinus-cardinal $t \rightarrow \sin(\pi t/2)/(\pi t/2)$

La fréquence seuil $\tau = \pi/\Omega$ tolérable pour échantillonner les signaux d'énergie finie sur \mathbb{R} et de spectre habitant dans $[-\Omega, \Omega]$ est dite *fréquence de Nyquist*; si s est un signal d'énergie finie et de spectre vivant dans $[-\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}]$, l'erreur (uniforme) que l'on commet en assimilant s au signal

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n\tau) \operatorname{sinc} \frac{2(t - n\tau)}{\tau}$$

avec $\tau = \pi/\Omega$ et $\Omega \leq \tilde{\Omega}$ se trouve de fait majorée par

$$\text{erreur} \leq \frac{1}{\pi} \int_{\Omega \leq |\omega| \leq \tilde{\Omega}} |\hat{s}(\omega)| d\omega.$$

Du point de vue pratique, le problème du sous-échantillonnage est omniprésent (nous le verrons numériquement dans le chapitre suivant) : c'est en partie pour le contourner que nous introduirons le concept d'analyse temps-échelles, inspirés par l'idée selon laquelle le signal a une cohérence dans la direction des échelles (depuis l'analyse aux grandes échelles correspondant aux versions “résumées” du signal, jusqu'à l'analyse aux petites échelles, correspondant aux détails ou accidents du signal). Prédire la structure aux petites échelles (de fait inaccessible, ce qui crée le problème de sous-échantillonnage) à partir de la lecture aux grandes échelles (et de son évolution lorsque l'échelle décroît) sera un des moteurs du concept d'*analyse multi-résolution*.

Chapitre 2

L'outil Fourier

2.1 La transformée de Fourier discrète d'un signal digital ou d'une image

2.1.1 Définition de la transformation ; notion de dft

Un signal digital (au sens de l'analyse) de longueur $N \in \mathbf{N}^*$ est par définition un vecteur $(s(1), \dots, s(N))$ (pour nous un vecteur ligne) de nombres complexes ; une image digitale (toujours au sens de l'analyse) de taille (N_1, N_2) avec $N_1, N_2 \in \mathbf{N}^*$, est par définition la donnée d'une matrice

$$[I(k_1, k_2)]_{\substack{1 \leq k_1 \leq N_1 \\ 1 \leq k_2 \leq N_2}}$$

(k_1 indice de ligne, k_2 indice de colonne, pour suivre la syntaxe d'un logiciel de calcul scientifique tel **MATLAB** ou **SciLaB**).

Si N est fixé, soit $W_N := \exp(-2i\pi/N)$; si N_1 et N_2 sont fixés, on considère de même $W_{N_1} := \exp(-2i\pi/N_1)$ et $W_{N_2} := \exp(-2i\pi/N_2)$.

La transformation de Fourier (monodimensionnelle) discrète d'ordre N (dite aussi **dft** pour “*Discrete Fourier Transform*” d'ordre N) transforme le signal de longueur N qu'est $s = (s(1), \dots, s(N))$ en le signal digital (aussi de longueur N) \hat{s} défini par

$$\hat{s}(k+1) = \sum_{l=0}^{N-1} s(l+1) W_N^{kl}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

La transformation de Fourier (bidimensionnelle) discrète d'ordre (N_1, N_2) (dite aussi **dft2** pour “*Discrete Fourier Transform 2-dimensional*” de bi-ordre (N_1, N_2)) transforme l'image digitale de taille (N_1, N_2)

$$I := \left[I(k_1, k_2) \right]_{\substack{1 \leq k_1 \leq N_1 \\ 1 \leq k_2 \leq N_2}}$$

en l'image digitale (aussi de taille (N_1, N_2)) \hat{I} définie par

$$\begin{aligned} \hat{I}(k_1+1, k_2+1) &= \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} I(l_1+1, l_2+1) W_{N_1}^{k_1 l_1} W_{N_2}^{k_2 l_2} \\ &\quad k_1 = 0, \dots, N_1-1, \quad k_2 = 0, \dots, N_2-1; \end{aligned}$$

cette transformation bidimensionnelle s'opère en deux temps via une transformation monodimensionnelle d'ordre N_1 appliquée sur les colonnes de la matrice I , puis ensuite une seconde transformation monodimensionnelle d'ordre N_2 , cette fois sur les lignes de la matrice transformée.

Comme la matrice

$$\mathcal{W}_N = \left[W_N^{(k-1)(l-1)} \right]_{1 \leq k, l \leq N}$$

vérifie

$$\mathcal{W}_N \bullet \overline{\mathcal{W}_N} = N \mathbf{I}_N,$$

où \mathbf{I}_N est la matrice identité d'ordre N , on a les formules d'inversion à la fois pour les transformées mono ou bi-dimensionnelles.

- dans le cas monodimensionnel, on récupère s en appliquant à \hat{s} la transformation de Fourier discrète inverse (**idft** d'ordre n pour “Inverse Discrete Fourier Transform” d'ordre n) qui transforme le signal digital \hat{s} de taille N en le signal s (aussi de taille N) donné par

$$s(k+1) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{s}(l+1) \overline{W_N^{kl}}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

- dans le cas bidimensionnel, on récupère I en appliquant à \hat{I} la transformation de Fourier discrète inverse (**idft2** de bi-ordre $(N_1, N_2$ pour “Inverse Discrete Fourier Transform 2-dimensional” de bi-ordre (N_1, N_2)) qui transforme l'image digitale \hat{I} de taille (N_1, N_2) en l'image digitale I (aussi de taille (N_1, N_2)) donnée par

$$I(k_1+1, k_2+1) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} I(l_1+1, l_2+1) \overline{W_{N_1}^{k_1 l_1}} \overline{W_{N_2}^{k_2 l_2}}$$

$$k_1 = 0, \dots, N_1-1, \quad k_2 = 0, \dots, N_2-1.$$

Pour ce qui est des images, il s'avère judicieux de remarquer que les fonctions

$$x \longmapsto \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$y \longmapsto \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

respectent mieux les symétries que les fonctions $x \longmapsto e^{-ix}$ et $y \longmapsto e^{-iy}$; c'est la raison pour laquelle en traitement d'image, on préfère à la transformée de Fourier $2D$ discrète la transformée en cosinus, associant à une image digitale $I(k_1+1, k_2+1)$, $0 \leq k_1 \leq N_1-1$, $0 \leq k_2 \leq N_2-1$, l'image de même taille J définie par

$$J(q_1+1, q_2+1) = 4 \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} I(k_1+1, k_2+1) \cos\left(\frac{\pi q_1(2k_1+1)}{2N_1}\right) \cos\left(\frac{\pi q_2(2k_2+1)}{2N_2}\right)$$

pour $q_1 = 0, \dots, N_1-1$ et $q_2 = 0, \dots, N_2-1$.

Il convient aussi de rappeler que dans le format standard (RGB), une image digitale I de taille N_1, N_2 est en fait la donnée d'une matrice de taille (N_1, N_2) dont les éléments sont des vecteurs à trois composantes (dans RGB256, chacune à valeurs

dans $\{0, \dots, 255\}$). On est fréquemment appelé à transformer cette image en une image “noir et blanc” où la valeur $I(k_1 + 1, k_2 + 1)$ en un pixel correspond à une “intensité de brillance” obtenue *via* un procédé de moyennisation à partir des trois composantes associées au même pixel dans le format RGB. Sous MATLAB, on utilisera par exemple pour lire une image (ici par exemple une image au format JPEG dénommée `football.jpg`), la transcrire en une image de brillance noir et blanc, et lire les deux résultats, les instructions :

```
>>I=imread('football.jpg');  
>>J=rgb2gray(I);  
>>imshow (I);  
>>imshow (J);
```



FIG. 2.1 – Une image RGB et sa brillance

On peut transformer l'image de brillance J *via* la transformée en cosinus discrète suivant (toujours sous MATLAB) les instructions

```
>>JJ=dct2(J);  
>>imshow(log(abs(JJ)),[]), colormap(jet), colorbar
```

L'image obtenue est affichée ci-dessous :

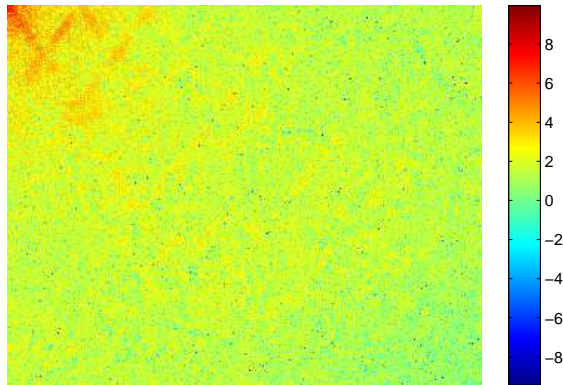


FIG. 2.2 – La transformée en cosinus discrète de l'image de brillance précédente

On constate que c'est précisément la présence de motifs périodiques dans l'image de brillance (la trame du ballon, le lacet,...) qui se traduit par des motifs matérialisés dans l'image de la transformée en cosinus. Fourier rend compte des motifs "périodiques" ou de la trame d'une image, non des détails. C'est aussi ce que l'on essaiera d'interpréter dans le second exemple ci-dessous où nous avons représenté une image plus complexe (les périodicités sont plus difficiles à déceler de manière évidente) et le logarithme de sa transformation en cosinus :



FIG. 2.3 – Un second exemple d'une image et de sa transformée en cosinus

Une leçon à tirer en tout cas de ces deux exemples (en traitement d'image) est que la transformée en cosinus *globale* d'une image n'est pas un outil de traitement (ou

d'analyse) d'image approprié. Comme pour l'analyse temps-fréquences des signaux 1D, on lui préférera (ce sera la base du principe de la compression JPEG) une transformée en cosinus par blocs (par exemple des blocs de huit pixels sur huit pixels).

2.1.2 Aspects algorithmiques de la dft ; algorithmes de fft

C'est à Cooley et Tuckey (1966) que revient l'idée du calcul algorithmique de l'action de la **dft** lorsque l'ordre N est une puissance de 2, $N = 2^k$. Le nombre de multiplications nécessité par la multiplication d'un vecteur colonne de longueur 2^k par la matrice

$$\mathcal{W}_{2^k}[s]$$

(ce calcul correspond précisément à l'action de la DFT d'ordre 2^k sur le vecteur ligne s correspondant) se trouve ainsi réduit à $kN/2$ au lieu de ce qu'il devait être *à priori*, c'est à dire N^2 . C'est cette réduction drastique qui rend aujourd'hui possible l'usage intensif de la transformation de Fourier discrète, non seulement en analyse et traitement du signal, mais dans des pans entiers des mathématiques appliquées ou de l'informatique. L'algorithme de Cooley-Tuckey marque le début de ce que l'on pourrait qualifier de "révolution numérique".

L'idée clef de Cooley-Tuckey est de remarquer que, si N est une puissance de 2, $N = 2^k$, alors $N/2$ aussi ($N/2 = 2^{k-1}$), et par conséquent

$$W_N^{N/2} = e^{-i\pi} = -1.$$

C'est sur la cellule de calcul élémentaire dite *cellule papillon* que s'articule toute l'architecture de l'algorithme de Cooley-Tuckey ; il s'agit d'une cellule nécessitant deux additions (et aucune multiplication, hormis la multiplication triviale par 1) et transformant le vecteur (z_1, z_2) en le vecteur

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

cellule que l'on peut représenter (c'est de là que vient la terminologie) comme sur la figure 2.4

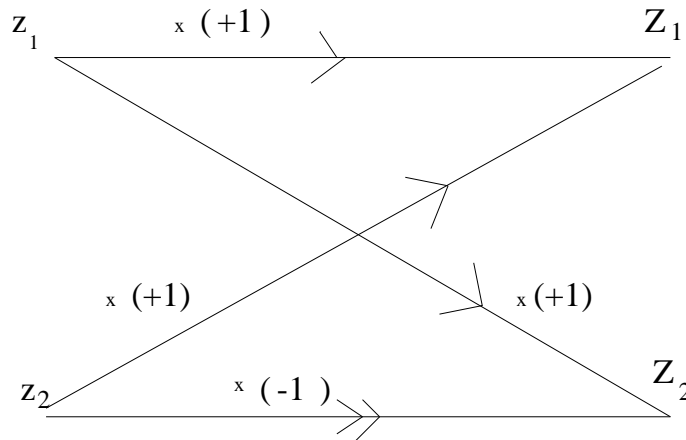


FIG. 2.4 – Cellule papillon

Cette opération correspond d'ailleurs à l'opération de transformée de Fourier discrète lorsque $N = 2$. Exprimons sur un diagramme (figure 2.5) l'architecture de l'algorithme correspondant à $N = 2^k$ en fonction de celle correspondant à $N = 2^{k-1}$.

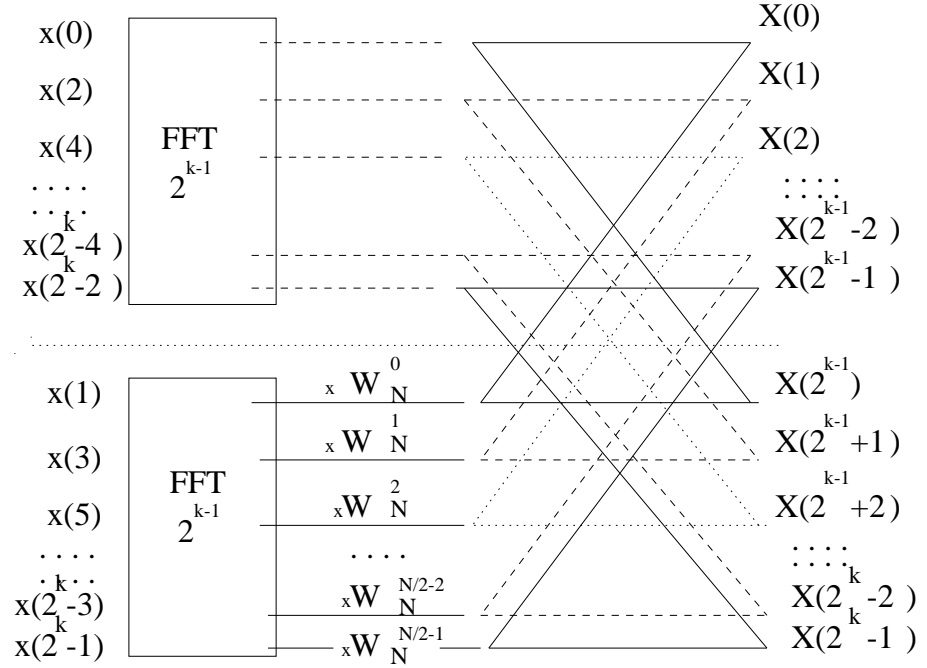


FIG. 2.5 – *Algorithme de Cooley Tuckey* $N/2 = 2^{k-1} \rightarrow N = 2^k$

On voit que l'algorithme doit commencer par une phase de ré-agencement des entrées (qui se traduit de fait par un renversement des bits dans l'écriture de l'indice d'entrée en base 2); ensuite les mécanismes s'enchainent comme indiqué sur le diagramme ci-dessus et la consommation au niveau des opérations arithmétiques significatives est, comme on le voit immédiatement, de

$$\frac{N}{2} + 2\frac{N}{4} + 4\frac{N}{8} + \dots + 2^{k-1}\frac{N}{2^k} = \frac{kN}{2}$$

comme annoncé. Cet algorithme est implémenté dans l'environnement **MATLAB** sous l'une ou l'autre des commandes

```
>>X=fft(x);
>>X=fft(x,2^k);
```

(on parle de “Fast Fourier Transform”, d'où la terminologie **fft**). Dans le second cas, le signal est soit tronqué, soit complété trivialement par des zéros suivant que sa longueur est supérieure ou inférieure ou égale à 2^k . La transformation inverse est un algorithme exactement du même type, mis à part le fait que W_N est remplacé par \overline{W}_N et qu'il y a une division finale par N . Sous l'environnement **MATLAB**, ce sont l'une ou l'autre des commandes

```
>>X=ifft(x);
>>X=ifft(x,2^k);
```

qui réalisent l'inverse de la transformée de Fourier discrète lorsque N est une puissance de 2. Les versions bidimensionnelles sont données par les commandes

```
>>A=fft2(I);
>>A=fft2(I,2^(k1),2^(k2));
>>I=ifft2(A);
>>I=ifft2(A,2^(k1),2^(k2));
```

Notons que les transformations tronquées ne sont pas inverses l'une de l'autre (les tailles ne sont pas respectées), tandis que l'on a bien toujours

```
>>X=ifft(fft(X));
>>A=ifft2(fft2(A));
```

Après Cooley-Tuckey, d'autres méthodes, inspirées de résultats simples d'arithmétique dans \mathbb{Z} , ont été introduites pour construire des algorithmes rapides pour la **dft** d'ordre un entier N qui ne soit plus *a priori* une puissance de 2; des logiciels de calcul tels **MATLAB** ou **SciLaB** utilisent ces algorithmes, dus essentiellement à B. Gold et S. Winograd (dans les années 1975-1980), et que nous présenterons succinctement ici.

C'est un résultat bien connu d'arithmétique (dit *théorème chinois* ou théorème des restes chinois) qui nous permet d'affirmer qu'étant donnés p nombres entiers N_1, \dots, N_p strictement positifs, premiers entre eux deux à deux, il existe un isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}/(N_1 \cdots N_p)\mathbb{Z} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/N_p\mathbb{Z}.$$

Cet isomorphisme Φ est d'ailleurs très facile à matérialiser : c'est l'application qui à la classe de k modulo $N_1 \cdots N_p$ associe l'élément

$$(\dot{k}_1, \dots, \dot{k}_p),$$

où \dot{k}_l est la classe (modulo N_l) de k .

Plaçons nous pour simplifier dans le cas $p = 2$. Si k et l sont deux entiers entre $(0, N_1 N_2 - 1)$, il leur correspond d'après le théorème chinois, et de manière unique, des couples (k_1, k_2) , (l_1, l_2) d'éléments de $\{0, \dots, N_1 - 1\} \times \{0, \dots, N_2 - 1\}$. D'autre part, l'algorithme d'Euclide conduit, si N_1 et N_2 sont premiers entre eux, au calcul de deux entiers U_1 et U_2 (eux non uniques, tandis que leurs classes respectives modulo N_2 et N_1 le sont) tels que

$$1 = U_1 N_1 + U_2 N_2.$$

On voit que le restes respectifs de $U_1 N_1$ modulo N_1 et N_2 sont $(0, 1)$ tandis que ceux de $U_2 N_2$ sont $(1, 0)$. On a donc

$$kl \equiv k_1 l_1 U_2 N_2 + k_2 l_2 U_1 N_1 \pmod{N_1 N_2},$$

ce qui implique que l'on puisse écrire

$$W_{N_1 N_2}^{kl} = W_N^{k_1 l_1 U_2 N_2 + k_2 l_2 U_1 N_1} = (W_{N_1}^{U_2})^{k_1 l_1} (W_{N_2}^{U_1})^{k_2 l_2},$$

et par conséquent réécrire différemment les formules

$$\hat{s}(k+1) = \sum_{l=0}^{N_1 N_2 - 1} s(l+1) W_{N_1 N_2}^{kl}, \quad k = 0, \dots, N_1 N_2 - 1$$

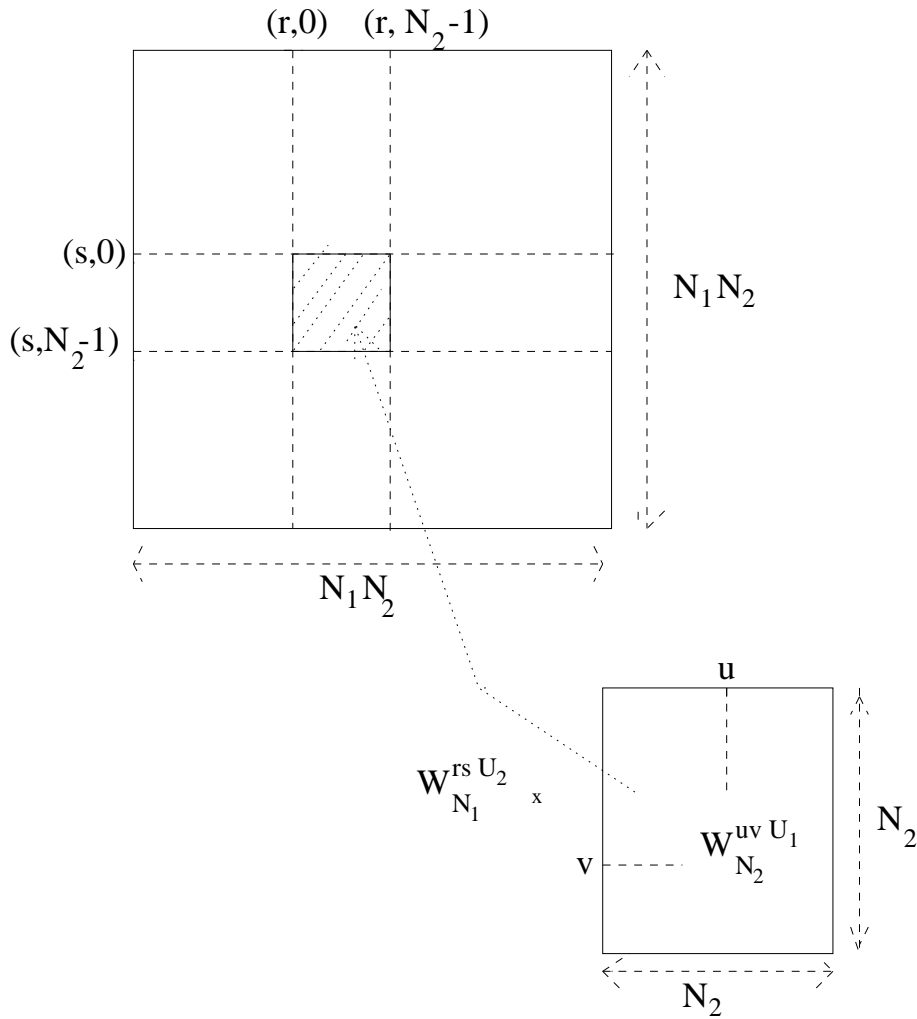
qui décrivent l'action de la transformation de Fourier discrète d'ordre $N_1 N_2$, sous la forme

$$\hat{s}((k_1, k_2) + 1) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} s((l_1, l_2) + 1) (W_{N_1}^{U_2})^{k_1 l_1} (W_{N_2}^{U_1})^{k_2 l_2} ,$$

pour $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, N_1 - 1\} \times \{0, \dots, N_2 - 1\}$, où nous avons joué sur la correspondance biunivoque $k \leftrightarrow (k_1, k_2)$ et $l \leftrightarrow (l_1, l_2)$. Cette idée judicieuse permet d'enchaîner les mécanismes de **dft** correspondant à N_1 et N_2 suivant le mécanisme algorithmique suivant :

- On effectue une permutation des lignes et des colonnes de la matrice $[W_N^{kl}]_{0 \leq k, l \leq N-1}$ en remplaçant l'ordre naturel sur $\{0, \dots, N - 1\}$ par l'ordre lexicographique imposé par la correspondance $l \leftrightarrow (l_1, l_2)$, où l_1 est la classe modulo N_1 et l_2 la classe modulo N_2 . Réaliser ces permutations sur les lignes et les colonnes de la matrice revient à effectuer (comme d'ailleurs dans l'algorithme de Cooley-Tuckey) un ré-agencement des entrées et des sorties.

- Une fois ce travail fait, l'aspect de la matrice $\mathcal{W}_{N_1 N_2}$ est celui d'une matrice $N_1 N_2 \times N_1 N_2$ se présentant sous la forme d'une matrice constituée de N_1^2 blocs de taille (N_2, N_2) , le bloc (r, s) où $0 \leq r, s \leq N_1 - 1$ correspondant à la matrice \mathcal{W}_{N_2} (dans laquelle W_{N_2} se trouve remplacé par $W_{N_2}^{U_1}$) multipliée par le coefficient en position (r, s) de la matrice \mathcal{W}_{N_1} (dans laquelle W_{N_1} aurait été remplacé par $W_{N_1}^{U_2}$). C'est cette architecture que présente la figure 2.6.

FIG. 2.6 – Enchaînement de Gold-Winograd (N_1, N_2)

Il est alors immédiat de voir comment les mécanismes s'enchaînent, une multiplication au niveau de l'algorithme de **dft** pour N_1 générant au niveau des calculs enchaînés une prise de **dft** relative à la dimension N_2 . Si le mécanisme de **dft** relatif à N_1 consomme α_1 additions et μ_1 multiplications (attention ! il faut prendre garde à compter les multiplications triviales par $+1$ ou -1 telles celles qui apparaissent dans l'algorithme de **fft** pour les puissances de 2) et celui relatif à N_2 α_2 additions et μ_2 multiplications (même remarque au niveau des précautions de comptage), l'algorithme enchaîné va consommer $\mu_1\mu_2$ multiplications et $\alpha_2\mu_1 + \alpha_1\mu_2$ additions.

C'est sur ce modèle d'enchaînement que sont construits les mécanismes de transformation de Fourier rapide (on dit encore **fft**) qu'utilise l'environnement **MATLAB** lorsque N n'est plus une puissance de 2 mais (par exemple) un produit de puissances de petits nombres premiers. Un gain ne serait-ce que d'une multiplication dans le mécanisme de **dft** d'ordre p avec p premier s'avère donc très appréciable au niveau de la rapidité des calculs dans les enchaînements du type Gold-Winograd.

Signalons enfin que c'est S. Winograd qui a remarqué que la complexité algorithmique de l'action de \mathcal{W}_N était exactement la même que celle de l'opération de *corrélation cyclique d'ordre N* , à savoir : étant donnés deux polynômes

$$P(X) = x_0 + x_1X + \cdots x_{N-1}X^{N-1}, \quad Q(X) = y_0 + y_1X + \cdots y_{N-1}X^{N-1},$$

calculer les coefficients z_0, \dots, z_{N-1} du reste

$$[PQ : X^N - 1] = z_0 + z_1X + \dots + z_{N-1}X^{N-1}$$

de PQ dans la division euclidienne par $X^N - 1$. Si y est supposé prolongé à \mathbf{Z} comme une suite périodique de période N , on voit que l'on a les formules

$$z_k = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q}, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

et l'on voit apparaître ici pour la première fois dans un cadre discret et périodique l'opération mathématique qui soutendra l'aspect opérationnel de la transformation de Fourier, celle de *convolution* (ou de *filtrage*). Dans cette optique, nous avons la proposition immédiate, mais qui s'avèrera très importante du point de vue de l'utilisation future de la transformation de Fourier discrète :

Proposition 2.1 *Si $(x(1), \dots, x(N))$ et $(y(1), \dots, y(N))$ sont deux signaux digitaux de longueur N et*

$$\sum_{l=0}^{N-1} z(l+1)X^l = \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l+1)X^l \right) \left(\sum_{l=0}^{N-1} y(l+1)X^l \right) \bmod X^N - 1,$$

alors, pour tout k entre 0 et $N-1$, on a

$$\hat{z}(k+1) = \hat{x}(k+1)\hat{y}(k+1).$$

On a donc, si $z = (z(1), \dots, z(N))$ est le signal digital défini par

$$z(l+1) = \sum_{q=0}^{N-1} x(q+1)y(l+1-q), \quad l = 0, \dots, N-1,$$

où \tilde{y} est le prolongement de y par N -périodicité,

$$z = \mathbf{idft}_N \left((\hat{x}(k+1)\hat{y}(k+1))_{k=0}^{N-1} \right).$$

Preuve. Elle est très simple, il suffit juste de remarquer que les deux polynômes

$$\sum_{l=0}^{N-1} z_{l+1}X^l$$

et

$$\left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l+1)X^l \right) \left(\sum_{l=0}^{N-1} y(l+1)X^l \right)$$

coïncident pour $X = W_N^k$, $k = 0, \dots, N-1$. \diamond

On peut montrer aussi que, si le polynôme $X^N - 1$ se factorise en k facteurs de degré strictement positif dans $\mathbf{Q}[X]$, il existe toujours un algorithme réalisant la corrélation cyclique d'ordre N et consommant $2N - k$ multiplications, les multiplications par les rationnels n'étant pas comptées. C'est encore une application du lemme chinois pour plus de détails sur tous ces aspects algorithmiques (mais néanmoins importants) intervenant en analyse ou traitement de l'information.

2.2 Sommes d'exponentielles et transformation de Fourier

Tout signal digital de longueur N peut être interprété comme la suite des valeurs, prises aux points $0, 1, \dots, N-1$, du signal s cette fois analogique (c'est-à-dire perçu comme un signal se déroulant dans l'espace des temps)

$$s : t \rightarrow \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \text{dft}_N[s](l) \exp(2i\pi lt/N) ;$$

ceci est simplement une autre manière d'appréhender la formule d'inversion pour la transformation de Fourier discrète proposée dans la section précédente. La gamme de fréquences "possibles" dont nous disposons est la gamme

$$(0, \dots, 2\pi(N-1)/N) ;$$

le champ fréquentiel envisageable pour le signal analogique correspondant au signal digital (avec un pas de temps supposé normalisé à 1) est donc le champ $[0, 2\pi[$; comme $2l\pi/N$ est congru à $-2(N-l)\pi/N$ modulo 2π , on peut, si $N = 2M$, tout aussi bien interpréter le signal digital s comme la suite des valeurs, prises toujours aux points $0, \dots, N-1$, du signal analogique \tilde{s} :

$$\tilde{s} : t \rightarrow \frac{1}{N} \left(\sum_{l=0}^M \hat{s}(l) \exp(2i\pi lt/N) + \sum_{l=M+1}^{N-1} \hat{s}(l) \exp(-2(N-l)i\pi/N) \right),$$

où l'intervalle utile de fréquences est cette fois $]-\pi, \pi]$, toujours échantillonné avec le pas $2\pi/N$. Plus le nombre de points augmente (le pas temporel restant toujours normalisé à 1), plus la gamme de fréquences "potentielles" s'enrichit; en revanche, la longueur de l'intervalle fréquentiel utile reste bloquée à 2π .

On retiendra de ces remarques un fait crucial, clef (dans le cadre discret) du théorème d'échantillonnage de Shannon que nous envisagerons à la section suivante : un signal digital de longueur N correspondant à l'échantillonnage d'un signal analogique à un pas normalisé à 1 ne saurait être interprété sans ambiguïté comme une somme d'exponentielles (à fréquences dans $2\pi\mathbb{Z}/N$) que si les fonctions du type $t \rightarrow \exp(i\omega t)$, avec $\omega \in 2\pi\mathbb{Z}/N$ dont il serait éventuellement l'empilement sont telles que $|\omega| \leq \pi$.

Autre remarque cruciale : ce n'est qu'en augmentant la longueur du signal digital (c'est à dire la longueur du signal analogique correspondant si le pas de temps reste toujours normalisé à 1) que l'on peut espérer enrichir la gamme de fréquences "potentielles" présentes dans les divers composants du signal. C'est là l'avatar discret d'un principe qui représente pour l'analyse de Fourier, un handicap majeur, le *principe d'incertitude* : plus un signal analogique est diffus, plus son spectre est concentré et *vice-versa*.

Nous allons illustrer ces remarques à l'aide d'exemples; nous allons dans un premier temps envisager un signal digital très simple, de longueur $1024 = 2^{10}$, qui sera le signal

$$s_0 : t \rightarrow \cos(12.37\pi t) + \cos(93\pi t), \quad t = 0 : .01 : 10.23$$

(le graphe est en haut sur la figure 1.4); pour ce signal digital associé à un signal temporel analogique échantillonné avec un pas $\tau = .01$, l'intervalle utile de fréquences

est donc $[0, 2\pi/\tau[= [0, 200\pi[$; puisqu'il s'agit d'un signal réel, la présence dans le signal d'un composant mono-fréquentiel $t \rightarrow \exp(i\omega t)$ induit automatiquement celle d'un composant "conjugué" du type $t \rightarrow \exp(-i\omega t)$; il est donc naturel ici de concevoir l'intervalle utile de fréquences comme étant $] - 100\pi, 100\pi]$. Sur la figure 1-4, nous avons représenté le graphe de ce signal digital et le graphe sur $[0, 200\pi/\tau[$ (échantillonné avec un pas de $200\pi \times 1/1024$) du module de sa transformée de Fourier ; cet transformée de Fourier $\text{fft}[s]$ est un autre signal digital de longueur 1024 ; pour retrouver les fréquences négatives, on doit prendre comme intervalle utile de fréquences $] - 100\pi, 100\pi]$ et non $[0, 200\pi[$, c'est-à-dire prendre la seconde moitié du signal digital $|\hat{s}|$ (entre 512 inclus et 1024) et la reporter à gauche de la première moitié (valeurs de $|\hat{s}|$ entre 1 et 511), comme indiqué sur la figure 2.7 (dernière ligne). On retrouve les quatre pics (symétriques deux à deux) correspondant ici aux fréquences $\pm 12.87\pi$ et $\pm 93\pi$ présentes dans le signal (qui était dans ce cas ultrasimple une somme de deux cosinus).

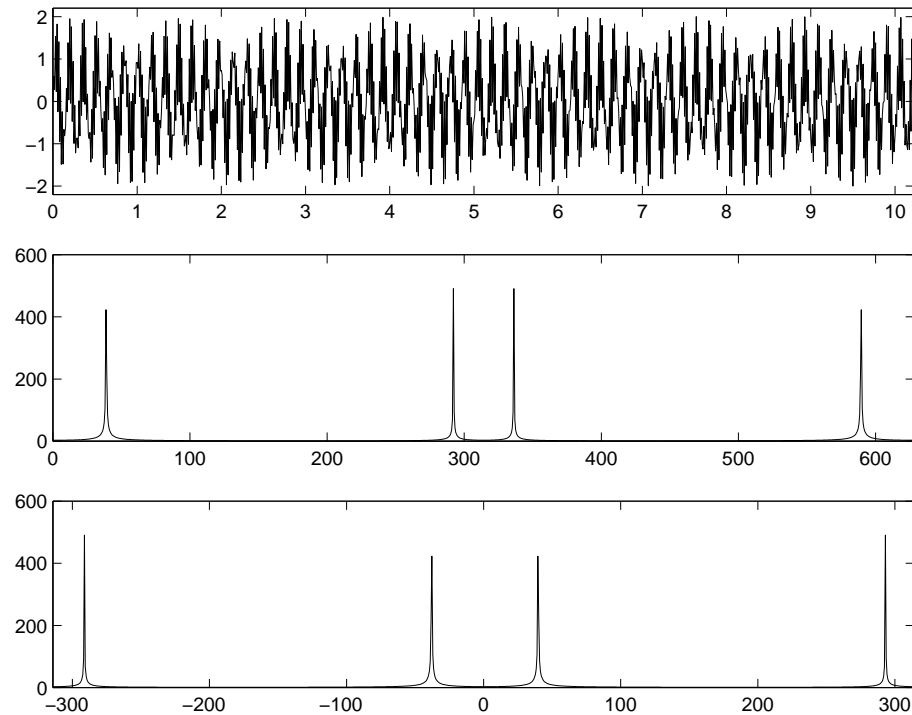


FIG. 2.7 – **dft** d'un signal digital-somme d'exponentielles

Nous considérons maintenant un signal (toujours réel) plus complexe, somme des signaux s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 . Ici s_1 et s_2 sont ce que l'on appelle des "chirps gaussiens analogiques", c'est-à-dire des signaux du type

$$t \rightarrow g(t)e^{iP(t)},$$

où g est une gaussienne et P un polynôme du second degré à coefficients réels ; un tel signal analytique est localisé en temps (du fait de la présence du facteur multiplicatif dans la gaussienne) et, pendant le laps de temps qu'il dure, présente une évolution linéaire de la fréquence instantanée : tel se présente par exemple le signal sonore correspondant à une brève note jouée par un instrument à cordes dans une partition

orchestrale (ou un chant d'oiseau localisé dans le temps) ; ici les signaux modèles s_1 et s_2 sont

$$t \rightarrow \exp(-2(t - 1.5)^2 + 15i(t - 4)^2), \quad t = 0 : .01 : 10.23$$

$$t \rightarrow \exp(-(t - 2.55)^2 + 30i(t - 3.87)^2), \quad t = 0 : .01 : 10.23$$

et nous avons représenté leurs parties réelles sur les deux tableaux supérieurs de la figure 2.8 ; le signal s_3 est, quant-à-lui, un signal du même type, mais sans facteur gaussien, en l'occurrence ici le signal

$$t \rightarrow 3 \cos(20(t - 3.789)^2), \quad t = 0 : .01 : 10.23.$$

on a veillé à ce que la fréquence instantanée (valant ici $40(t - 3.789)$) ne dépasse pas 100π , seuil maximal de fréquence toléré pour un signal analogique réel échantillonné avec un pas de $\tau = .01$. Le signal s_3 est représenté sur la tableau inférieur de la figure 2.8.

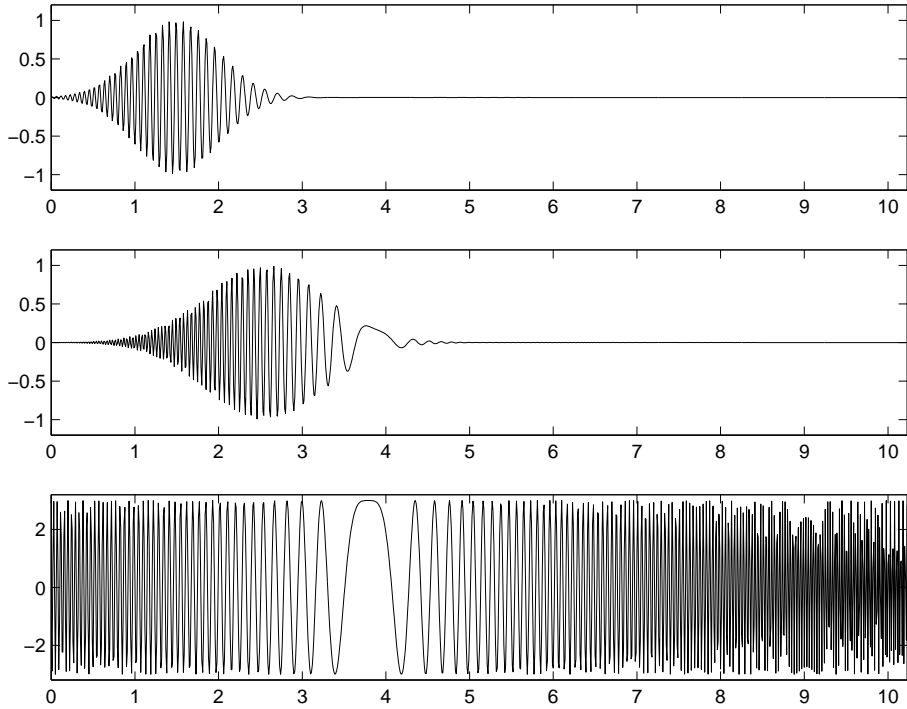
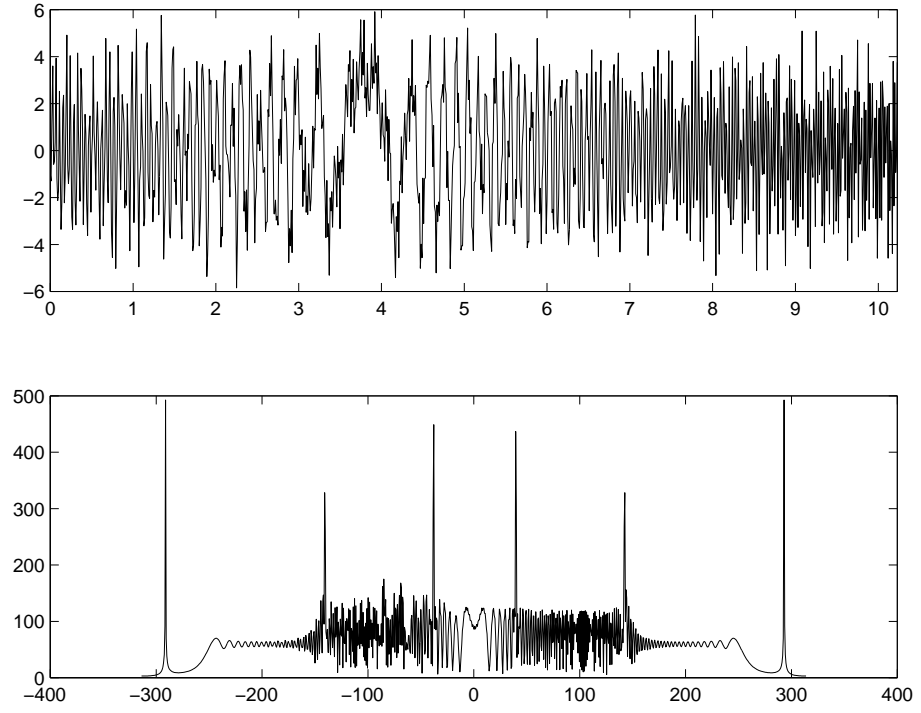


FIG. 2.8 – $\text{Re}(s_1), \text{Re}(s_2), s_3$

Le signal s_4 est lui, un simple sinus :

$$t \rightarrow \sin(45\pi t), \quad t = 0 : .01 : 10.23,$$

et la somme de tous ces signaux (de s_0 à s_4) se présente comme le signal digital S dont la partie réelle figure en haut de la figure 1.6 ; la représentation de $\omega \rightarrow \hat{S}(\omega)$ (c'est-à-dire du signal digital que représente le module de la **dft** de S sur $]-100\pi, 100\pi]$, avec un pas de $200\pi/1024$ figure en bas de cette même figure 2.9 : si l'on y localise bien les divers pics provenant des signaux s_0 et s_4 , on voit que la contribution des autres signaux (qui ne se présentent plus, eux, comme des sommes d'exponentielles) est responsable d'un spectre dit "épais".

FIG. 2.9 – $t \rightarrow \text{Re}(S(t))$, $\omega \rightarrow |\hat{S}(\omega)|$

Seule une information statistique (concernant le contenu fréquentiel de S) peut être extraite de la lecture du graphe de la **dft** de S ; si l'on souhaite une lecture du signal en phase avec par exemple l'idée du codage des partitions orchestrales (ce que l'on appelle une lecture en temps-fréquences), on doit avoir recours à l'artifice suivant : on se fixe un entier $m \leq 1024$ (si possible une puissance de 2 puisque l'on va travailler avec des **dft** d'ordre m) et l'on forme une image digitale suivante : pour chaque valeur $j = 0, \dots, N - m$, on calcule le **dft** d'ordre m du signal digital

$$S_j := (S(j+1), \dots, S(j+m)) ;$$

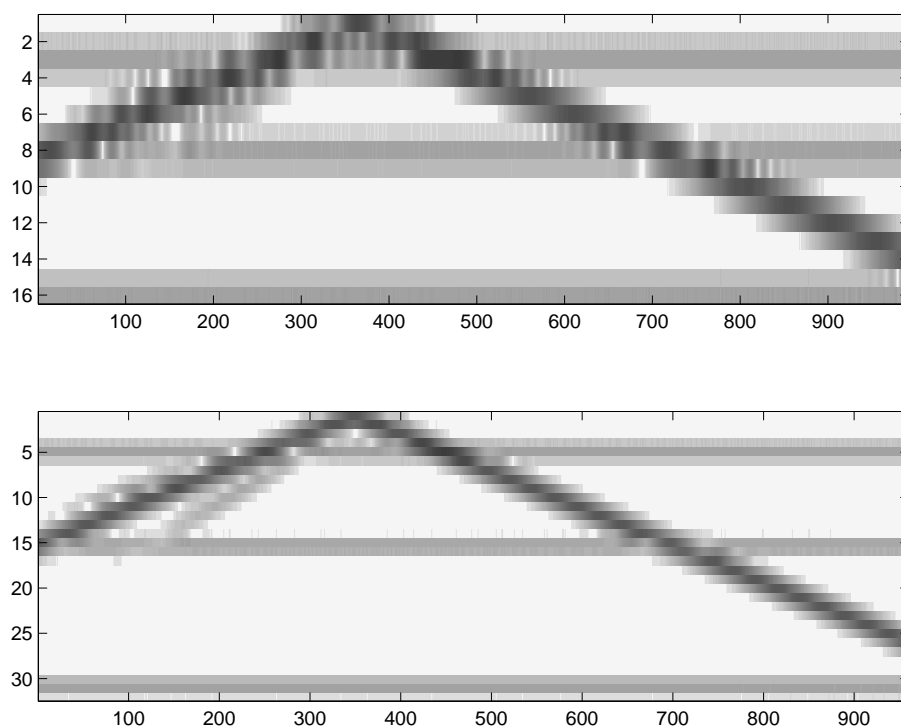
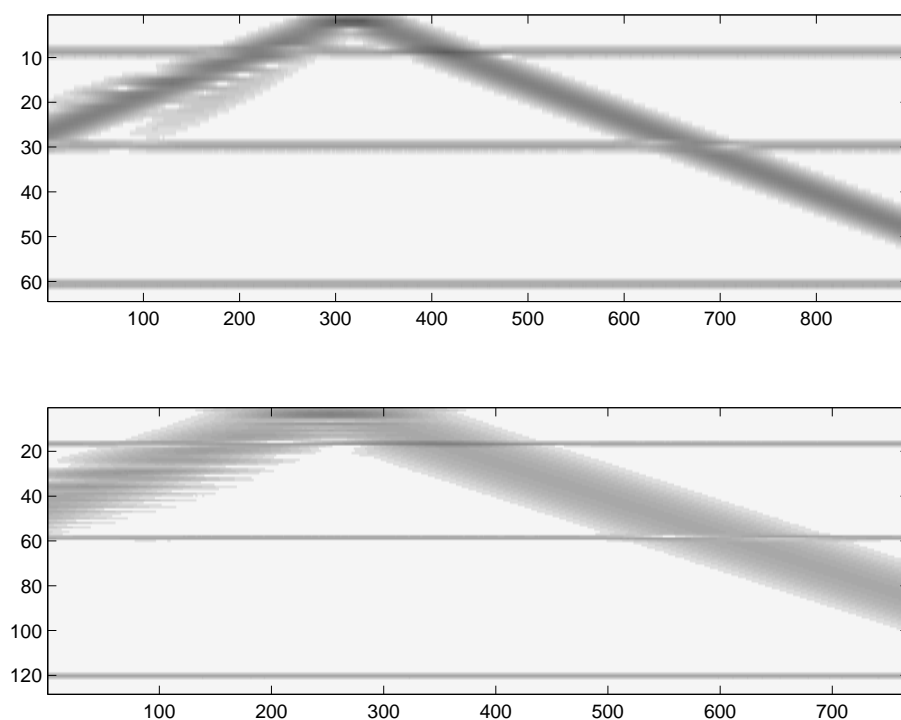
on obtient ainsi un certain certain signal digital-colonne

$$C_j = \begin{pmatrix} |\hat{S}_j(1)| \\ \vdots \\ |\hat{S}_j(m)| \end{pmatrix}$$

et, en posant

$$>C=[C_1, C_2, \dots, C_m]$$

une certaine image positive C (l'indice de colonne représente le paramètre "position de la fenêtre dans le temps", l'indice de ligne est lui l'indice de fréquence, la gamme de fréquences conservée ici étant de fait seulement $[0, \pi]$ à lire de haut en bas). Une telle image doit être pensée comme la "partition" de notre signal digital S . Sur les figures 2.10 et 2.11, nous avons représenté ces "partitions" pour les valeurs de $m = 32, 64, 128, 256$.

FIG. 2.10 – “Partitions” de S , $m = 32$, $m = 64$ FIG. 2.11 – “Partitions de S' ”, $m = 128$, $m = 256$

En fait, pour éviter les effets de bord, le signal digital S_j a au préalable été multiplié par un signal fenêtre (dit fenêtre de Hamming ici, nous y reviendrons) de longueur m , atténué aux deux extrémités, et dont le graphe se présente comme sur la figure 2.12 ci-dessous (pour $m = 256$).

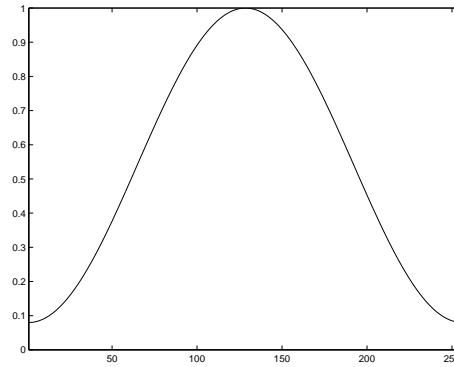


FIG. 2.12 – Une fenêtre de Hamming de longueur 256

Au contraire de l'information statistique que donnait la lecture du signal digital $|\text{dft}[S]|$ sur le spectre du signal S (c'est-à-dire l'ensemble des fréquences impliquées dans la décomposition éventuellement instantanée de S en somme d'exponentielles), les images dont rendent compte les figures 2.10 et 2.11 traduisent l'évolution du contenu fréquentiel de S au cours du temps ; on y fait l'hypothèse que ce contenu fréquentiel reste inchangé sur un laps de temps correspondant à un signal digital de longueur m . Bien sûr, le prix à payer est que, si le contenu fréquentiel varie de manière rapide au cours du temps (imaginer par exemple une cascade de triples croches dans une partition orchestrale), le nombre m devra être choisi petit et l'éventail de fréquences possibles s'en trouvera réduit en conséquence ($[0, \pi/\tau]$ se trouve divisé en $\pi/\tau \times 1/m$ canaux fréquentiels) puisque la **dft** d'ordre m correspond à la multiplication par une matrice carrée de taille (m, m) . En revanche, si m est choisi trop grand, l'image obtenue présentera certes une meilleure résolution, mais ne rendra pas compte des composants à évolution rapide ou brève de contenu fréquentiel (par exemple, la présence de s_1 et s_2 n'est vraiment manifeste que lorsque l'on travaille avec $m = 32, 64, 128$, $m = 64$ semblant ici le meilleur compromis entre cette exigence (faire apparaître la présence de s_1 et s_2 comme composants de S) et l'exigence que représente la nécessité de préserver une assez bonne résolution fréquentielle.

2.3 Corrélation et algorithme autorégressif

2.3.1 Matrice de covariance, corrélation, densité spectrale de puissance

Les signaux réels se présentant comme une somme finie de signaux trigonométriques

$$s(t) = \sum_{k=1}^m a_k e^{i\lambda_k t}$$

ont un certain nombre de propriétés cruciales ; tout d'abord, si l'on calcule, pour $\omega \in \mathbb{R}$, le *produit scalaire ergodique*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-i\omega t} dt$$

entre s et le signal oscillant de référence $t \rightarrow e^{i\omega t}$, on trouve

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-i\omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \neq \lambda_1, \dots, \lambda_k \\ a_j & \text{si } \omega = \lambda_j \text{ (} j = 1, 2, \dots, m \text{)}. \end{cases}$$

Si $(s(1), \dots, s(2N))$ correspond à une version discrète du signal s sur l'intervalle $[-T, T]$, la *matrice de covariance* du signal digital s avec lui-même sur l'intervalle $[-T, T]$ est la matrice hermitienne $N \times N$ de terme général

$$R(k_1, k_2) := \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N s(l + k_1) \overline{s(l + k_2)}, \quad 0 \leq k_1, k_2 \leq N - 1.$$

Si le signal se présente comme la superposition d'un nombre fini de signaux oscillants, cette matrice R est telle que $R(k_1 - k_2)$ soit simplement une fonction r de $k_1 - k_2$ (cette fonction d'un seul paramètre est alors appelée *fonction d'autocorrélation*).

Sur la figure 2.13 ci-dessous, nous avons représenté le module des coefficients de la matrice de covariance d'un tel signal. Le programme **MATLAB** que nous avons utilisé ici pour faire ce calcul de matrice d'autocorrélation est la routine **covar** :

```
>>R=covar(N,s)
```

Si s est une discrétisation du signal

$$s(t) = \sum_{k=1}^m a_k e^{i\lambda_k t},$$

la fonction r est la discrétisation de la fonction

$$t \rightarrow \sum_{j=1}^m |a_j|^2 e^{i\lambda_j t};$$

cette fonction est une fonction périodique, ce dont rend compte la matrice d'autocorrélation (cette matrice présente une structure uniforme suivant les diagonales parallèles à la diagonale principale puisque $R(k_1, k_2) = r(k_1 - k_2)$); le fait que r soit d'ailleurs une fonction oscillante (avec les fréquences de s) se remarque immédiatement au vu de l'image de

$$(k_1, k_2) \rightarrow R(k_1, k_2)$$

visualisée en 3D sur la figure 2.13 où l'on a pris

$$s(t) = \sin(20.56\pi t) + 2 \sin(45.89\pi t) + 3 \sin(10.63\pi t), \quad t = 0 : .005 : .995$$

(comparer le graphe du signal s et la vue en coupe de la matrice suivant une parallèle à l'anti-diagonale).

Si s est un processus discret stationnaire (au sens, tous les aléas $X_k = s(k)$ sont de même moyenne m et de moment d'ordre 2 fini), la fonction d'autocorrélation du processus est la fonction

$$k \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Espérance de } (s(l + k) - m) \overline{(s(l) - m)}$$

(ceci est indépendant de l du fait de l'hypothèse de stationnarité). Si l'on a affaire à un signal déterministe (digital) de longueur N (donc une suite $(s(1), \dots, s(N))$) considéré comme un échantillon de processus stationnaire, on dispose de deux moyens de modéliser la fonction d'autocorrélation du processus :

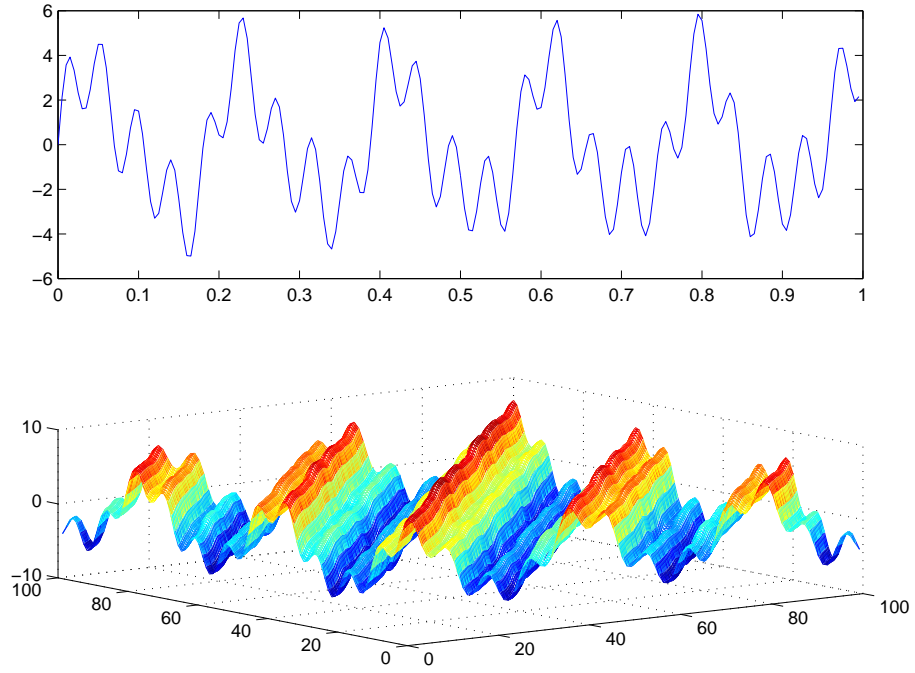


FIG. 2.13 – Matrice de covariance d'un signal stationnaire

- Fixer une valeur de L (taille des échantillons), avec $L < N$, prendre pour M la partie entière de $L/2$ et définir, pour $k = 0, \dots, M - 1$,

$$r(k) := \frac{1}{L} \text{moyenne}_n \left[\sum_{l=0}^{L-1-k} (s(1+nL+l+k) - m_n) \overline{(s(1+nL+l) - m_n)} \right],$$

où m_n désigne la moyenne de s sur l'intervalle $[nL, (n+1)L[$, la moyenne intervenant pour l'obtention de $r(k)$ étant prise sur toutes les valeurs de n entre 0 et la partie entière de N/L ; il s'agit là d'un calcul statistique basé sur le choix de divers échantillons du signal, chaque échantillon (de longueur L) correspondant à une réalisation du processus stationnaire.

- Faire un calcul direct en prenant $L = N$, $M = E[L/2]$ et en posant, pour $k = 0, \dots, M - 1$,

$$\hat{r}(k) := \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-k-1} (s(1+l+k) - m) \overline{(s(1+l) - m)},$$

m désignant la moyenne de s sur $\{1, \dots, N\}$ (approximation non biaisée, intéressante lorsque M est petit devant N) ou alors

$$\hat{r}(k) := \frac{1}{N-M} \sum_{l=0}^{N-k-1} (s(1+l+k) - m) \overline{(s(1+l) - m)}$$

(approximation biaisée, à privilégier lorsque M s'approche de N).

Le spectre de la fonction d'autocorrélation est la *densité spectrale de puissance* du signal s . On le calcule numériquement en prenant la transformée de Fourier discrète des suites $(r(k))_k$ ou $(\hat{r}(k))_k$ modélisant la fonction d'autocorrélation.

On utilise par exemple la commande **MATLAB**

```
>> P=spectrum(s,s,L,overlap)
```

pour trouver (en première colonne de la matrice P) la densité spectrale de puissance du signal s calculée à partir de la fonction d'autocorrélation r évaluée suivant la seconde méthode avec $L = 2^k$ (les échantillons sont autorisés à se superposer sur q points (la valeur de q est donnée par la variable **overlap**). On a, par exemple, pour tester cette méthode, utilisé le signal s de la figure 2.14, qui se présente comme un signal périodique dans lequel ont été introduits aléatoirement des “cracks” pendant lesquels apparait une fréquence plus haute que la fréquence fondamentale du signal. Le signal est un signal de 2048 points ; on a affiché la densité spectrale de puissance, calculée avec $L = 512$, puis $L = 256$ (la gamme fréquentielle est une gamme de 256 canaux de fréquences dans le premier cas, de 128 canaux de fréquences dans le second) ; les calculs ont été faits avec un pas de recouvrement $q = 10$. On voit que le choix de $L = 256$ met mieux en évidence la balance statistique entre les deux composants fréquentiels (le signal ici n'étant pas un signal stationnaire).

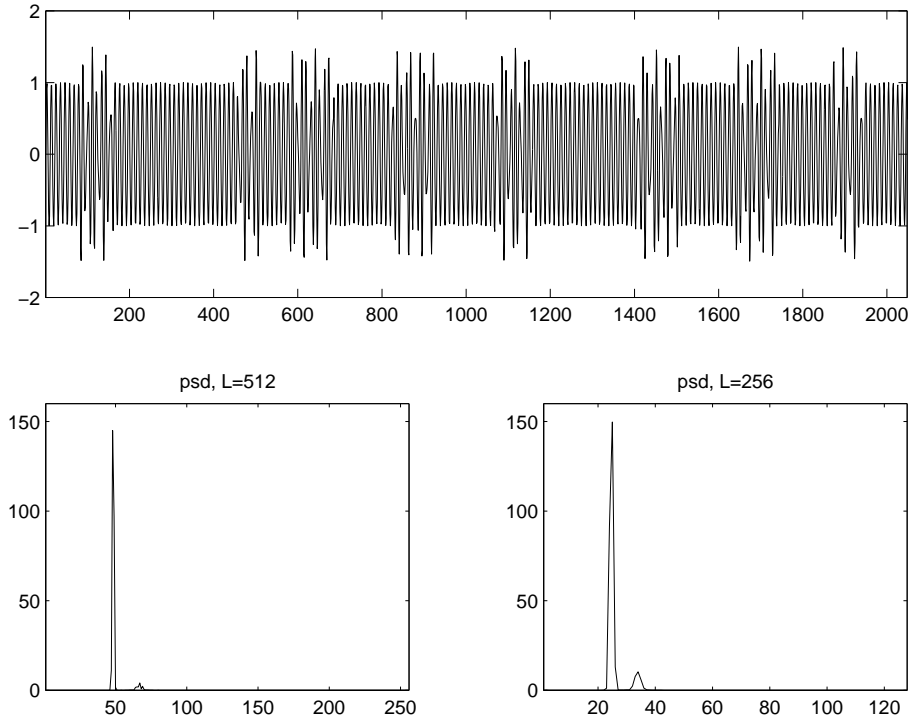


FIG. 2.14 – Calcul de la densité spectrale de puissance ($L = 512$ à gauche, $L = 256$ à droite)

En revanche, si l'on prend délibérément un signal non stationnaire, c'est-à-dire ne se décomposant pas naturellement dans le dictionnaire des phénomènes oscillants $t \rightarrow e^{i\omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$, comme c'est le cas pour le signal s affiché sur la figure 2.15 (il s'agit de la mesure de la vitesse en un point d'un canal 2D d'un écoulement turbulent), on voit que la matrice de corrélation $[R(k_1, k_2)]$ n'obéit plus du tout à une architecture aussi bien organisée ; ce n'est plus une matrice dont le coefficient $R(k_1, k_2)$ ne dépend que de $k_1 - k_2$ et le contenu de cette matrice devient vraiment un contenu 2D (et non fictivement 2D comme dans le cas où s est une combinaison de signaux oscillants comme sur la figure 2.13).

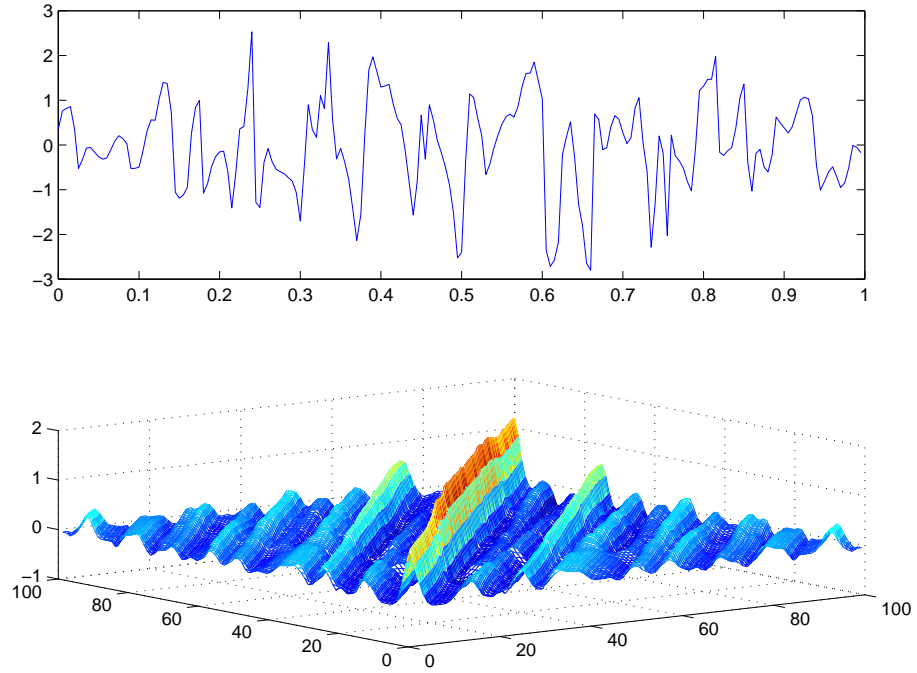


FIG. 2.15 – Matrice de covariance d'un signal non stationnaire

On a, sur la figure 2.16, envisagé un signal non stationnaire s de 8192 points et affiché à la fois le calcul du module de la **fft** de s (dans l'intervalle utile de $1024 = 8192/8$ points) en bas à gauche, et la densité spectrale de puissance, calculée avec $L = 1024$ (les fenêtres se chevauchant avec un pas $q = 10$) et affichée sur l'intervalle utile de fréquences de $1024/8 = 128$ points (en bas à droite). Il est clair ici que le spectre du signal est un spectre “épais”, d'interprétation difficile, tandis que la lecture du graphe de la densité spectrale de puissance s'avère, elle, beaucoup plus claire.

2.3.2 La recherche des paramètres d'autorégressivité

Autre propriété intéressante des signaux s'écrivant comme un empilement de m signaux oscillants,

$$s(t) = \sum_{k=1}^m a_k e^{i\lambda_k t},$$

ce sont des signaux obéissant à une équation différentielle linéaire d'ordre n et à coefficients constants

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_m y(t) \equiv 0,$$

les a_j , $j = 1, \dots, m$, étant choisis pour que les m fréquences (supposées distinctes) $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de s soient telles que les $i\lambda_j$, $j = 1, \dots, m$, soient les racines du polynôme caractéristique

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_m$$

de l'équation. Une équation différentielle d'ordre m devient, une fois les signaux discrétisés, une équation différence-différentielle d'ordre m :

$$s(k) = A_1 s(k-1) + A_2 s(k-2) + \dots + A_m s(k-m), \quad k = m+1, m+2, \dots$$

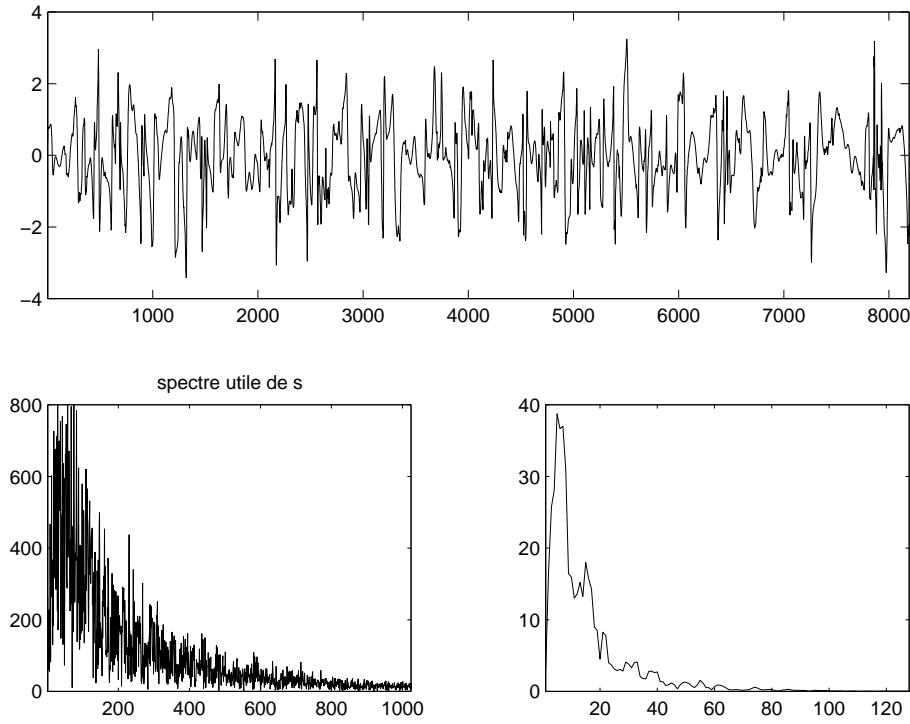


FIG. 2.16 – Calcul de la densité spectrale de puissance d'un signal non-stationnaire

D'où l'idée clef suivante : si l'on pressent que s est un signal stationnaire dont le contenu fréquentiel contient m fréquences (là l'hypothèse *a priori* est bien sûr très risquée, mais on y reviendra), on cherche les paramètres $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ les mieux ajustés afin que la quantité

$$\sum_{k=m+1}^N \left| s(k) - \gamma_0 - \sum_{j=1}^m \gamma_j (s(k-j) - \gamma_0) \right|^2$$

soit minimale. On peut voir cette méthode comme une méthode de prédiction. C'est une méthode de moindres carrés qui permet le calcul des paramètres "optimaux" $\gamma_0, \dots, \gamma_m$. Le paramètre γ_0 joue un rôle de moyenne et, si l'on envisage ce calcul répété de manière statistique (sur divers échantillons du signal), on peut voir la recherche de ces paramètres $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ comme un effort pour "décorrélérer" le signal et faire en sorte que

$$k \rightarrow s(k) - \gamma_0 - \sum_{j=1}^m \gamma_j (s(k-j) - \gamma_0)$$

puisse être, pensé de manière statistique, le plus proche de ce qui pourrait être un bruit blanc de variance précisément la "variance résiduelle"

$$\sigma_m^2 = \frac{N-m}{N(N-2m-1)} \sum_{k=m+1}^N \left| s(k) - \gamma_0 - \sum_{j=1}^m \gamma_j (s(k-j) - \gamma_0) \right|^2.$$

Les coefficients γ_j , $j = 1, \dots, m$, sont dits *paramètres d'autorégressivité* du signal puisque la relation "idéale"

$$s(k) - \gamma_0 \simeq \sum_{j=1}^m \gamma_j (s(k-j) - \gamma_0), \quad k = m+1, \dots, N,$$

est une relation gouvernant le signal $s - \gamma_0$ de manière “autorégressive” (pour calculer $s(k) - \gamma_0$, on puise dans le passé de $s - \gamma_0$ avant l’instant k).

Pour trouver explicitement les coefficients γ_j , $j = 0, \dots, m$, on projette orthogonalement le signal digital

$$(s(m+1), \dots, s(N))$$

sur le sous-espace engendré par les signaux de longueur $N - m$ que sont les signaux “décalés” dans le temps

$$(s(m+1-j), \dots, s(N-j)), \quad j = 1, \dots, m$$

et le signal $(1, \dots, 1)$ (de longueur $N - m$) ; la projection orthogonale s’écrit

$$\tilde{s} : k \rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 s(k-1) + \dots + \alpha_m s(k-m), \quad k = m+1, \dots, N,$$

et il ne reste plus qu’à poser

$$\gamma_1 = \alpha_1, \dots, \gamma_m = \alpha_m, \quad \gamma_0(1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_m) = \alpha_0$$

pour trouver les coefficients γ_j , $j = 0, \dots, m$. On trouve cette projection en inversant une matrice de Gram qui peut fort bien être mal conditionnée (c’est le cas si le signal s est de fait parfaitement stationnaire).

Pour pallier à l’ambiguïté qui préside au choix de m , on retiendra l’idée selon laquelle, pour faire ce choix, on cherche à minimiser (en fonction de m) la variance résiduelle σ_m^2 ; notons d’ailleurs qu’un estimateur sans biais de cette variance résiduelle est donné par

$$\tilde{\sigma}_m^2 = \frac{N-m}{M-2m-1} (\hat{r}(0) - \sum_{j=1}^m \alpha_j \hat{r}(j)),$$

avec

$$\hat{r}(j) := \frac{1}{N} \sum_{k=m+1}^N (s(k) - \text{moyenne de } s)(s(k-j) - \text{moyenne de } s)$$

pour $j = 1, \dots, m$.

Il est important de souligner que la méthode consistant à rechercher le contenu spectral d’un signal en déterminant, à m fixé, les m paramètres d’autorégressivité $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ et en affichant ce qui devrait être la transformée de Fourier (ainsi prédite) de la fonction d’autocorrélation r de s , soit

$$\omega \rightarrow \frac{\tilde{\sigma}_m^2}{|1 - \alpha_1 e^{-i\omega} - \dots - \alpha_m e^{-im\omega}|^2}$$

sur l’intervalle fréquentiel $[0, \pi]$, est couramment employée face à l’étude de signaux (tels les signaux étudiés en biologie) dont on sait que le contenu fréquentiel se résume à un nombre limité de fréquences localisées dans les plages mal cernées (et mouvantes). Les maxima locaux de cette fonction

$$\omega \rightarrow \frac{\tilde{\sigma}_m^2}{|1 - \alpha_1 e^{-i\omega} - \dots - \alpha_m e^{-im\omega}|^2}$$

permettent de repérer la position (et la contribution tout au moins statistique) de fréquences dans le contenu fréquentiel de s . La **dft** du signal fournit au contraire en

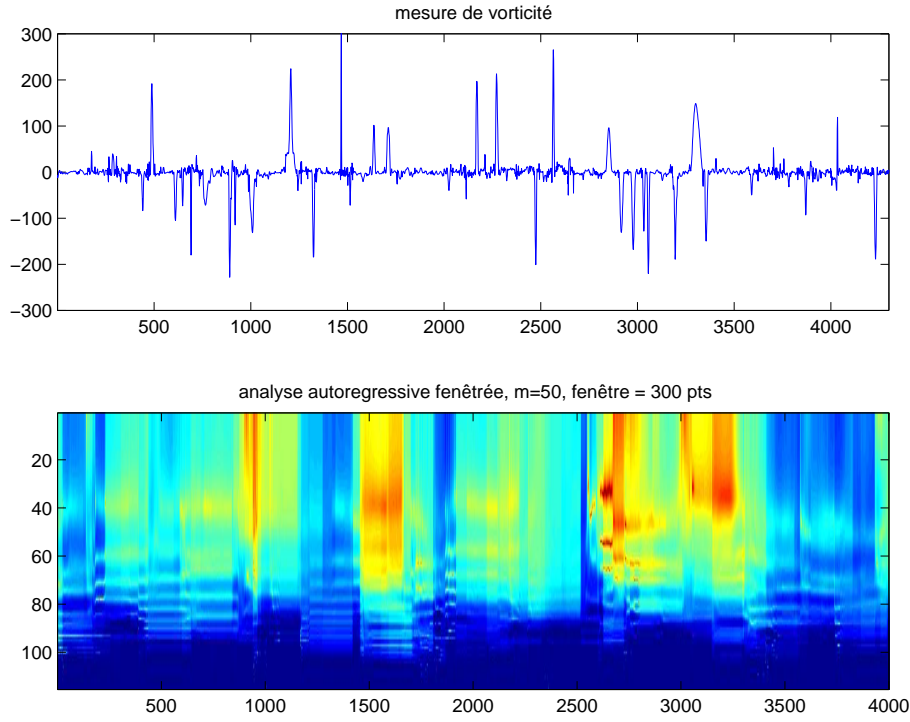


FIG. 2.17 – algorithme autorégressif fenêtré : l’analyse des intermittences

général un spectre “épais” (en général illisible car trop riche) tandis que le graphe de

$$\omega \rightarrow \frac{\tilde{\sigma}_m^2}{|1 - \alpha_1 e^{-i\omega} - \dots - \alpha_m e^{-im\omega}|^2}$$

fournit, elle, une représentation “lissée” de ce spectre, nettement plus commode pour dresser des conclusions.

Pour rendre par exemple compte des intermittences du signal non stationnaire (correspondant ici à l’enregistrement de la vorticité en un point dans un écoulement turbulent), nous avons par exemple affiché sur l’image de la figure 2.17 l’évolution du logarithme de la densité spectrale de puissance en fonction à la fois du logarithme du nombre d’ondes (les nombres d’ondes sont à lire en croissant de haut en bas) et de la position temporelle où se trouve la fenêtre d’exploration (ici de 300 points pour un signal de longueur 10000 points) à partir de laquelle les paramètres d’autorégressivité (ici $m = 50$) sont calculés. On dispose ainsi d’une analyse temps-fréquences d’un signal hautement non stationnaire obtenue par un procédé moins direct que celui consistant à prendre la transformée de Fourier fenêtrée. Cette image permet de déceler les intermittences du signal (au niveau de contenu fréquentiel).

2.4 Les transformations du type Wigner-Ville

Pour analyser les évolutions linéaires de fréquences sur un signal, une transformation s’avère intéressante, celle de Wigner-Ville. Elle se base sur une remarque simple concernant les polynômes du second degré.

Commençons par introduire une classe de signaux de référence, que nous appellerons

classe des *chirps gaussiens*; les signaux de cette classe seront assez bien localisés en temps et en fréquence. Nous souvenant que l'atome gaussien est celui qui réalise le meilleur compromis au niveau du principe d'incertitude de Heisenberg, on appelle *chirp gaussien* tout atome temporel du type

$$t \mapsto s(t) = e^{-\alpha(t-\beta)^2} e^{iP(t)},$$

où $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme de degré au plus égal à 2 à coefficients réels; Si le polynôme P est de degré 1, l'atome est quasi-stationnaire en ce sens qu'il présente simplement une modulation d'amplitude matérialisée par une gaussienne; si α est suffisamment grand, de manière à ce que la modulation d'amplitude soit faible, on peut considérer que la constante P' représente la fréquence de s à l'instant t (on parle aussi de *fréquence instantanée* de s à l'instant t). Remarquons que cette fréquence (indépendante de t) est la même que celle du signal

$$\tau \mapsto \overline{s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} s\left(t + \frac{\tau}{2}\right).$$

Les signaux s_1 et s_2 dont les parties réelles sont représentées sur la figure 2.5 sont des modèles de chirps gaussiens.

De même, si P est de degré 2, c'est à dire

$$P(t) = \rho(t - \gamma)^2 + \delta, \text{ avec } \gamma, \rho, \delta \in \mathbb{R},$$

on voit que, pour tout $t, \tau \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) = \exp\left(-2\alpha\left[(t - \beta)^2 + \frac{\tau^2}{4}\right]\right) \exp(2i\rho(t - \gamma)\tau).$$

Si l'on fixe l'instant t , on s'aperçoit alors que le spectre du signal

$$s^{(t)} : \tau \mapsto \overline{s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} s\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$$

est le signal

$$\widehat{s^{(t)}} : \omega \mapsto \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{-2\alpha(t-\beta)^2} e^{-(\omega - 2\rho(t-\gamma))^2/\alpha}.$$

Lorsque $1/\alpha$ est assez grand, ce qui signifie que la modulation d'amplitude du chirp gaussien s peut être supposée relativement faible, le spectre de $s^{(t)}$ est localisé près du point

$$\omega(t) = 2\rho(t - \gamma).$$

Cette fréquence est encore appelée *fréquence instantanée* du chirp gaussien s à l'instant t .

Il est donc naturel, si l'on cherche à pister l'analyse temps-fréquences d'un signal en transposant au cadre continu les méthodes discrètes développées dans la section 2.1.3, d'introduire la classe suivante de transformations : on appelle transformation de la classe de Cohen toute transformation $s \mapsto C[s]$ de l'espace des signaux d'énergie finie dans l'espace des images-fonction définies dans l'espace temps-fréquences, telle que (formellement au moins)

$$C[s](t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int \int e^{-i(\theta t - \theta u + \tau \omega)} \Phi(\theta, \tau) \overline{s\left(u - \frac{\tau}{2}\right)} s\left(u + \frac{\tau}{2}\right) du d\tau d\theta,$$

où Φ désigne un noyau intégral tel que soient valides (au moins pour tout signal d'énergie finie continu au sens mathématique du terme et de spectre également continu) les deux formules de conservation d'énergie suivantes

$$\int C[s](t, \omega) d\omega = |s(t)|^2, \quad \int C[s](t, \omega) dt = |\hat{s}(\omega)|^2.$$

L'exemple le plus important de telle transformation est la *transformation de Wigner-Ville*, celui où $\Phi \equiv 1$; comme le spectre de la distribution de Dirac est le signal constant $\equiv 1$, on a dans ce cas

$$\begin{aligned} C[s](t, \omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int \overline{s\left(u - \frac{\tau}{2}\right)} s\left(u + \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} [2\pi\delta(u - t)] du d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Pour des raisons qui seront précisées un peu plus loin, on note cette transformation particulière

$$C[s](t, \omega) = \text{WV}[s, s; t, \omega].$$

Le problème pratique majeur inhérent à toutes les transformations de la classe de Cohen est qu'il s'agit non plus de transformations linéaires, mais de transformations quadratiques, donc dérivant d'une forme sesquilinéaire, en l'occurrence ici l'application qui à une paire de signaux (s_1, s_2) associe *l'image d'interférence*

$$\begin{aligned} (t, \omega) &\mapsto C[s_1, s_2](t, \omega) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int \int e^{-i(\theta t - \theta u + \tau\omega)} \Phi(\theta, \tau) \overline{s_2\left(u - \frac{\tau}{2}\right)} s_1\left(u + \frac{\tau}{2}\right) du d\tau d\theta. \end{aligned}$$

Si s_1, s_2 sont deux signaux (par exemples deux chirps gaussiens), on a

$$C[s_1 + s_2] = C[s_1] + C[s_2] + 2 \operatorname{Re} (C[s_1, s_2]).$$

Le calcul du terme d'interférence (pour la transformée de Wigner-Ville) entre deux chirps gaussiens est un calcul aisé : si $s_k(t) = e^{-\alpha_k t^2} e^{i\beta_k t^2}$, $k = 1, 2$, on a :

$$\text{WV}[s_1, s_2; t, \omega] = \frac{e^{\frac{1}{2} \arctg \frac{\beta}{\alpha}}}{\sqrt{\pi}(\alpha^2 + \beta^2)} e^{-A(t, \omega)t^2 - iB(t, \omega)t^2},$$

où

$$A := \frac{\alpha\omega^2 - 4(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)t\omega + 4(\alpha_1\beta_2^2 + \alpha_2\beta_1^2 + \alpha\alpha_1\alpha_2)t^2}{t^2(\alpha^2 + \beta^2)}$$

et

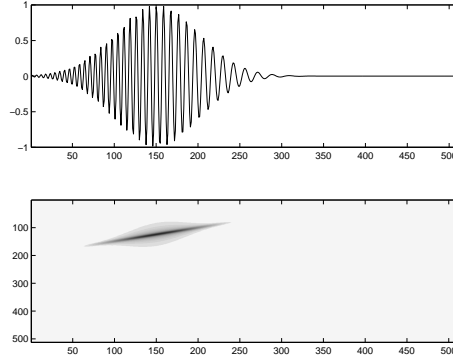
$$B := \frac{\beta\omega^2 - 2(\alpha_2^2 + \beta_2^2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2)t\omega + 4(\beta_1(\alpha_2^2 + \beta_2^2) - \beta_2(\alpha_1^2 + \beta_1^2))t^2}{t^2(\alpha^2 + \beta^2)},$$

avec

$$\alpha := \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta := \beta_2 - \beta_1.$$

Si $s_1 = s_2 = e^{-\alpha_1 t^2} e^{i\beta_1 t^2}$, on trouve

$$\text{WV}[s_1, s_1; t, \omega] = \sqrt{\frac{1}{2\alpha_1\pi}} e^{-(\omega - 2t\beta_1)^2 / 2\alpha_1 - 2\alpha_1 t^2}.$$

FIG. 2.18 – transformée de Wigner-Ville du chirp gaussien s_1

Lorsque α_1 tend vers l'infini, on obtient pour la distribution de Wigner-Ville du chirp gaussien de paramètres α_1 et β_1 (soit $s_1(t) = \exp(-\alpha_1 t^2 - i\beta_1 t^2)$) une mesure chargeant uniformément la droite d'équation $\omega - 2\beta_1 t = 0$ dans le plan temps-fréquences. En revanche, l'interférence $WV[s_1, s_2; \cdot, \cdot]$ lorsque $s_1 \neq s_2$ apparaît comme un terme oscillant, susceptible par conséquent d'atténuation sous l'effet d'un filtrage passe-bas (ou lissage de l'image).

La transformation de Wigner-Ville discrète est réalisée numériquement via la routine **MATLAB**

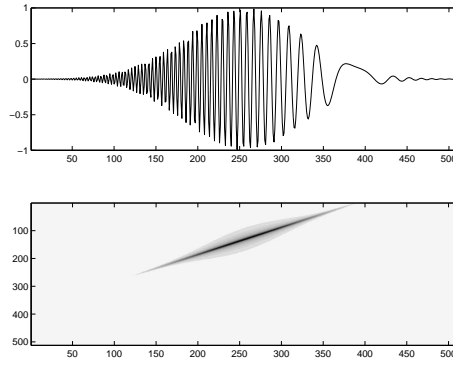
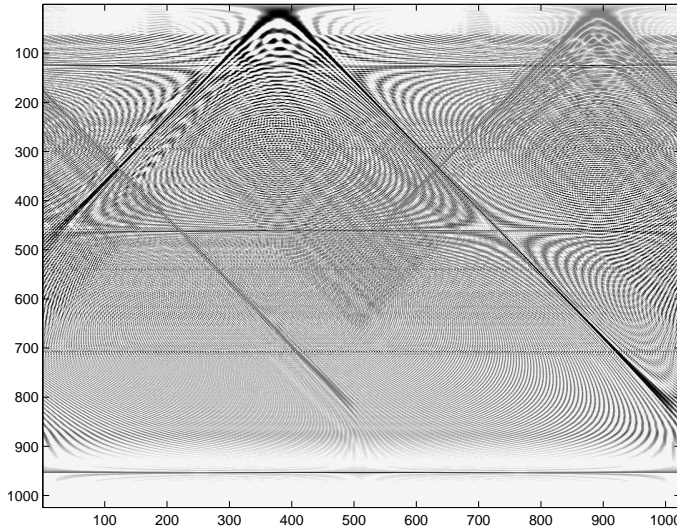
```
>>W=wig0(w)
```

Si s est un signal digital de longueur N , on le prolonge en un signal digital \tilde{s} sur $\{-N, \dots, 2N-1\}$ par $\tilde{s} = [0 \ s \ 0]$; on calcule ensuite, pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$, pour tout $l \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$DWV[s, s; k, l] = \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{s}(l+p) \overline{\tilde{s}(l-p)} W_N^{kp}.$$

Pour les deux chirps s_1 et s_2 introduits dans la section 2.1.3 (et dont les parties réelles sont représentées sur la figure 2.5), nous avons représenté sur les deux figures 2.18 et 2.19 ci-dessous les parties réelles des signaux (entre $t = 0$ et $t = 5.12$) et leurs transformées de Wigner-Ville calculées pour cet intervalle temporel (ce sont donc des images 512×512); on voit que les évolutions linéaires temps-fréquences sont cette fois matérialisées par des droites et non plus des “escaliers” comme sur les figures 2.7 et 2.8.

La difficulté majeure liée à la transformation de Wigner-Ville tient précisément aux termes d'interférence; même s'ils sont de nature oscillante (comparés aux transformées de Wigner-Ville des divers composants qui eux sont des termes positifs), ils rendent l'image obtenue extrêmement confuse. Pour remédier à ce problème, on peut déjà décider de remplacer le signal par la transformée de Hilbert de sa partie réelle, c'est-à-dire le signal obtenu en supprimant les composants de fréquence négative dans la partie réelle du signal s ; si le signal est échantillonné avec un pas égal à τ , l'intervalle utile de fréquences est $[0, \pi/\tau]$. Sur la figure 2.20 (les fréquences étant à dire dans l'ordre croissant de haut en bas), on voit l'image obtenue *via* cette transformation, la routine **MATLAB** mise en oeuvre étant la routine

FIG. 2.19 – transformée de Wigner-Ville du chirp gaussien s_2 FIG. 2.20 – transformée de Wigner-Ville du signal s

```
>>W=wigh(s)
```

à partir du signal $s = s_0 + s_1 + s_2 + s_4$ de la figure 2.6. On remarque que cette image est confuse, entachée de la présence inévitable des termes d'interférence ; le moyen de pallier à cette “illisibilité” est (si l'on prend en compte le fait que les termes d'interférence sont de nature oscillante), on peut imaginer “moyenniser” la transformée de Wigner-Ville au travers d'une fenêtre Θ (en les deux variables t et ω), ce qui fournit la fonction

$$(t, \omega) \rightarrow \iint \Theta(t - \theta, \omega - \xi) \text{WV}[s, s; \theta, \xi] d\theta d\xi,$$

dite *transformée de Wigner-Ville lissée* du signal s . On peut aussi “moyenniser” différemment, en considérant, si Σ désigne une fonction des deux variables u (indicateur temporel) et τ (indicateur fréquentiel) la transformation

$$(t, \omega) \rightarrow \iint \Sigma(u, \tau) \overline{s(t + u - \tau/2)} s(t + u + \tau/2) e^{-i\omega\tau} du d\tau,$$

dite *transformée de Wigner-Ville fenêtré* du signal s . Dans les deux cas, les phénomènes d'interférence sont atténués et l'image gagne en lisibilité. Ces deux transfor-

mations (transformée de Wigner-Ville lissée et transformée de Wigner-Ville fenêtrée) sont respectivement implantées numériquement sous les deux routines **MATLAB** :

```
>>W_lissee=wiglis1h(fenetre,s)
>>W_fen=wwig(fenetre_temps,fenetre_frequence,s)
```

Le signal s est encore remplacé par la transformée de Hilbert de sa partie réelle.

La transformation de Wigner-Ville préserve l'orthogonalité, mais au niveau des images : si deux signaux s_1 et s_2 sont orthogonaux comme signaux dépendants du temps, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} s_1(t) \overline{s_2(t)} dt = 0,$$

alors il suit de la formule de Plancherel (l'énergie d'un signal est égale à $1/2\pi$ fois l'énergie de son spectre) que l'on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} s_1(t) \overline{s_2(t)} dt \right|^2 = 2\pi \iint \text{WV}(s_1, s_1; t, \omega) \text{WV}(s_2, s_2; t, \omega) dt d\omega = 0;$$

l'égalité

$$\left| \int_{\mathbb{R}} s_1(t) \overline{s_2(t)} dt \right|^2 = 2\pi \iint \text{WV}(s_1, s_1; t, \omega) \text{WV}(s_2, s_2; t, \omega) dt d\omega$$

est une formule importante, dite *formule de Moyal*. On retiendra par exemple que si l'on considère la transformée de Wigner-Ville lissée avec une fenêtre du type $\Theta(t, \omega) = \text{WV}(h, h; t, \omega)$, on obtient une transformation positive puisque

$$\iint \text{WV}(s, s; t, \omega) \text{WV}(h(-\cdot), h(-\cdot); \theta - t, \xi - \omega) d\theta d\xi = \frac{1}{2\pi} \left| \int s(u) \overline{h(t - u)} e^{-i\omega u} du \right|^2,$$

ce qui montre que l'on obtient le carré du module de la transformée de Fourier fenêtrée; ceci montre bien combien sont liées la transformée de Wigner-Ville et la transformée de Fourier à fenêtre (dite aussi spectrogramme) exploitée précédemment pour l'analyse du signal s_0 (figures 2.8).

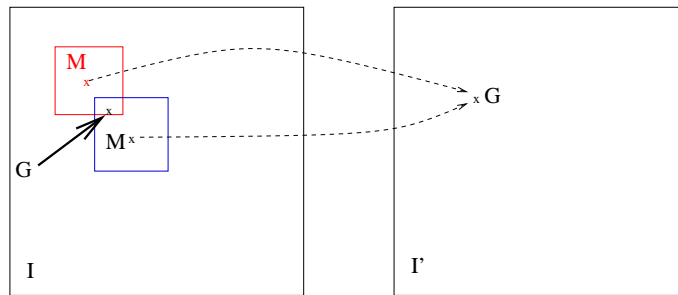


FIG. 2.21 – La méthode de “réassignement” de F. Auger et P. Flandrin

Les idées évoquées ci-dessus en appellent à une technique empruntée au traitement des images positives et proposée il y a quelques années (1995) par F. Auger et P. Flandrin : l'idée est d'explorer l'image avec une fenêtre fixe Θ , de calculer, chaque fois que la fenêtre est centrée en un point M , le pixel de gravité G de la densité de l'image dans la fenêtre, puis de “réassigner” la valeur $I(M)$ au pixel G dans une image à

l'initial vierge (figure 2.21). Si le pixel G apparaît plusieurs fois, on additionne les valeurs. L'effet est donc une “concentration” de l'image sur les centres de gravité locaux, ce qui, en ce qui concerne les images obtenues par transformée de Wigner-Ville lissée ou fenêtrée, en améliore considérablement la lisibilité. On a représenté sur la figure 2.22 le résultat obtenu à partir de la transformée de Wigner-Ville de $s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4$ explorée avec une fenêtre de 20 pixels sur 20 pixels.

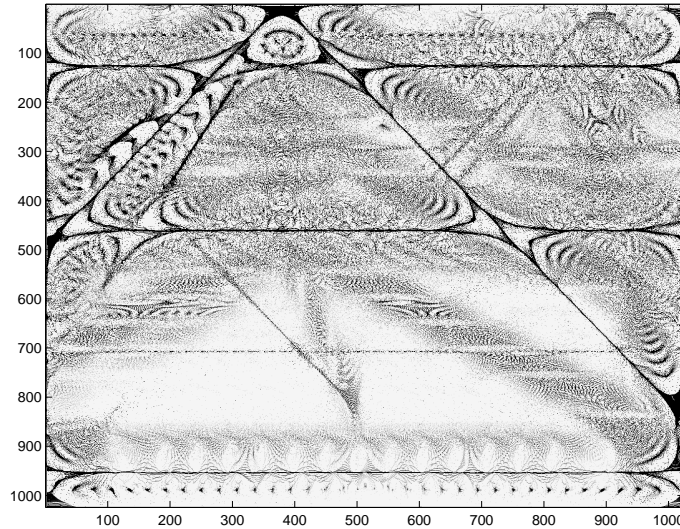


FIG. 2.22 – La méthode de “réassignement” appliquée à $s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4$

Chapitre 3

L'analyse temps-échelles et ses applications

3.1 Pourquoi analyser en temps et en échelles ?

Traiter un signal digital ou analogique, c'est savoir en même temps en dégager les structures cohérentes (dans nombre de situations, en particulier en régime stationnaire, ces structures sont les composantes moyennes ou basses-fréquences du signal ou de l'image, mais ce peut être aussi certaines structures motiviques apparaissant de manière apériodique) et les composantes hautes-fréquences, les lignes de contraste ou les singularités. Après avoir privilégié (au chapitre 2) le traitement du signal au niveau de son contenu fréquentiel (c'est le recours à l'outil Fourier qui le permet, avec la possibilité de coupler cet outil avec l'analyse temporelle ou spatiale pour réaliser l'analyse temps-fréquences), nous allons ici le traiter, ce qui relève d'une analyse différente, en l'analysant dans la gamme des échelles : notons qu'un phénomène "haute fréquence", s'il relève de la catégorie des signaux à lire "à petite échelle" (du fait que les ondes qu'il renferme ont une petite amplitude), relève aussi, du fait de sa stationnarité (l'onde est répétée de manière périodique) de la classe des "grandes échelles" (la "périodicité" se voit seulement si l'on examine le signal de loin). On ne peut donc pas dire qu'une analyse temps-échelles corresponde à une analyse temps-fréquences. Ce sont deux points de vue *a priori* différents (et souvent complémentaires). D'ailleurs, le principe d'incertitude de Heisenberg, qui prive l'analyse de Fourier d'être une analyse locale, empêche la compatibilité de nos deux exigences (un "accident" se lit bien en temps-échelles, beaucoup moins bien en "temps-fréquences"). Les modèles inspirés du *mécanisme de la vision* ainsi que du concept *d'être fractal* (sur lequel nous reviendrons) nous incitent à proposer pour l'analyse des signaux ou des images l'idée simple suivant laquelle l'analyse se ferait par le biais d'une loupe (que l'on s'octroierait la possibilité de retourner), de manière à pouvoir disposer de versions "grossies" du signal (de plus en plus riches du point de vue de la quantité d'information) ainsi que d'images "prises de plus en plus loin" (donc de moins en moins riches du point de vue quantité d'information).

Souvent aussi, l'information analogique ou digitale que l'on cherche à analyser ou à traiter est une information déterministe (obéissant à une cohérence déterministe), à laquelle se surajoute un bruit probabiliste (qui lui obéit à une cohérence stochastique). Pour le bruit blanc par exemple, la cohérence stochastique oblige le bruit à se plier à la règle suivante, à savoir qu'un extrémum local sur deux (ou un *zéro-crossing*

sur deux) se perd lorsque l'on passe de la lecture à un niveau d'échelle 2^k à la lecture au niveau d'échelle 2^{k+1} . L'opération de filtrage, correspondant au traitement d'une information analogique ou digitale *via* une *boite noire*, c'est-à-dire un appareil agissant de manière linéaire et dont les paramètres restent immuables dans le temps (exemple une cellule électrique, une cellule mécanique,...) correspond du point de vue mathématique à une opération de convolution :

$$\begin{aligned} s \rightarrow L(s) & : t \rightarrow \int h(t-u)s(u)du \\ q \rightarrow L(s) & : n \rightarrow \sum_n s(k)h(n-k) \end{aligned}$$

(en analogique ou en digital). Du point de vue de l'espace des fréquences, le filtrage correspond à une multiplication du spectre par une fonction "indicatrice" (ou approchant une fonction indicatrice) de la bande passante que l'on souhaite conserver au niveau du contenu fréquentiel du signal. L'élimination (ou l'atténuation) du bruit correspond à l'action d'un filtre *passé-bas*, la mise en évidence des hautes fréquences au contraire à l'action d'un filtre *passé-haut*. En filtrant de manière à éliminer ou atténuer le bruit, on court le risque d'éliminer des singularités du signal qui contiennent une information significative sur son contenu. En ce sens, effectuer cette séparation signal/bruit à partir d'une analyse temps-échelles de l'information (en profitant de la cohérence déterministe du signal dans la gamme des échelles) peut s'avérer rendre compte de manière beaucoup plus précise du contenu du signal.

3.2 Le principe de l'analyse temps-échelles continue (Continuous Wavelet Transform)

Soit ψ un signal d'énergie finie défini sur l'axe des temps et dont le spectre satisfait l'hypothèse

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (*)$$

Puisque le poids $\omega \mapsto 1/|\omega|$ n'est pas intégrable au voisinage de 0, la condition à laquelle ψ est assujettie impose que la distribution des valeurs du spectre de ψ ne charge pas l'origine, et que l'on puisse donc considérer ψ comme la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bande (les fréquences voisines de 0 sont coupées, et ce d'autant plus que la transformée de Fourier de ψ s'annule à un ordre élevé en $\omega = 0$). Un exemple typique (et que nous utiliserons beaucoup par la suite) est l'exemple

$$t \mapsto \psi(q; t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^q [g](t),$$

où q est un entier strictement positif ou nul et g est l'atome gaussien

$$g(t) = \exp(-t^2/2).$$

Notons qu'une telle fonction $\psi(q; \cdot)$, $q \in \mathbb{N}^*$, est orthogonale à toute fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $q - 1$; ceci jouera un rôle important par la suite; notons aussi que, plus q est grand, plus le spectre de $\psi(q; \cdot)$ s'annule à un ordre élevé en 0, plus le rôle de filtre passe-bande dévolu à l'opération de convolution avec l'atome $\psi(q; \cdot)$ s'avère efficace. On a représenté sur la figure 3.1 les graphes

des fonctions g, g', g'' ; on y voit que le fait de dériver g de plus en plus crée des oscillations, transformant ainsi l'impulsion g en une onde de présentant de plus en plus d'oscillations et de moins en moins bien localisée.

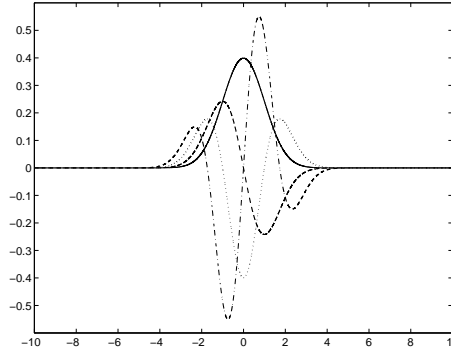


FIG. 3.1 – La gaussienne (-) et ses deux premières dérivées [resp. en (.-) et (..)]

On peut aussi choisir ψ de manière à ce que le spectre de ψ soit identiquement nul au voisinage de l'origine; c'est le cas par exemple si l'on choisit pour $\hat{\psi}$ une gaussienne décentrée

$$\omega \rightarrow \exp(-(\omega - \omega_0)^2/2);$$

la fonction ψ qui lui correspond est la gaussienne modulée

$$t \rightarrow \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2} + i\omega_0 t};$$

si l'on choisit judicieusement ω_0 ($\omega_0 = \pi(2/\log 2)^{1/2} \simeq 5.33644$), on assure que le rapport entre les deux premiers maxima de ψ sur $[0, \infty[$ vaille $1/2$, ce qui réalise un judicieux compromis entre les localisations en temps et en fréquence de l'atome ψ . Cette fonction ψ particulière est l'ondelette de Gabor; on a représenté ψ et son spectre sur la figure 3.2 ci-dessous. En fait, le spectre de l'ondelette de Gabor ne s'annule pas en 0, mais on peut la corriger (la correction n'étant pas très significative) en définissant l'ondelette de Morlet $\tilde{\psi}$ par

$$\tilde{\psi} = \exp(-(\omega - \omega_0)^2/2) - \exp(-\omega_0^2/2) \exp(-\omega^2/2).$$

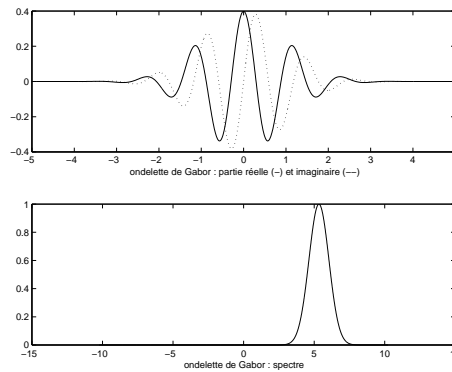


FIG. 3.2 – L'ondelette de Gabor et son spectre

Étant donné un tel signal modèle ψ vérifiant (*), nous sommes en mesure d'associer à tout signal s de $L^2(\mathbb{R})$ une fonction de deux variables, l'une (traditionnellement notée a) étant l'échelle, l'autre (notée b) étant la variable temporelle, rendant compte de l'analyse du signal dans l'espace temps-échelles. C'est la fonction

$$(a, b) \rightarrow \text{CWT}^\psi[s](a, b) := \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} s(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

(CWT pour *Continuous Wavelet Transform*, la fonction ψ étant appelée *ondelette* (en anglais *wavelet*). L'image $\text{CWT}^\psi[s]$ correspond donc au test du signal s contre toutes les versions (translatées et adaptées aux échelles) du motif ψ .

Il résulte de la formule de Plancherel que l'on a immédiatement la formule

$$\text{CWT}^\psi[s](a, b) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(a\omega)} e^{ib\omega} d\omega = \sqrt{a} \mathcal{F}^{-1}[\widehat{s} \overline{\widehat{\psi}(a(\cdot))}](b)$$

où \mathcal{F}^{-1} est l'inverse de l'opération de prise de spectre. C'est d'ailleurs par le biais de cette dernière formule que s'effectue, on y reviendra, le calcul numérique de l'image $I = \text{CWT}^\psi[s]$ lorsque s est un signal digital de longueur $N = 2^p$ selon la règle

```
>>shat=fft(s);
>>n_octaves=p-1;
>>n_echelles=n_octaves*n_voix;
>>I=zeros(2^p,n_echelles);
>>k_echelle=1;
>>echelle=4;
>>xi=[(0:2^(p-2)) (((-2^(p-2))+1):-1)].*(2*pi);
>>for j=1:n_octaves,
    for l=0:n_voix-1
        q_echelle=q_echelle.* 2^(l/n_voix);
        omega=xi./q_echelle;
        w_hat=psi_hat(\omega).*shat;
        I(:,k_echelle)=ifft(w_hat)/sqrt(q_echelle);
        k_echelle=k_echelle+1;
    end
    echelle=2*echelle;
end
```

si l'on désire que la transformée $\text{CWT}^\psi[s](a, \cdot)$ soit calculée aux valeurs $a = 2^{-j+k/m}$, $j = 2, \dots, p$, $k = 0, \dots, m-1$, où $m = n_{\text{voix}}$ (c'est à dire le nombre de voix par octave, le nombre d'octaves sur le clavier de la décomposition étant $p-1$). L'ondelette ψ est quantifiée via son spectre, en l'occurrence la fonction notée dans ce synopsis psi_hat . L'implémentation pratique de cet algorithme est donnée sous les commande **MATLAB**

```
>> CWT= cwt(s,n_voix-par-octave,'ondelette')
>> [CWT1,CWT2,CWT] = gaussq(s,n_voix-par-octave, q)
```

pour une ondelette à préciser dans le premier cas, avec comme ondelette la dérivée d'ordre q de la gaussienne dans le second cas; dans le second cas, l'image CWT1 affiche les maxima locaux de l'image

$$(a, b) \rightarrow |\text{CWT}^{[g^{(q)}]}(a, b)|,$$

(comme fonction de b , a prenant toutes les valeurs possibles) tandis que CWT2 affiche ces mêmes maxima locaux, mais cette fois affublés du signe dont ils sont affectés comme extréma locaux de

$$(a, b) \rightarrow \text{CWT}^{[g^{(q)}]}(a, b).$$

Sur la figure 3.3 ci-dessous, nous avons traité avec quelques ondelettes le signal envisagé au chapitre 2, section 2.1.3 (figure 2.6), $s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4$:

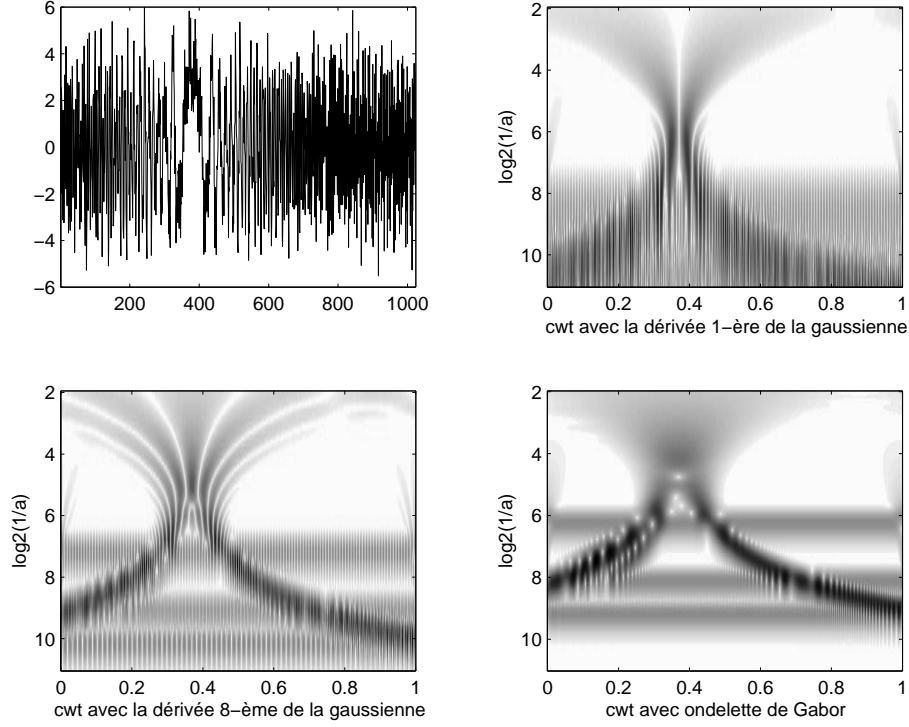


FIG. 3.3 – Analyse de s en ondelettes continue

Les règles plus précises (et que nous admettrons) permettant la classification des singularités d'une information s à partir d'une telle image $|\text{CWT}^\psi[s]|$ sont essentiellement au nombre de trois :

- si ψ est une ondelette bien localisée sur l'axe des temps, et telle que tous les moments

$$\int_{\mathbf{R}} t^k \psi(t) dt$$

soient nuls pour $k = 0, \dots, m$ et si s présente une régularité d'ordre $m + \alpha$ au voisinage de t_0 , il existe $\eta > 0$ et $K > 0$, tels que, dans le rectangle $]0, \eta[\times]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, on ait l'estimation

$$|\text{CWT}^\psi[s](a, b)| \leq K a^{m+\alpha+\frac{1}{2}}.$$

;

- si ψ est une ondelette bien localisée sur l'axe des temps, et telle que tous les moments

$$\int_{\mathbf{R}} t^k \psi(t) dt$$

soient nuls pour $k = 0, \dots, m$ et si $I =]t_{\min}, t_{\max}[$ est un laps de temps tel que pour un certain $\tau > 0$, pour tout $a \in]0, \tau[$, la coupe horizontale

$$b \mapsto \text{CWT}^\psi[s](a, b)$$

de l'image temps-échelles ne présente de maxima locaux en aucun point de I , alors, pour tout laps de temps $J = [\alpha, \beta]$ inclus dans I , il existe une constante $C(J)$ telle que

$$|s(t_1) - s(t_2)| \leq C_J |t_1 - t_2|^m, \quad t_1, t_2 \in J;$$

le signal s ne présente par conséquent que des singularités au pire “douces”, l'ordre de régularité du signal en ces instants étant au moins égal à m , sur I (c'est là la règle la plus utilisée du point de vue pratique);

- si ψ est une ondelette bien localisée sur l'axe des temps et telle que tous les moments

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt$$

soient nuls pour $k = 0, \dots, m$ et si $I =]t_{\min}, t_{\max}[$ est un laps de temps, $t_0 \in I$ un instant tel qu'il existe deux constantes $\tau(t_0) > 0$ et $K(t_0) > 0$ telles que, pour tout $a \in]0, \tau[$, tous les maxima locaux de la coupe horizontale

$$b \mapsto |\text{CWT}^\psi[s](a, b)|$$

de l'image temps-échelles soient dans l'intervalle $]t_0 - K(t_0)a, t_0 + K(t_0)a[$, alors tous les instants de I , hormis t_0 , sont des instants où s présente une singularité “douce” avec ordre de régularité au moins m ; de plus le signal s vérifie une inégalité

$$|s(t_0 + h) - s(t_0)| \leq C(t_0) |h|^{m-\beta} \quad (\dagger)$$

pour h voisin de 0 et $\beta \in]0, m]$ si et seulement si l'on a, le long de toutes les lignes de maxima locaux piégées dans le secteur conique

$$\{0 < a < \tau, |b - t_0| < K(t_0)a\},$$

une inégalité du type

$$|\text{CWT}^\psi[s](a, b)| \leq \widetilde{K}(t_0) a^{m-\beta+\frac{1}{2}},$$

où $\widetilde{K}(t_0)$ est une constante strictement positive.

La seconde règle nous permet d'affirmer, si l'on dispose de l'image $\text{CWT}^\psi[s]$ lorsque $\psi = \psi(q; \cdot)$, que les singularités d'ordre strictement inférieur à $q-1$ ne sont à chercher qu'aux extrémités inférieures des “lignes de crête” de l'image temps-échelles; la seconde nous assure que c'est en suivant les fonctions

$$a(\theta) \mapsto \log |\text{CWT}^\psi[s](a(\theta), b(\theta))|$$

le long de toutes les lignes de crête aboutissant au point $(0, t_0)$ et piégées dans un certain secteur conique au dessus de $(0, t_0)$ et en calculant la pente maximale que l'on doit trouver le plus petit $\beta \in]0, q-1]$ possible tel que (\dagger) soit satisfaite à l'instant t_0 .

Toutes ces règles reposent sur la formule de Taylor : si s admet au voisinage de b un développement de Taylor à l'ordre m

$$s(t) = \sum_{k=0}^m \frac{s^{(k)}(b)}{k!} (t-b)^k + r_{b,k}(t)$$

et si ψ est orthogonal aux monômes t^k , $k \leq m$, on a, lorsque b' est voisin de b et a est petit

$$\text{CWT}^\psi[s](a, b') \simeq \text{CWT}^\psi[r_{b,k}](a, b').$$

Il est donc naturel que l'on détecte beaucoup plus de singularités (i.e de lignes verticales aboutissant jusqu'au domaine des petites échelles) avec comme ondelette la première dérivée de la gaussienne qu'en prenant la huitième dérivée (voir la figure 3.3); dans ce cas en effet, on ne détecte plus que les singularités “douces”; c'est encore plus vrai si l'on prend l'ondelette de Gabor, orthogonale, elle, à tous les monômes.

Sur la figure 3.4, nous avons traité avec l'ondelette de Gabor le signal de vorticité dans un écoulement 2D (chaque pic correspond au passage d'un tourbillon).

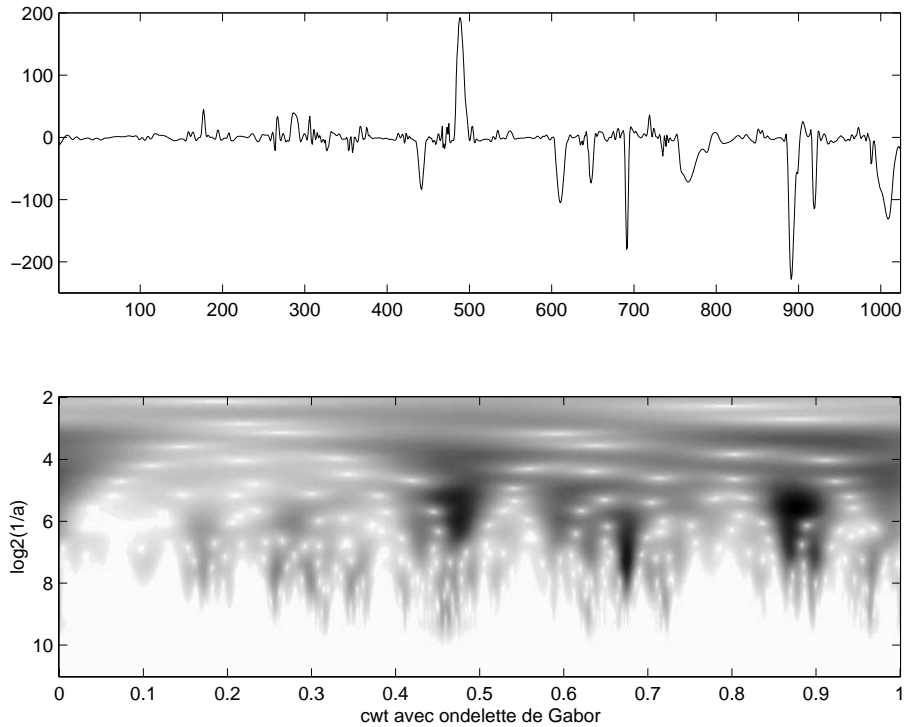


FIG. 3.4 – Analyse d'un signal de turbulence (vorticité en un point) en ondelettes continue (Gabor)

Sur la figure 3.5, nous avons représenté les maxima locaux (calculés en ligne, pour chaque valeur de a) de la transformée

$$(a, b) \rightarrow |\text{CWT}^{[g'']}(a, b)|$$

du même signal de vorticité s . Les lignes aboutissant aux “accidents” (passages de tourbillons) sont de fait annoncées à l'avance dans la gamme des échelles croissantes, ce qui correspond à une certaine cohérence déterministe régissant le signal.

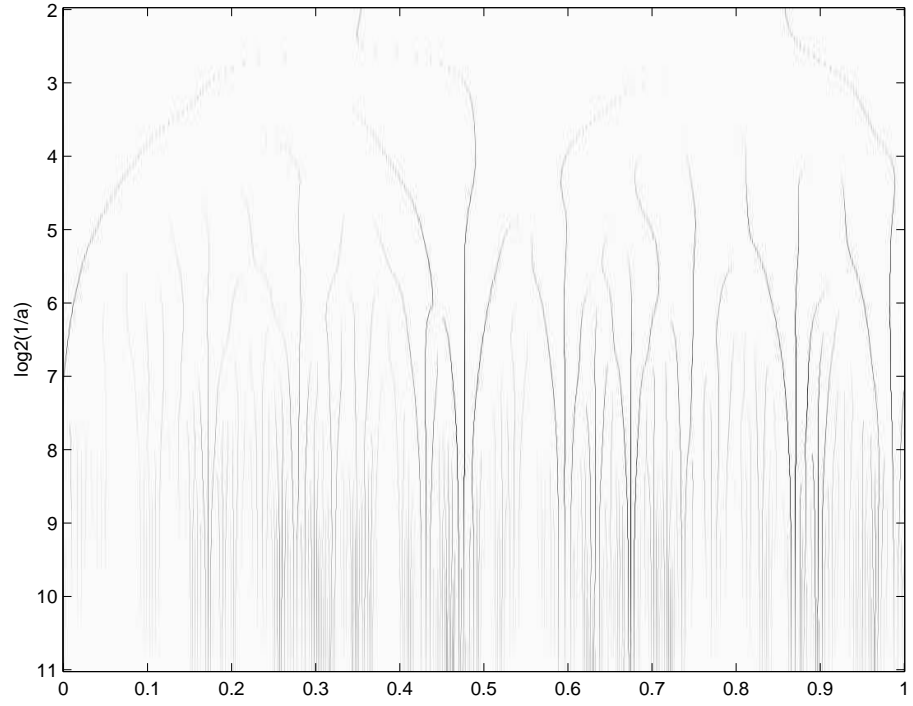


FIG. 3.5 – Analyse temps-échelle d'un signal de turbulence (vorticité en un point)

On verra dans la section suivante comment extraire, du fait que le mécanisme $s \rightarrow \text{CWT}^\psi[s]$ s'inverse, un procédé de séparation signal/bruit. L'idée naïve est de remplacer le niveau de plus petite échelle ($a = 1$ par exemple), illisible du fait du bruit, par le signal dont l'image par transformée en ondelette continue approche le mieux (au sens des moindres carrés) l'image déduite induite par régression linéaire (sur le paramètre a) de l'évolution de l'image $|\text{CWT}^\psi(s)|$ en fonction de a dans la bande $2 < a < 2^2$.

La transformation temps-échelles continue fournit une information certainement redondante par rapport à l'information dont on est parti. Il est naturel de penser que l'on peut l'inverser (sur son image bien sûr !), ce qui est le cas dans les exemples que l'on étudie ici (par exemple lorsque l'ondelette analysante est $\psi = g^{(q)}$). On a en effet la proposition théorique suivante :

Proposition 3.1 *Si s est un signal d'énergie finie et ψ une ondelette obéissant à la condition*

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = C(\psi),$$

(condition réalisée par exemple si ψ est une ondelette analysante réelle), alors on a

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0+ \\ A, T \rightarrow +\infty}} \left\| s - \frac{1}{C(\psi)} \int_{\substack{a \in [\epsilon, A] \\ |b| \leq T}} \text{WT}^\psi[s](a, b) \frac{\psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right)}{\sqrt{a}} \frac{dad b}{a^2} \right\|_2 = 0,$$

ce que l'on peut aussi écrire de manière plus formelle sous la forme

$$s = \lim_{L^2} \int_{a \in]0, \infty[} \int_{b \in \mathbb{R}} \text{WT}^\psi[s](a, b) \frac{\psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right)}{\sqrt{a}} \frac{dad b}{a^2}.$$

Voici la preuve de cette proposition, preuve que l'on pourra bien sûr admettre, et que l'on donne ici pour que ces notes soient les plus complètes possible.

Si s_1 et s_2 sont deux signaux d'énergie finie, on a, toujours grâce à la formule de Plancherel,

$$\int_b \text{WT}^\psi[s_1](a, b) \overline{\text{WT}^\psi[s_2](a, b)} db = \frac{a}{2\pi} \int_\xi \widehat{s}_1(\xi) \overline{\widehat{s}_2(\xi)} |\widehat{\psi}(a\xi)|^2 d\xi.$$

Ceci implique un principe de conservation d'énergie, soit

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \text{WT}^\psi[s_1](a, b) \overline{\text{WT}^\psi[s_2](a, b)} \frac{dad b}{a^2} \\ &= \left(\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{a} da \right) \langle s_1, s_2 \rangle = C(\psi) \times \langle s_1, s_2 \rangle. \end{aligned}$$

En utilisant ce principe, on voit que, pour tout triplet ϵ, A, T , avec $0 < \epsilon < A < +\infty$ et $T > 0$, on a, si l'on pose

$$h(s; \epsilon, A, T) := s - \frac{1}{C(\psi)} \int_{\substack{\epsilon < a < A \\ |b| \leq T}} \text{WT}^\psi[s](a, b) \frac{\psi\left(\frac{-b}{a}\right)}{\sqrt{a}} \frac{dad b}{a^2},$$

que

$$\begin{aligned} \|h(s; \epsilon, A, T)\|_2 &= \sup_{g \in L^2, \|g\|_2=1} |\langle h(s; \epsilon, A, T), g \rangle| \\ &= \sup_{g \in L^2, \|g\|_2=1} \left[\frac{1}{C(\psi)} \left| \iint_{(a,b) \notin [\epsilon, A] \times [-T, T]} \text{WT}^\psi[s](a, b) \overline{\text{WT}^\psi[g](a, b)} \frac{dad b}{a^2} \right| \right] \\ &\leq \sup_{g \in L^2, \|g\|_2=1} \left[\left(\frac{1}{C(\psi)} \iint_{a \notin [\epsilon, A] \times [-T, T]} |\text{WT}^\psi[s](a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \right)^{1/2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{C(\psi)} \iint_{(a,b) \notin [\epsilon, A] \times [-T, T]} |\text{WT}^\psi[g](a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \left(\frac{1}{C(\psi)} \iint_{(a,b) \notin [\epsilon, A] \times [-T, T]} |\text{WT}^\psi[s](a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale tend vers 0 puisque, en vertu du principe de conservation d'énergie, l'intégrale

$$\int_{a>0} \int_b |\text{WT}^\psi[s](a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2}$$

converge. Ceci achève donc la preuve de la proposition. \diamond

Du point de vue numérique, cette opération d'inversion est, lorsque $\psi = g^{(q)}$, implémentée sous la routine **icwtg** dont le synopsis figure ci-dessous; on notera que l'inversion ne fonctionne que sur les signaux digitaux de moyenne nulle (les fonctions constantes non nulles ne peuvent être traitées comme des éléments de L^2 , d'ailleurs leur image par la transformée temps-échelles $\text{WT}^{[g^{(q)}]}$ est la fonction nulle).

```
function s=icwtg(A,q);
```

```
%A=icwtg(A,q);
```

```
%Cette fonction inverse la transformee en ondelettes
```



```
%continue (l'ondelette etant la derivee d'ordre q d'une
%gaussienne); la matrice d'entree A est une matrice a
%(p-1)*m lignes et 2^n colonnes, correspondant a la
%transformee en ondelette continue d'un signal s
%de longueur 2^p, le nombre de voix etant m, ou
%a une modification de cette matrice (via par
%exemple les algorithmes gaussq3, gaussq ou les algorithmes
%consistant a interpoler sur chaque colonne les
%maxima locaux). Cette operation d'inversion
%ne fonctionne numeriquement que sur les signaux
%de moyenne nulle (la formule d'inversion de la
%transformee en ondelettes continue n'est valide
%que sur l'espace des signaux d'energie finie).
```

3.3 Deux applications de la transformation temps-échelles continue

3.3.1 Séparation signal/bruit

L'une des manières de transmettre une information est de lui ajouter un bruit ; toute lecture d'un signal est de fait toujours entachée d'une erreur, matérialisée par un signal probabiliste dont le modèle le plus simple est le bruit blanc, c'est-à-dire un processus stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ou $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ suivant que l'on se place du point de vue de l'information continue ou discrète, les X_t (resp. les X_n) étant des aléas tous dans $L^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ (où (Ω, \mathcal{T}, P) est un espace probabilisé) d'espérance nulle et de distribution d'autocorrélation

$$E[X_t \overline{X_s}] := \int_{\Omega} X_t(\omega) \overline{X_s(\omega)} dP(\omega) = \sigma^2 \delta_0(t - s).$$

Les bruits blancs discrets sont générés sous **MATLAB** par la commande **rand**.

La présence d'un bruit blanc dans une image temps-échelle se répercute en termes d'une cohérence statistique au niveau de la promenade dans les échelles que régissent essentiellement les deux règles suivantes :

- si s est un signal déterministe (dans $L^2(\mathbb{R})$) auquel vient se greffer un bruit blanc B de variance σ^2 et si ψ est une ondelette (déterministe) analysante, alors, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $\text{CWT}^\psi[s + B](a, b)$ est (du fait de la présence de B) un signal probabiliste ; un petit calcul simple montre que

$$\forall a > 0, \quad \forall b \in \mathbb{R}, \quad E[|\text{CWT}^\psi[s + B](a, b)|^2] = |\text{CWT}^\psi[s]|^2 + \frac{\sigma^2}{a} \|\psi\|^2.$$

Ceci explique que le bruit est responsable, statistiquement, d'un terme explosant en $1/a$ lorsque a devient petit dans la brillance de l'image temps-échelles de $s + B$;

- le nombre moyen d'extréma locaux (ou de zéros-crossings, ceci revient au même à cause du théorème de Rolle) des coupes horizontales

$$b \mapsto \text{CWT}^\psi[B](a, b)$$

est proportionnel à $1/a$, autrement dit, si l'on passe d'une octave dyadique à une autre (dans le sens des échelles croissantes), un extrémum local sur deux se perd (en pensant toujours en termes statistiques puisque $(\text{CWT}^\psi[B](a, b))_b$ est en fait un processus stochastique).

Au contraire du bruit (dont l'image temps-échelles obéit à la cohérence statistique imposée entre autres par ces deux règles), le signal génère une image temps-échelles obéissant à une cohérence déterministe au niveau de la promenade dans les échelles. Plutôt de supprimer le bruit par une simple méthode de filtrage consistant à couper les composantes Haute-Fréquence (HF) de $s+B$ (et en faisant cela, d'amputer le signal lui-même de ses "accidents" intéressants), ce qui se fait en multipliant le spectre du signal par une fonction valant 1 au voisinage de 0 et décroissant vers 0 au voisinage d'une fréquence de coupure ω_c , on peut profiter de la disjonction de ces deux cohérences (déterministe et stochastique) pour travailler directement sur l'image $\text{CWT}^\psi[s+B]$.

Un algorithme simpliste conduisant à l'élimination du bruit, lorsque l'on travaille avec une analyse temps-échelle simplement dyadique (une voix par octave) pourrait fonctionner comme suit : si 2^j correspond à un niveau d'échelle, on décrète que l'extrapolation (via par exemple une méthode de régression linéaire au sens des moindres carrés) de la fonction

$$b \mapsto \text{CWT}^\psi[s+B](2^j, b)$$

à partir du calcul de la pente "moyenne" de

$$a(\theta) \mapsto \log |\text{CWT}^\psi[s+B](a(\theta), b(\theta))|$$

le long des lignes de crête de l'image $|\text{CWT}^\psi[s+B]|$ piégées dans un secteur conique de sommet b contenu dans $[2^j, 2^{j+1}] \times \mathbb{R}$, fournit un candidat pour la valeur de $\text{CWT}[s](2^{j-1}, b)$. En décidant d'affecter cette valeur ainsi prédite au point $(2^{j-1}, b)$ lorsque b correspond à un maximum local de

$$b \mapsto \text{CWT}^\psi[s+B](2^j, b)$$

et de ne charger que ces points, on réalise une coupe de l'image temps-échelles au niveau 2^{j-1} différente de celle (illisible car signal et bruit sont indiscernables à ce niveau) qu'induisait le signal bruité.

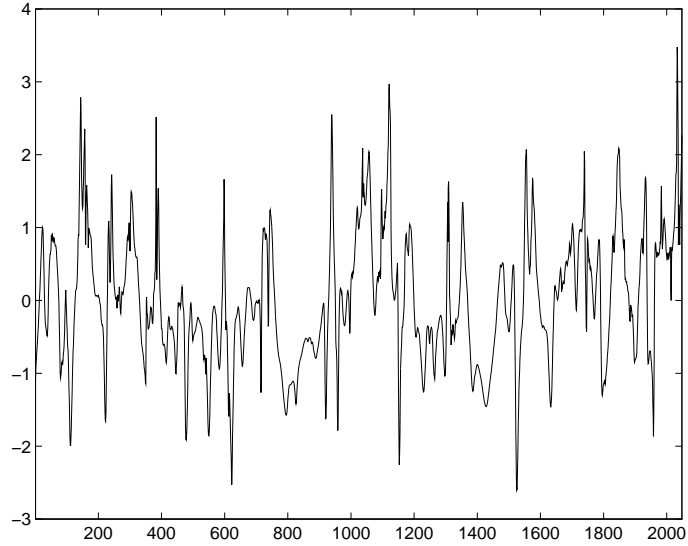
Les algorithmes **gauss2q** et **gauss3q** génèrent cette construction (de manière certes très rudimentaire) et l'on pourra à titre d'exercice s'entraîner à les utiliser (ou à les modifier !) lorsque s est un signal dont la structure dans la hiérarchie des échelles est une structure fractale ; deux modèles intéressants sont les fonctions de type Weierstrass

$$t \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \cos(b^k t), \quad a > 1, b > 0,$$

ou la fonction de Riemann

$$t \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k^2 t)}{k^2},$$

et l'on peut y ajouter un bruit blanc. On combinera également les modifications apportées à l'image temps-échelles (suivant les méthodes de prédiction de niveau

FIG. 3.6 – $s = v_x(t)$, $t = 0 : 1 : 2048$

d'échelle à niveau d'échelle évoquées plus haut) et l'algorithme **icwtg** réalisant l'inversion approchée de la transformée en ondelettes continue (l'ondelette étant toujours une dérivée de l'atome de Gauss) afin de réaliser des versions débruitées du signal original, sans qu'il n'y ait perte totale des singularités éventuelles.

À titre d'exemple, nous avons ajouté un bruit blanc au signal s (dans un rapport bruit/signal égal approximativement à 1/10). Voici sur les figures 3.6 et 3.7 le signal s (signal correspondant à la mesure d'une des composantes en un point de la vitesse dans un écoulement turbulent) et sa version bruitée :

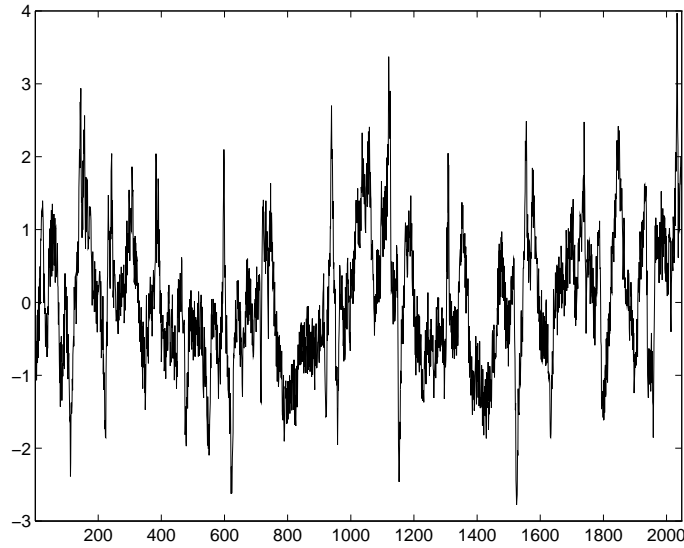
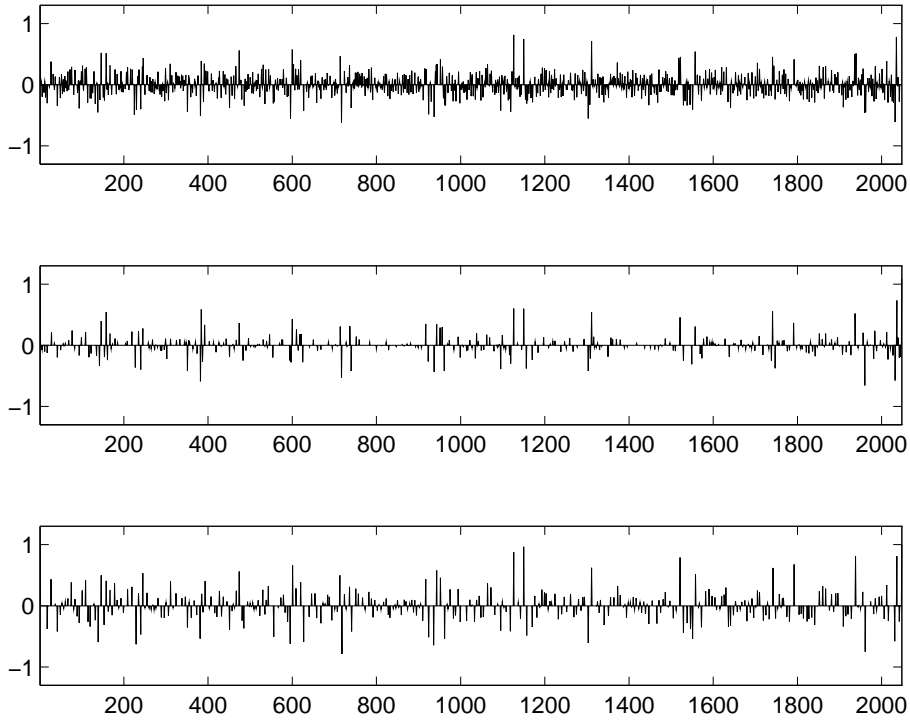
Nous avons ensuite représenté le signal

$$b \mapsto \text{CWT}^{\psi(1;\cdot)}[s + B](b, 1)$$

(en haut de la figure 3.8), puis le signal théorique

$$b \mapsto \text{CWT}^{\psi(1;\cdot)}[s](b, 1),$$

(au milieu de cette même figure 3.8), enfin le signal obtenu au même niveau d'échelle ($a = 1$) en utilisant la méthode ci-dessus (extrapolation des valeurs $\text{CWT}^{\psi(1;\cdot)}[s + B]$ prises dans la gamme d'échelles $[2^1, 2^2]$) implémentée avec l'algorithme **gauss3q**. On voit que certaines singularités du signal deviennent alors décelables. Si q augmente, cet effet se détériore et le bruit reste prépondérant (la convolution avec la dérivée d'ordre q de la gaussienne revient à dériver q fois le bruit, ce qui amplifie son rôle et perturbe notre procédé trop simpliste).

FIG. 3.7 – $s+B$ FIG. 3.8 – restitution du niveau d'échelle 1 de s

3.3.2 Restauration d'un signal depuis les extréma locaux de $|\text{CWT}[s]|$

On peut aussi imaginer un mécanisme de compression (bien sûr avec pertes) d'information ; il est frappant de voir (bien que mathématiquement ceci ne puisse être justifié en général, c'est d'ailleurs faux) que l'on peut assez bien recomposer une information en ne retenant, sur chaque ligne

$$b \mapsto |\text{WT}^\psi(a, b)|$$

que les positions des extréma locaux, puis en interpolant linéairement les valeurs de ces extréma. C'est ce que nous avons fait pour notre signal s en suivant la démarche suivante :

```
>>[A1,A2,A3]=gaussq(s,n_voix,q);
>>A11=interp11(A1);
>>s11=icwtg(A11,q);
```

La comparaison entre s (en plein sur la figure) et sa version ainsi recomposée (en pointillé sur la figure) entre les instants $t = 500$ et $t = 1000$ est mise en évidence sur les figures 3.9 et 3.10 (lorsque ψ est la dérivée première ou la dérivée troisième de la gaussienne).

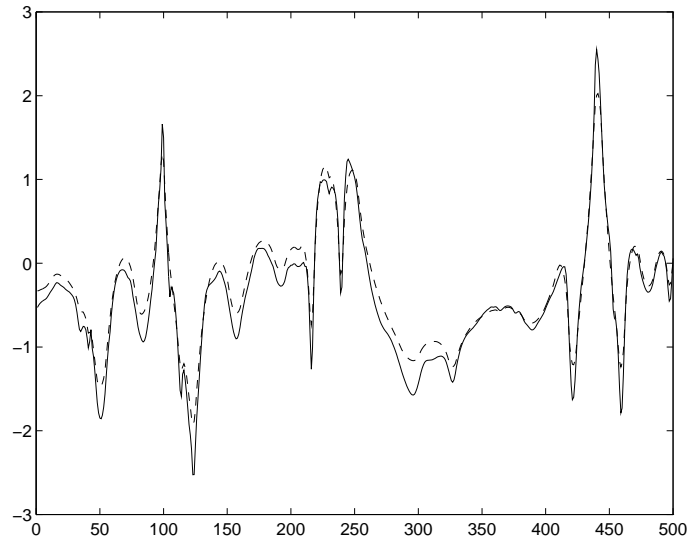


FIG. 3.9 – reconstruction de s à partir des extréma locaux de $|\text{WT}^{[g']}|$

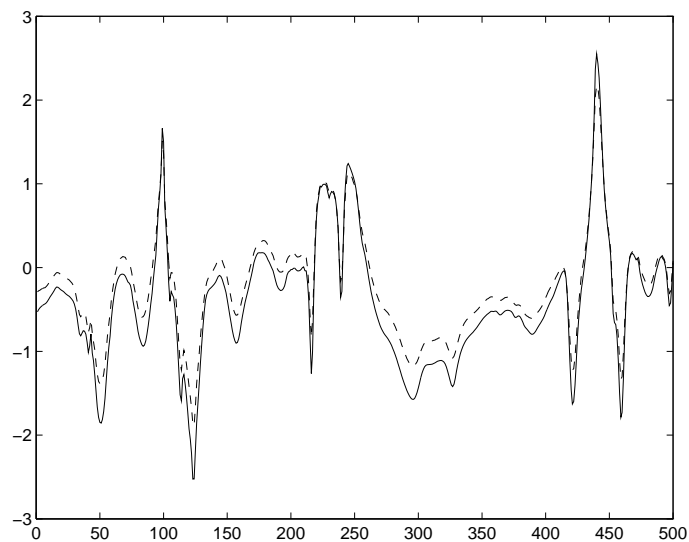


FIG. 3.10 – reconstruction de s à partir des extréma locaux de $|\text{WT}^{[g''']}|$

3.4 La décomposition de Franklin d'un signal digital

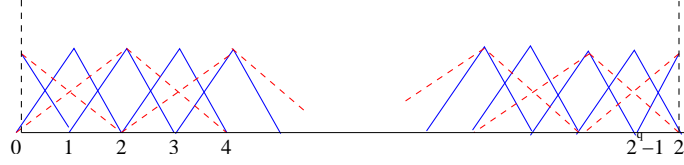


FIG. 3.11 – La base de Franklin

Soit N un entier de la forme 2^q , $q \in \mathbb{N}$. Si l'on considère un signal digital sur $\{0, \dots, N\}$ comme la version discrétisée (aux points $0, \dots, N$) d'un signal affine par morceaux (avec noeuds aux points entiers), on peut penser ce signal digital comme un élément de l'espace $V_{0,N}$ des signaux sur $[0, N]$ qu'engendrent les $N+1$ fonctions spline sur $[0, N]$

$$t \mapsto \Delta_{0,n}(t) := \max(0, 1 - |t - n|), \quad n = 0, \dots, N.$$

On vérifiera que ce que l'on conviendra d'appeler la matrice de Gram de ce système, à savoir la matrice

$$G_{0,N} := [\langle \Delta_{0,n_1}, \Delta_{0,n_2} \rangle]_{0 \leq n_1, n_2 \leq N},$$

est ici la matrice bande

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/6 & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Considérons le sous espace $V_{1,N}$ de $V_{0,N}$ engendré par les signaux affines par morceaux sur $[0, N]$, à noeuds tous les entiers pairs; cet espace est de dimension $2^{q-1} + 1$ et une base de cet espace est donnée par les fonctions spline

$$t \mapsto \Delta_{1,n}(t) := \max(0, 1 - |t/2 - n|), \quad n = 0, \dots, 2^{q-1}.$$

Si $G_{0,N}$ désigne la matrice de Gram de ce nouveau système, la projection $R_0[s]$ du signal digital

$$s = \sum_{n=0}^N s_n \Delta_{0,n}$$

sur $V_{1,N}$ est donnée par

$$R_0[s] := \sum_{n=0}^{2^{q-1}} c_{1,n}(s) \Delta_{1,n},$$

où

$$G_{0,N} \begin{bmatrix} c_{1,0}(s) \\ \vdots \\ c_{1,2^{q-1}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^N s(k) \langle \Delta_{0,k}, \Delta_{1,0} \rangle \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^N s_n \langle \Delta_{0,n}, \Delta_{1,2^{q-1}} \rangle \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons retrouver une expression de $R_1[s]$ dans la base originelle de V_N , c'est à dire visualiser $R_1[s]$ comme un signal digital sur $\{0, \dots, N\}$, en utilisant les relations immédiates

$$\begin{aligned}\Delta_{1,0} &= \Delta_{0,0} + \frac{\Delta_{0,1}}{2} \\ \Delta_{1,n} &= \frac{\Delta_{0,n-1}}{2} + \Delta_{0,n} + \frac{\Delta_{0,n+1}}{2}, n = 1, \dots, 2^{q-1} - 1 \\ \Delta_{1,2^{q-1}} &= \Delta_{0,N} + \frac{\Delta_{0,N-1}}{2}\end{aligned}$$

On obtient ainsi une décomposition orthogonale

$$s = R_0[s] + (s - R_0[s]) = R_0[s] + D_0[s],$$

(“ R ” pour “résumé”, “ D ” pour “détails”). Le signal $R_0[s]$ peut être imaginé comme une version “floue” (ou disons “dégrossie”) du signal digital originel s , tandis que $D_0[s] := s - R_0[s]$ représente le signal correspondant aux détails que le dégrossissage a en quelque sorte gommé. L’algorithme que nous proposons requiert les deux sous-programmes **gram** et **frankaux** et s’exploite sous la forme

$$R_0[s] = \mathbf{franklin}(0, q, s),$$

lorsque s désigne un signal digital sur $\{1, \dots, 2^q + 1\}$.

```
>function f=franklin(1,q,s);
% Ce programme calcule la projection d'un signal digital s
% de taille (1,N=2^q+1), affine par morceaux avec noeuds
% aux points 1+k2^l, k=0,1,..., (l entre 0 et q-1) sur le sous espace
% des signaux de taille (1,N), affines par morceaux avec
% noeuds aux points 1+k2^(l+1), k=0,1,...
% L'algorithme peut etre itere comme suit pour
% realiser une decomposition orthogonale de s en resume-details:
% On part de s, size(s)=(1,2^q+1)
% R1=franklin(0,q,s);
% D1=s-R1;
% R2=franklin(1,q,R1);
% D2=R1-R2;
% R3=franklin(2,q,R2);
% ...
% Rq=franklin(q-1,q,R(q-1));
% les sous-programmes utilises sont gram et frankaux
```

L’algorithme peut s’itérer comme décrit dans le synopsis ci dessus et l’on peut obtenir une décomposition orthogonale

$$s = D_0[s] + D_1[s] + D_2[s] + \dots D_k[s] + R_k[s]$$

lorsque k désigne un entier entre 1 et q . Le programme **plfr** nous permet de visualiser cette décomposition.

```

>function f=plfr(q,s);
% ce programme permet de visualiser, etant donne un signal s,
% de taille (1,2^q+1), avec q>6, le signal s et
% 6 niveaux de details D1,...,D6
% de la decomposition orthogonale de s sur les espaces de fonctions
% affines par morceaux avec noeuds aux points 2l+1,4l+1,...
% ce programme affiche aussi le graphe du resume R6 et par consequent
% la decomposition orthogonale complete s=D1+...+D6+R6

```

Nous avons par exemple affiché sur la figure 3.13 les divers niveaux de détails (et le résumé) du signal digital $s = v_x$ de 2049 points affiché sur la figure 3.12.

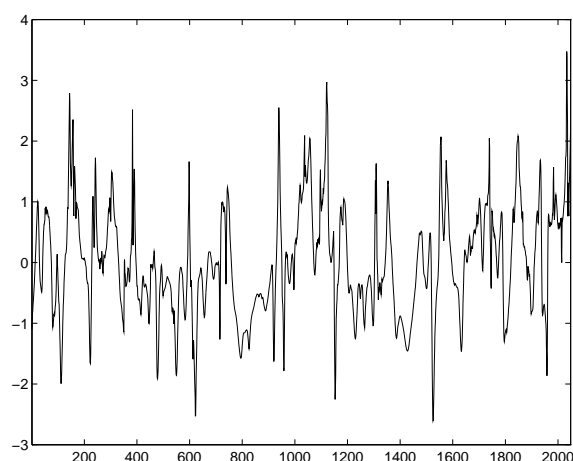


FIG. 3.12 – $s = v_x(t)$, $t = 0 : 1 : 2048$

Cette décomposition est affichée sur la figure ci-dessous :

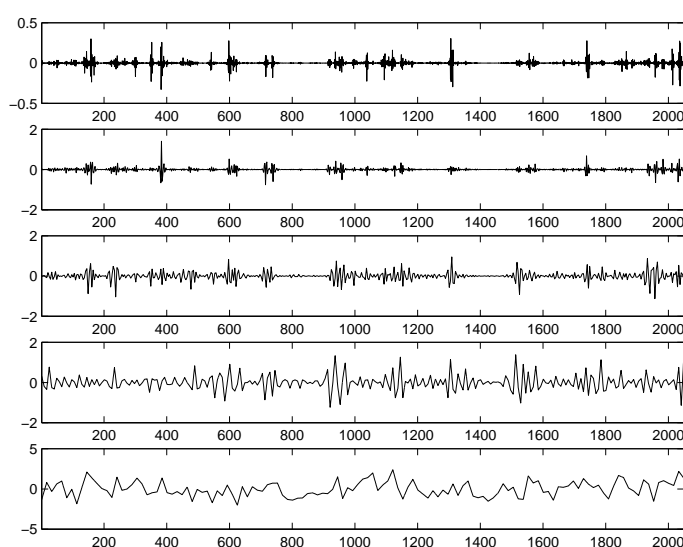


FIG. 3.13 – détails d_0, d_1, d_2, d_3 et résumé r_3 de la décomposition de s

Il est bien sûr possible de remplacer la fonction Δ par une fonction spline d'ordre supérieur et d'envisager une décomposition du type Franklin correspondante.

3.5 La perception “visuelle” d’une information et l’algorithme pyramidal

Toute information physique, qu'elle dépende d'un paramètre (celui du temps, auquel cas on parle de signal) ou de plusieurs (auquel cas on parle d'image) doit être quantifiée de manière digitale aux fins d'être traitée numériquement. Le mécanisme de quantification numérique nécessitant une discrétisation de l'espace des temps ou du support bi-dimensionnel sur lequel se trouve tracée l'image, on a le plus souvent affaire à un mécanisme de “stockage” local d'information en vue d'une moyennisation locale.

Or il se trouve que l'une des phases du mécanisme de la vision rétinienne consiste précisément en cette phase de “stockage” d'informations : se forme au creux de la rétine une image correspondant à une moyennisation locale de l'information.

Mais le mécanisme de la vision se double d'une seconde opération, celle qui consiste en la redistribution (effectuée cette fois au niveau du support cérébral) des moyennes ainsi stockées. Il s'agit là d'une opération tout à fait analogue à celle qui s'effectue au terme de la transmission d'une image prise par un satellite, “compressée” au niveau du satellite de manière à ce que la quantité de données à transmettre soit minimale, puis recomposée sur terre à partir d'une redistribution de ces données. Cet algorithme (car il s'agit bien d'un algorithme) est appelé *algorithme pyramidal*. Le diagramme ci-dessous illustre ce mécanisme :

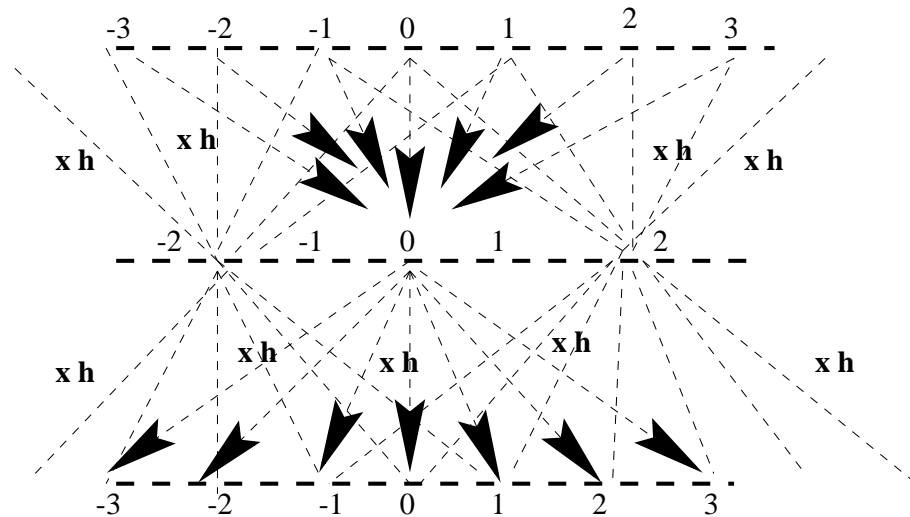


FIG. 3.14 – Le mécanisme de la vision

À chaque cran de l'algorithme pyramidal, la version récomposée à partir de la redistribution de la version stockée apparaît comme une version “brouillée” de l'information. La différence entre cette version brouillée $VB[s]$ et la version originelle s représente les détails que l'oeil perçoit à ce niveau de l'algorithme. Bien sûr, la version moyennisée (celle où la quantité d'information se trouve divisée par deux)

peut être traitée à nouveau et l’on obtient ainsi un nouveau signal correspondant à des détails, mais à un niveau de lecture correspondant à la moitié du niveau de détails obtenu précédemment.

Cette section constitue les prémisses de l’analyse temps-échelles que nous étudierons plus en détail au chapitre suivant. Le filtrage passe-bas (ou “moyennisant”) a pour effet de gommer les composantes du signal dont le module de la pulsation dépasse un seuil de coupure donné, et ce en effectuant ce que l’on pourrait qualifier de procédé de *moyennisation*. Le mécanisme de la vision rétinienne, s’il réalise bien un traitement similaire, l’effectue en la doublant d’un mécanisme de *décimation*. L’information moyennisée est stockée tous les deux noeuds du maillage temporel (elle devient alors un *résumé* du signal), puis redistribuée sur le maillage original pour générer une version brouillée (ou “blurred version”) dont la différence avec le signal de départ constitue les *détails* que le mécanisme de la vision a, de part son fonctionnement, gommé dans un premier temps.

Ce mécanisme est simple à modéliser du point de vue mathématique sur l’espace $l^2(\mathbb{Z})$ des signaux discrets d’énergie finie (la modélisation serait en tout point identique sur l’espace des images discrètes d’énergie finie). On se donne une suite “moyennisante” $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $h(-n) = h(n)$ pour tout n , $h(0) \neq 0$, $h(n) = 0$ si $|n| \geq M$ et deux conditions supplémentaires ; la première est

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) = 1$$

(c’est la condition *sine qua non* pour une suite d’être une suite moyennisante, on verra d’ailleurs plus tard que si l’on pense en termes d’énergie, il est plus judicieux de remplacer 1 par $\sqrt{2}$) ; la seconde est :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h(2n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(2n+1) = \frac{1}{2},$$

ceci signifiant que dans le processus de redistribution, la somme des paramètres de pondération au noeud n du maillage, soit

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(n-2k)$$

est indépendante du noeud. Comme modèle pratique, nous utiliserons dans ce cours à titre d’exemple les suites du type $(h_a(n))_n$, où

$$\begin{cases} h_a(n) = 0, & |n| > 2 \\ h_a(0) = a \\ h_a(1) = h_a(-1) = 1/4 \\ h_a(2) = h_a(-2) = (1-2a)/4 \end{cases}$$

a désignant un paramètre entre 0 et 1. On peut imaginer d’autres suites, l’important étant de respecter les clauses ci-dessus.

L’opérateur qui décime et moyennise peut être considéré comme l’opérateur $R = R^{(h)}$ de $l^2(\mathbb{Z})$ dans $l^2(\mathbb{Z})$

$$R^{(h)} : s = s^{(0)} = (s_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu h(\nu - 2n) \right)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

C'est bien le composé de deux opérateurs, le premier étant un opérateur de convolution discrète avec la suite paire h ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_h : (s_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu h(n - \nu) \right)_{n \in \mathbb{Z}} = \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu h(\nu - n) \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

le second étant l'algorithme de décimation qui consiste à "sauter" un point sur deux en lisant l'information

$$\text{Dec} : (\sigma_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (\sigma_{2n})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Le signal $R[(s_n)_n] = R_1[(s_n)_n] = (s_n^{(1)})_{n \in \mathbb{Z}}$ constitue le *résumé* du signal de départ. Il faut se souvenir que la quantité d'information est divisée par deux et que si l'on implémente cet algorithme comme nous l'avons fait sur l'espace des signaux digitaux de longueur $2^q + 1$, $q \in \mathbb{N}$, nous générons une application

$$R_{(q)}^{(q)} : \mathbf{C}^{2^q+1} \mapsto \mathbf{C}^{2^{q-1}+1}.$$

Nous avons implémenté ce premier algorithme comme suit :

```
>function f=rpyramid(s,a);
%Decimation + filtrage
%avec un filtre
%h(0)=a, h(1)=h(-1)=1/4
%h(2)=h(-2)=1/4-a/2
%h(k)=0 pour abs(k) plus grand que 3.
%pour une entree de longueur 2^q+1,
%l'algorithme genere une sortie
%de longueur 2^(q-1)+1
```

La redistribution des valeurs du résumé sur le maillage temporel original (c'est à dire avant décimation) se fait suivant l'algorithme

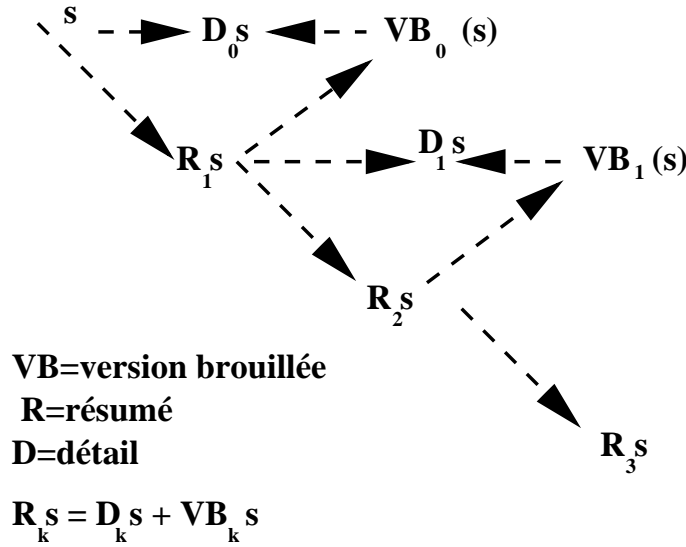
$$R^* : (s_n^{(1)})_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu^{(1)} h(n - 2\nu) \right)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

et l'on vérifie immédiatement que c'est bien l'adjoint de R dont l'action apparaît ici, ce qui justifie la notation utilisée. Cette fois, il faut se souvenir que la quantité d'information est multipliée par deux (car on redistribue le résumé aux noeuds du maillage originel) et que par conséquent, si l'on implémente cet algorithme comme nous l'avons fait sur l'espace des signaux digitaux de longueur $2^q + 1$, $q \in \mathbb{N}$, nous générons une application

$$R_{(q)}^{(h)*} : \mathbf{C}^{2^q+1} \mapsto \mathbf{C}^{2^{q+1}+1}.$$

Nous avons implémenté ce second algorithme comme suit :

```
>function f=dpyramid(s,a);
%phase de redistribution
%pour l'algorithme a pyramide
%avec un filtre
%h(0)=a, h(1)=h(-1)=1/4
%h(2)=h(-2)=1/4-a/2
%h(k)=0 pour abs(k) plus grand que 3.
```

FIG. 3.15 – *Algorithme pyramidal*

```

%(a entre 0 et 1)
%pour une entree de longueur 2^q+1,
%l'algorithme genere une sortie
%de longueur 2^(q+1)+1

```

Au vu du facteur $1/2$ qui apparait comme la norme de l’opérateur de décimation, c’est le signal

$$VB[s^{(0)}] = 2R^* \circ R[s^{(0)}]$$

(ici $s^{(0)}$ désigne la suite $(s_n)_n$ traitée) qu’il faut considérer comme une version brouillée du signal $s = s^{(0)}$ (c’est d’ailleurs $2R_{(q)}^*$ qui se trouve implémenté dans notre programme **rpyramid** ci-dessus). Cette version brouillée est donnée par les formules

$$VB[s^{(0)}]_n = 2 \sum_{\nu_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu_2=-\infty}^{\infty} h(n - 2\nu_1)h(\nu_2 - 2\nu_1)s_{\nu_2}^{(0)}.$$

Les détails qui ont échappé à ce brouillage, sont données comme le signal

$$D_0[s] := s^{(0)} - VB[s^{(0)}].$$

Il est maintenant naturel d’imaginer que cet algorithme puisse être itéré : une fois les détails de la génération 0 (en l’occurrence D_0) isolés, nous pouvons répéter l’analyse au niveau du résumé $R_1[s]$ du signal s , qui devient le signal de départ pour la génération 1. Sur la figure 3.15, nous avons présenté le synopsis de l’algorithme à la génération 0 (et l’on y retrouve la terminologie selon laquelle cet algorithme classique développé par Burt-Adelson mais inspiré des travaux de Marr sur la vision, est appelé *algorithme pyramidal* ou *algorithme à pyramide*). Le mécanisme de reconstruction du signal originel à partir de sa décomposition est donné par les formules récurrentes

$$R_k[s] = D_k[s] + 2R^*[R_{k+1}[s]].$$

Nous verrons dans les sections suivantes que l'opérateur R (pourvu que les paramètres h_n soient bien choisis, ce qui malheureusement nous obligera à des choix impliquant des nombres irrationnels, donc demandant nécessairement à être approchés) peut être couplé avec un opérateur D de prise de détails (au lieu de prise de résumé) de manière à ce que, sur $l^2(\mathbb{Z})$, on ait l'identité (que l'on pourrait qualifier de Bézout) entre opérateurs

$$\text{Id} = R^* \circ R + D^* \circ D;$$

l'opérateur D correspondra à une opération de filtrage combinée avec une opération de décimation, le filtrage s'effectuant cette fois selon un mécanisme accentuant les détails, soit avec un filtre dont les paramètres g_n , $n \in \mathbb{Z}$, satisfont

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n = 0$$

au lieu de

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n = 1$$

qui était la condition imposée aux paramètres du filtre impliqué dans la réalisation de R . De plus, la décomposition de l'information s en $R^*R[s]$ et $D^*D[s]$ sera une décomposition orthogonale (notons que cela peut être un avantage, mais aussi un inconvénient car imposer le découpage en objets orthogonaux fragilise souvent les diverses composantes !)

Nous avons à titre d'exemple décomposé ici le signal

$$t \mapsto s(t) = \sin(40\pi t) + \cos(5.25\pi t(t - 3,75)),$$

le temps variant entre $t = 0$ et $t = 10.24$ avec un pas $\tau = 0.01$; nous avons veillé à ce que la contrainte

$$|\omega_{\text{inst}}| \leq \frac{\pi}{\tau} = 100\pi$$

(condition de Nyquist) soit ici respectée, de manière à ne pas se trouver confronté à des problèmes de sous-échantillonnage. Le signal est représenté sur la figure 3.16 (en haut) est représentée sur la partie inférieure de cette même figure.

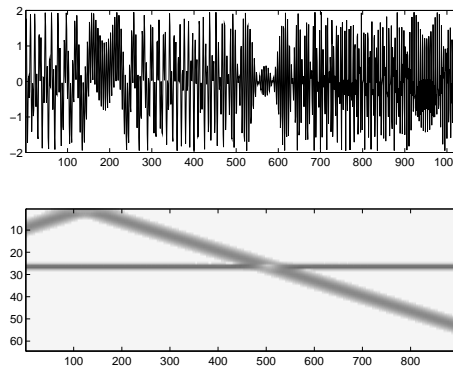
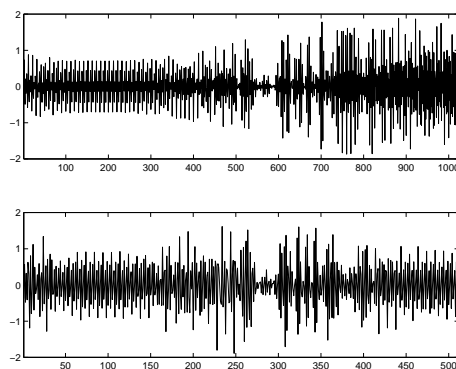
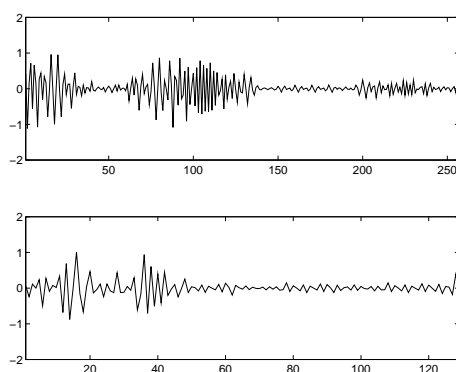
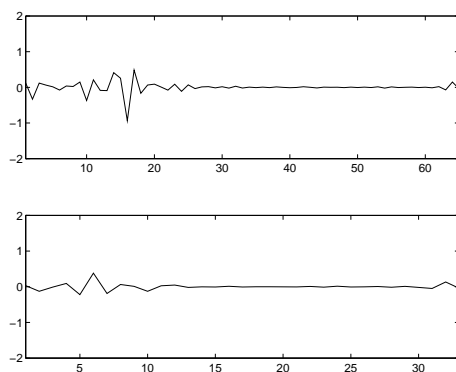


FIG. 3.16 – le signal traité et son image temps-fréquences

Les différents détails $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ de la décomposition via l'algorithme pyramidal avec $h = h_a$ et $a = 0, 6$ sont représentés sur les figures 3.17, 3.18, 3.19.

FIG. 3.17 – d_1, d_2 FIG. 3.18 – d_3, d_4 FIG. 3.19 – d_5, d_6

On voit que la composante stationnaire du signal (ici $t \mapsto \sin(40\pi t)$) passe dans les détails d_1 et d_2 (avec les hautes fréquences du “chirp” $t \mapsto \cos(5.25\pi t(t - 3.75))$) tandis que l’évolution vers les basses-fréquences de ce même “chirp” cette fois isolé se lit sur la suite des détails d_3 à d_6 .

3.6 Le concept d'analyse multi-résolution

3.6.1 L'instrument d'analyse

La promenade dans les échelles aux fins de l'analyse évoquée au paragraphe 3.1 se trouve modélisée dans le cadre discret (et non plus continu) par la notion d'*analyse multi-résolution dyadique*, introduit par Stéphane Mallat il y a une dizaine d'années, et dont nous allons fixer le cadre.

Une analyse multi-résolution pour $L^2(\mathbb{R})$ est une suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés

$$\cdots \subset V_k \subset V_{k-1} \subset \cdots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \cdots$$

emboîtés, d'intersection réduite à $\{0\}$ et d'union dense, dont la hiérarchie se trouve régie par la règle de promenade dans les échelles

$$s \in V_j \iff s(2(\cdot)) \in V_{j-1}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

On exige de plus qu'il existe une fonction père φ dans V_0 dont tous les translatés

$$t \mapsto \varphi_n(t) := \tau_n[\varphi](t) = \varphi(t - n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

constituent une base orthonormée de V_0 (pour le produit scalaire usuel de $L^2(\mathbb{R})$) ; c'est là l'exigence cruciale, la fonction φ conditionnant toute la construction (même si φ , comme la fonction ψ qui lui est associée, on verra plus loin comment, n'apparaît du point de vue pratique qu'en filigramme du traitement correspondant de l'information digitale.

La promenade dans les échelles implique qu'aller vers la droite (vers les V_j lorsque j tend vers $-\infty$) correspond à une excursion vers le domaine des petites échelles (l'exploration "à la loupe" de l'information) tandis qu'aller vers la gauche (vers les V_j lorsque j tend vers $+\infty$) correspond à une excursion vers le domaine des grandes échelles (l'exploration "à la loupe retournée" de l'information).

Lorsque l'on traitera une information digitale suivant une analyse multi-résolution, celle-ci sera implicite, au sens où elle sera invisible dans la démarche de décomposition (mais de fait constamment présente). Changer d'analyse nous fera changer de décomposition.

L'information digitale $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est en fait traitée comme l'élément de V_0 défini (presque partout puisque les objets sont dans $L^2(\mathbb{R})$) par

$$s(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n \varphi(t - n).$$

Pour que ceci soit cohérent du point de vue pratique, on est amené à exiger de la fonction φ qu'elle soit bien localisée autour du segment "de base" $[0, 1]$.

Voici trois exemples importants ; le dernier (analyse multi-résolution de Franklin) est proche de l'outil de décomposition orthogonale de l'information que nous avons introduit au chapitre 2 (décomposition de Franklin).

- *L'analyse multi-résolution de Haar*. C'est historiquement la plus ancienne (et aussi la plus simple) ; le sous-espace V_0 est le sous espace des signaux d'énergie finie, en escalier et à pas entiers, c'est à dire

$$V_0^{\text{haar}} := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \tau_n[\chi_{[0,1]}]; \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Le père en est le signal $\chi_{[0,1]}$.

- *L'analyse multi-résolution de Shannon.* C'est le pendant de celle de Haar, mais transposée de l'espace des temps à l'espace des fréquences. On a en effet

$$V_0^{\text{shan}} := \{s \in L^2(\mathbb{R}); \hat{s} = 0 \text{ p.p. hors de } [-\pi, \pi]\}.$$

Le père en est le signal dont le spectre est la fonction caractéristique de $[-\pi, \pi]$, soit le signal

$$\varphi : t \mapsto \text{sinc}(\pi t) := \frac{\sin(\pi t)}{\pi t},$$

puisque

$$\lim_{L^2} \left[\int_{-N}^N \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} e^{-i(\cdot)t} dt \right] = \chi_{[-\pi, +\pi]}.$$

- *L'analyse multi-résolution de Franklin.* Le sous-espace V_0 qui génère cette dernière analyse est constitué des signaux d'énergie finie, affines par morceaux, avec noeuds au points de \mathbb{Z} , soit encore

$$V_0^{\text{frank}} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \Delta(t - n); \sum_{l \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\},$$

où Δ est le signal défini par

$$\Delta(t) := \max(0, 1 - |t|).$$

Notons que si $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un signal digital, le signal continu

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n \Delta(t - n)$$

est celui que l'on "visualise" sur l'écran de l'ordinateur (la machine interpole linéairement au niveau du rendu visuel). Maleureusement ici Δ n'est pas une fonction père, car il y a redondance entre Δ , $\Delta(\cdot - 1)$, $\Delta(\cdot + 1)$. Il faut travailler un peu plus pour trouver un père pour l'analyse multi-résolution générée par le sous-espace V_0^{frank} . Le spectre du signal Δ est donné par

$$\hat{\Delta}(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right)^2, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

comme on le vérifie par un calcul immédiat. Comme la fonction continue périodique

$$\omega \mapsto \Psi(\omega) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\Delta}(\omega + 2n\pi)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2} + n\pi} \right)^4$$

ne s'annule pas sur \mathbb{R} , elle est encadrée par deux constantes strictement positives c et C . Il est d'ailleurs possible de calculer aisément le père de l'analyse multi-résolution de Franklin; en effet, la formule de Plancherel nous donne

$$\Psi(\omega) = \int_0^1 |\Delta(t) + e^{i\omega} \Delta(t - 1)|^2 dt = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{\cos \omega}{2} \right).$$

Par conséquent, le père φ de l'analyse multi-résolution de Franklin est donné via son spectre par

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sqrt{\frac{3}{2 + \cos \omega}} \hat{\Delta}(\omega) = \sqrt{\frac{3}{2 + \cos \omega}} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right)^2, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

On pourrait d'ailleurs construire sur ce modèle d'analyse-multirésolution un modèle plus général où V_0 serait l'espace des signaux d'énergie finie qui sont des m -splines ($m = 0, 1, \dots$). Ce sont les analyses multi-résolution de fonctions spline. L'analyse multi-résolution de Franklin n'est bien sûr pas sans rapport avec la décomposition de Franklin introduite dans la section 3.4.

3.6.2 De l'information à son "résumé".

La donnée d'une analyse-multirésolution génère à chaque niveau d'échelle $j \in \mathbb{Z}$, une décomposition orthogonale de l'espace V_j sous la forme

$$V_j = V_{j+1} \overset{\perp}{\oplus} W_{j+1},$$

où W_{j+1} est par définition l'orthogonal du sous-espace fermé V_{j+1} (considéré comme sous-espace de V_j) dans V_j , et avec elle une paire d'opérateurs Rés_{*j*}, Dét_{*j*} (Rés pour "Résumé", Dét pour "Détails", l'indice nous rappelant le niveau d'échelle auquel on se place), où

$$\text{Rés}_j : V_j \mapsto V_{j+1}$$

est la projection orthogonale de V_j sur V_{j+1} et

$$\text{Dét}_j : V_j \mapsto W_{j+1}$$

est la projection orthogonale de V_j sur W_{j+1} .

Ce que l'on voit immédiatement est que, du fait que l'intersection des V_j se réduit au signal nul presque partout alors que l'union est, elle, dense, ce découpage en " tiroirs " de chaque V_j nous permet d'affirmer, suite à un argument basé sur l'aspect "télescopique" du découpage, que

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (V_{j+1} \overset{\perp}{\oplus} W_{j+1})} = \overset{\perp}{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j}$$

Ainsi, tout signal de $L^2(\mathbb{R})$ se décompose sous la forme

$$s = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \text{pr}_{W_j}[s]$$

("pr" pour "projection orthogonale"); en particulier notre signal continu

$$s = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n \varphi(\cdot - n)$$

que nous avons de force décidé d'associer à notre signal digital $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ se décompose lui, en tant qu'élément de V_0 , sous la forme

$$s = \sum_{j=1}^N \text{pr}_{W_j}[s] + \text{pr}_{V_N}[s],$$

lorsque N est un entier supérieur ou égal à 1.

Étant donné un signal dans l'espace V_j , décrivons plus soigneusement ce qu'est l'action de cet opérateur de "prise de Résumé" qu'est Rés_{*j*}.

Remarquons d'abord que l'on dispose d'une base orthonormée pour "disséquer" l'information contenue dans un signal à l'échelle j ; en effet, le fait que $(\varphi((\cdot) - n))_{n \in \mathbb{Z}}$ constitue une base orthonormée de V_0 et que les V_j se déduisent les uns des autres par jeu de la promenade dans les échelles implique que la famille des fonctions $(\varphi_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}$, où

$$\varphi_{j,n}(t) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

est une base orthonormée de V_j ; notons que, si le père de l'analyse φ est à peu près localisé autour de $[0, 1]$, le signal $\varphi_{j,n}$ est, lui, localisé autour de $[n, n + 2^j]$, version dilatée (ou contractée) suivant que $j > 0$ ou $j < 0$, puis translatée, de $[0, 1]$.

Comme le père φ de l'analyse est dans V_0 , sa version dilatée $\varphi_{1,0}$ est dans V_1 , donc aussi dans V_0 ; on a donc

$$\varphi_{1,0} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(t - n)$$

pour une certaine suite $(h_n)_n$ dans $l^2(\mathbb{Z})$; en prenant les transformées de Fourier, on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t/2) e^{-i\omega t} dt = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2i\omega t} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-it\omega} dt,$$

soit

$$\widehat{\varphi}(2\omega) = m_0(\omega) \varphi(\omega),$$

où $m_0 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ (ce qui signifie qu'il s'agit d'une fonction définie presque partout sur \mathbb{R} , 2π -périodique, et d'énergie finie sur $[0, 2\pi]$) est définie par

$$m_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{-in(\cdot)};$$

le fait que le système $(\varphi(\cdot) - n)_{n \in \mathbb{Z}}$ soit orthonormé rejaillit en l'identité

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 \equiv 1, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

qui elle-même implique

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 \equiv 1, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

(on perçoit la rigidité des contraintes ; pareille identité est impossible à réaliser avec une fonction 2π -périodique m_0 arbitraire).

Tout ceci étant posé, un petit calcul simple nous permet de vérifier la proposition suivante, permettant le calcul des coordonnées du résumé de s (dans la base $(\varphi_{j+1,n})_{n \in \mathbb{Z}}$) en fonction des coordonnées de s (dans la base $(\varphi_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}$) lorsque $s \in V_j$. Voici le résultat :

Proposition 3.2 *L'image du signal*

$$s = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n^{(j)} \varphi_{j,n}$$

de V_j par l'opérateur de projection orthogonale Rés_j est le signal

$$\text{Rés}_j[s] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n^{(j+1)} \varphi_{j+1,n},$$

où

$$s_n^{(j+1)} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu^{(j)} \overline{h(\nu - 2n)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\dagger)$$

Remarque 3.1 Avant de faire le petit calcul, une remarque s'impose; si s est le signal de V_0 correspondant à notre signal digital $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de référence, la suite $s_n^{(0)} = s_n$ se lit à l'échelle initiale (ici $j = 0$) où se trouve donnée l'information; en revanche, si l'on envisage au niveau du signal $\text{Rés}[s] \in V_1$ le retour au "digital", il ne faut pas perdre de vue que ce nouveau signal est à lire à l'échelle 1 (il y a eu décimation de l'information); ceci se reflète d'ailleurs dans la présence du $2n$ au membre de droite des formules donnant les coefficients

$$s_n^{(1)} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu \overline{h(\nu - 2n)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Si l'on part d'un signal de 2048 points, le signal digital induit par la suite des coefficients de la projection sur V_1 est un signal digital de 1024 points; si l'on veut le représenter sur la même figure que le signal digital $(s_n)_n$ il faut en dilater par deux (dans le sens des abscisses) son graphe.

Preuve de la proposition. Elle se résume à la linéarité de l'opérateur Rés_j et au fait que

$$\begin{aligned} \text{Rés}_j[\varphi_{j,n}] &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j,n}, \varphi_{j+1,\nu} \rangle \varphi_{j+1,\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi_{j,n}}(\omega) \overline{\widehat{\varphi_{j+1,\nu}}(\omega)} d\omega \right) \varphi_{j+1,\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\omega) \overline{\widehat{\varphi}(2\omega)} e^{-i(l-2\nu)\omega} d\omega \right) \varphi_{j+1,\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 \overline{m_0(\omega)} e^{-i(n-2\nu)\omega} d\omega \right) \varphi_{j+1,\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^{2\pi} \overline{m_0(\omega)} e^{-i(n-2\nu)\omega} d\omega \right) \varphi_{j+1,\nu} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \overline{h(n - 2\nu)} \varphi_{j+1,\nu}. \end{aligned}$$

Les formules (\dagger) en résultent. \diamond

Comme il est impossible que $\widehat{\varphi}(0) = 0$, on a $m_0(0) = 1$ et par conséquent

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} h(l) = \sqrt{2},$$

ce qui nous autorise à considérer le filtre de réponse impulsionnelle $(h(-n))_{n \in \mathbb{Z}}$ comme un *filtre passe-bas*; l'action de l'opérateur Rés_j se traduit par la composition de l'action de ce filtre passe-bas avec une opération de décimation; c'est une prise de résumé de l'information. La phase "redistribution du résumé $\text{Rés}_j[s]$ dans l'échelle originelle j " correspond, quant à elle, à l'expression de

$$\text{Rés}_j[s] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n^{(j+1)} \varphi_{j+1,n}$$

(élément de $V_{j+1} \subset V_j$) dans la base orthonormée $(\varphi_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}$, soit encore

$$\text{Rés}_j[s] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{s}_n^{(j)} \varphi_{j,n},$$

où

$$\tilde{s}_n^{(j)} = \sum_{\nu_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu_2 \in \mathbb{Z}} s_{\nu_2}^{(j)} \overline{h(\nu_2 - 2\nu_1)} h(n - 2\nu_1), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\dagger\dagger)$$

Si les formules (\dagger) s'écrivent de manière condensée

$$(s_n^{(j+1)})_n = R_j[(s_n^{(j)})_n]$$

(R_j correspondant au niveau discret à une opération filtrage+décimation), les formules $(\dagger\dagger)$ s'écrivent, quant à elles,

$$(\tilde{s}_n^{(j)})_l = R_j^* R_j[(s_n^{(j)})_n].$$

L'opérateur $R_j^* R_j$, considéré comme un opérateur sur l'espace des signaux discrets d'énergie finie, n'est pas un filtre (car il n'a pas la propriété d'invariance par le shift). Néanmoins, de part son rôle consistant à isoler de la suite discrète correspondant à un signal de V_j les structures cohérentes organisées selon l'échelle "double" $j + 1$, on qualifie un tel opérateur de *pseudo-filtre passe-bas*.

3.6.3 La mère de l'analyse multi-résolution

Si l'on définit la fonction m_1 à partir de m_0 comme

$$m_1(\omega) := e^{-i(\omega+\pi)} \overline{m_0(\omega + \pi)},$$

alors la matrice

$$\begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) \\ m_0(\omega + \pi) & m_1(\omega + \pi) \end{pmatrix}$$

est, pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}$, une matrice orthogonale ; il en résulte que, si ψ est le signal de V_{-1} lié au père φ par la formule

$$\hat{\psi}(2\omega) = m_1(\omega) \hat{\varphi}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

alors non seulement ψ est en fait dans W_0 , mais encore la collection $(\psi((\cdot) - n))_{n \in \mathbb{Z}}$ constitue une base orthonormée de W_0 .

Cette fonction ψ , intimement liée à φ comme on vient de le voir, est appelée "mère" de l'analyse, ou encore "ondelette mère".

On peut par exemple la calculer dans les trois exemples (Haar, Shannon, Franklin) que nous avons proposé comme modèle d'analyse multi-résolution. On trouve :

$$\begin{aligned} \psi^{\text{haar}}(t) &= \chi_{[0,1/2]}(t) - \chi_{[1/2,1]}(t) \\ \psi^{\text{shan}}(t) &= -\cos\left(\frac{3\pi}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) \text{sinc} \frac{\pi(t - \frac{1}{2})}{2} \\ \widehat{\psi^{\text{frank}}} &= -\sqrt{3} e^{-i\omega/2} \sqrt{\frac{2 - \cos(\omega/2)}{(2 + \cos \omega)(2 + \cos(\omega/2))}} (\text{sinc}(\omega/4))^2. \end{aligned}$$

Notons d'ailleurs que la connaissance de la fonction m_0 suffit à générer tout l'outillage de l'analyse (elle induit la construction du père et de la mère, donc celle de V_0) via les formules :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\omega) &= m_0(\omega/2) \hat{\varphi}(\omega/2) = \cdots = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega) \\ \hat{\psi}(\omega) &= e^{-i(\omega+\pi)/2} m_0((\omega + \pi)/2) \prod_{j=2}^{+\infty} m_0(2^{-j}\omega). \end{aligned}$$

La contrainte sur m_0 fait que N étant un entier fixé, il existe un et un seul polynôme trigonométrique $m_0^{(N)}$ satisfaisant à la fois $m_0^{(N)}$ tel que

$$m_0^{(N)}(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N (1 + \gamma_{N,1} e^{-i\omega} + \cdots + \gamma_{N,N-1} e^{-i(N-1)\omega}).$$

Les programmes **daub4** **daub8** auxquels nous ferons appel par la suite pour illustrer la décomposition temps-échelles impliquent les analyses multi-résolution générées respectivement par les polynômes trigonométriques $m_{0,2}$ et $m_{0,4}$.

Le rôle de la mère est capital puisque, pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, le système constitué des fonctions $(\psi_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}$, où

$$\psi_{j,n}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - n),$$

forme une base orthonormée de W_j ; ceci implique, puisque la somme orthogonale des W_j a pour adhérence l'espace $L^2(\mathbb{R})$ tout entier, que la collection des vagues obtenues à partir du motif ψ en le dilatant ou le contractant de manière dyadique, puis le translatant via les entiers, c'est-à-dire la collection

$$(\psi_{j,n})_{j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}},$$

constitue une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$; tout signal de cet espace se décompose comme suit :

$$s = \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} \langle s, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n},$$

où

$$\langle s, \psi_{j,n} \rangle := \int_{\mathbb{R}} s(t) \overline{\psi_{j,n}(t)} dt, \quad j, n \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, notre signal

$$s = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n \varphi(t - n)$$

attaché à notre information digitale $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ se décompose sous la forme

$$s = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle s, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n} \right).$$

Ce sont les diverses suites

$$(\langle s, \psi_{j,n} \rangle)_n,$$

pour $j = 1, \dots, +\infty$ (notons que si l'on revient au point de vue digital, ces suites représentent une information à lire respectivement à l'échelle $0, 1, \dots$, c'est-à-dire correspondent à des suites indexées respectivement par $\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, \dots$) que nous allons calculer à partir de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dans la section suivante, ce qui induira ce que l'on appellera la décomposition en ondelettes discrètes du signal digital $(s_n)_n$ suivant l'analyse multi-résolution (c'est-à-dire en fait la fonction m_0) que l'on s'est fixé.

3.6.4 De l'information à ses détails

La construction même de m_1 à partir de m_0 fait que cette fois $m_1(0) = 0$ et que

$$m_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) e^{-in\omega},$$

avec

$$g(n) = (-1)^n \overline{h(1-n)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Le calcul de la projection sur W_{j+1} d'un signal appartenant à V_j se fait alors suivant les règles suivantes :

Proposition 3.3 *L'image du signal*

$$s = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n^{(j)} \varphi_{j,n}$$

de V_j par l'opérateur de projection orthogonale Dét_j est le signal

$$\text{Dét}_j[s] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^{(j+1)} \psi_{j+1,n},$$

où

$$d_n^{(j+1)} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu^{(j)} \overline{g(\nu - 2n)} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (-1)^\nu s_\nu^{(j)} h(2n + 1 - \nu), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (*)$$

Preuve. Elle se résume à la linéarité de l'opérateur Dét_j et au fait que

$$\begin{aligned} \text{Dét}_j[\varphi_{j,n}] &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j,n}, \psi_{j+1,\nu} \rangle \psi_{j+1,\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi_{j,n}}(\omega) \overline{\widehat{\psi_{j+1,\nu}}(\omega)} d\omega \right) \psi_{j+1,\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(2\omega)} e^{-i(l-2\nu)\omega} d\omega \right) \psi_{j+1,\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 m_1(\omega) e^{-i(l-2\nu)\omega} d\omega \right) \psi_{j+1,\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^{2\pi} m_1(\omega) e^{-i(l-2\nu)\omega} d\omega \right) \psi_{j+1,\nu} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \overline{g(n - 2\nu)} \varphi_{j+1,\nu}. \end{aligned}$$

Les formules (*) en résultent. \diamond

L'action de l'opérateur Dét_j , comme celle de l'action de l'opérateur Rés_j , se traduit, au niveau des suites de coefficients qui représentent les coordonnées de l'entrée (exprimée dans la base $(\varphi_{j,n})_n$ de V_j et de la sortie (exprimée dans la base $(\psi_{j+1,n})_n$), par un filtrage (cette fois *passé-haut*), suivi d'une décimation. Si

$$s = \sum_{l \in \mathbb{Z}} s_l^{(j)} \varphi_{j,l},$$

on voit que

$$\text{Dét}_j[s] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{d}_n^{(j)} \varphi_{j,n},$$

où

$$\tilde{d}_n^{(j)} = \sum_{\nu_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu_2 \in \mathbb{Z}} c_{\nu_2}^{(j)} \overline{g(\nu_2 - 2\nu_1)} g(n - 2\nu_1), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (**)$$

Si les formules (*) s'écrivent de manière condensée

$$(d_n^{(j+1)})_l = D_j[(s_n^{(j)})_n],$$

les formules (**) s'écrivent, quant à elles

$$(\tilde{d}_n^{(j)})_l = D_j^* D_j[(c_n^{(j)})_n],$$

et les deux opérateurs $R_j^* R_j$ et $D_j^* D_j$ de V_j dans V_j (correspondant, si l'on rapporte V_j à sa base hilbertienne $(\varphi_{j,n})_n$, aux opérateurs de projection orthogonale Rés_{*j*} et Dét_{*j*}) sont appelés pseudo-filtres miroirs en quadrature au seuil d'échelle *j* de l'analyse multi-résolution. On a de plus l'identité

$$\text{Id}_{V_j} = R_j^* R_j + D_j^* D_j.$$

Étant donné un signal de référence *s* supposé dans V_0 , on peut ainsi le décomposer sous la forme résumés+détails, et ce de manière orthogonale et itérative, suivant le mécanisme

$$s = R_0^* R_0[s] + D_0^* D_0[s] = R_1^* R_1 R_0^* R_0[s] + D_1^* D_1 R_0^* R_0[s] + D_0^* D_0[s] = \dots$$

Le signal *s* était ici identifié au signal digital fourni par la liste $(s_n)_n$ de ses coordonnées dans la base $(\varphi_{0,n})_n$.

3.6.5 La décomposition traitée sur un exemple

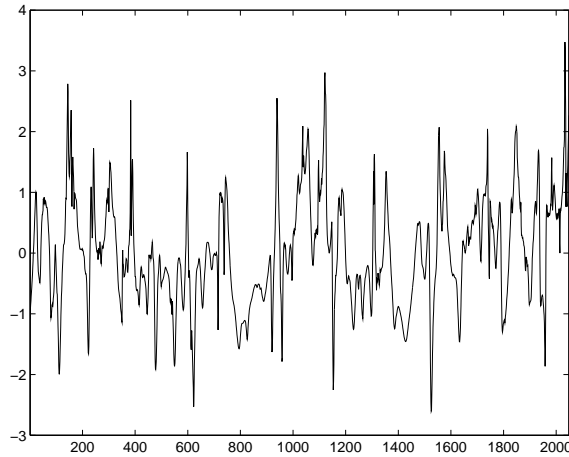


FIG. 3.20 – $s = v_x(t)$, $t = 0 : 1 : 2048$

On va traiter le signal digital de $2048 = 2^N$, $N = 11$, points représenté sur la figure 3.14 suivant les analyses multi-résolution correspondant respectivement aux fonctions $m_0^{(2)}$ et $m_0^{(4)}$; on affichera, pour $j = 1, 2, \dots$, les suites $(d_n^{(j)})_n$ des coordonnées (dans la base $(\psi_{j,n})_n$) des projections sur W_j , $j = 1, 2, \dots$, du signal

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n \varphi(t - n)$$

extrapolant l'information digitale $(s_n)_n$; pour j donné, la suite numérique $(d_n^{(j)})_n$ obtenue est en fait une suite de longueur 2^{N-j} , d'où la nécessité de la représenter à l'aide de “fonctions créneau” de pas 2^j si l'on prétend visualiser ces diverses suites sur une même figure, ce que nous avons fait pour notre exemple.

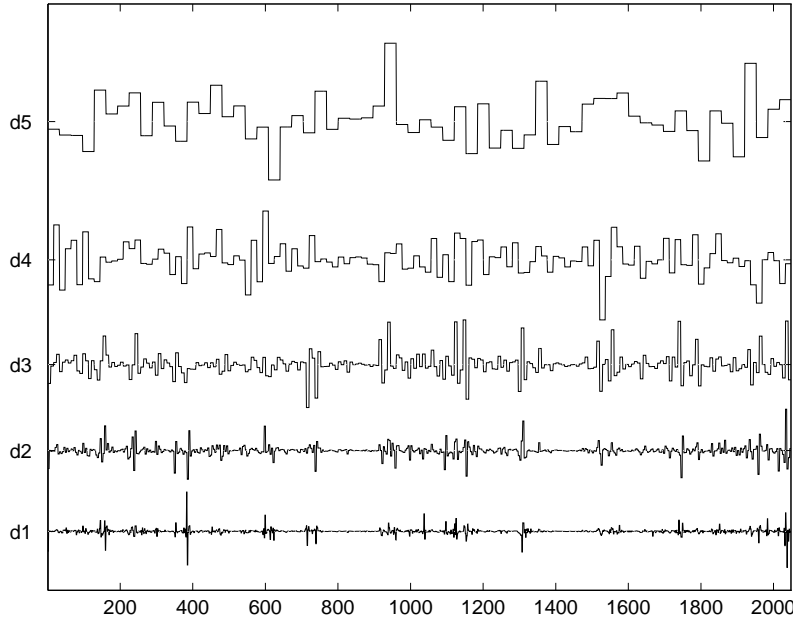


FIG. 3.21 – analyse de s en ondelettes discrète, $\text{AMR-}m_0^{(2)}$

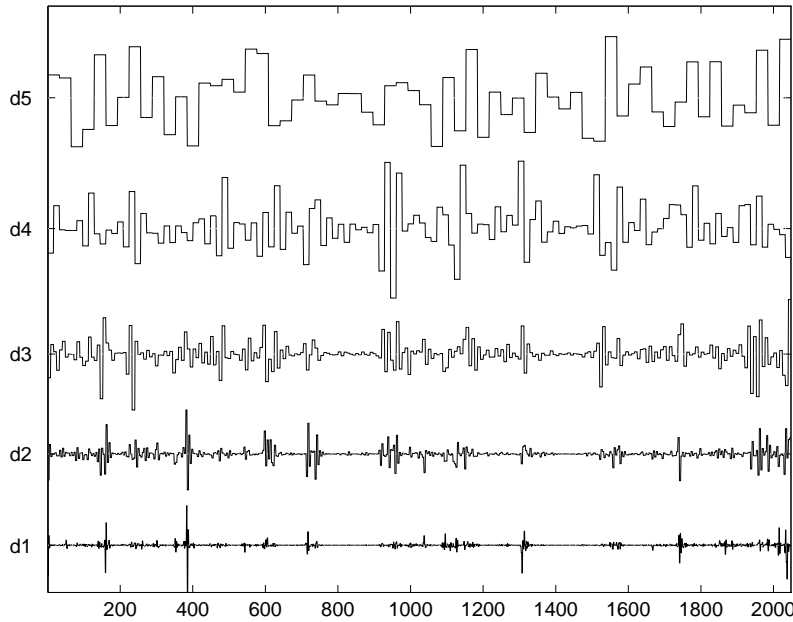


FIG. 3.22 – analyse de s en ondelettes discrète, $\text{AMR-}m_0^{(4)}$

Même si certaines informations relatives au contenu temps-échelles du signal se recoupent au niveau des résultats obtenus dans les deux analyses, on voit que ceux-ci sont sensiblement différents. La localisation d'un “accident” du signal à une certaine

échelle dans la gamme des détails étudié peut s'avérer différente d'une analyse à l'autre (on peut observer la migration de certains coefficients d'ondelette significatifs d'un niveau d'échelle dyadique vers un autre par exemple).

On remarque que, même si elles présentent des analogies évidentes, les suites de coefficients obtenues dans ces deux analyses ne sont pas les mêmes ; il est souvent utile de profiter d'un éventail large d'analyses multi-résolution distinctes pour avoir la confirmation de la présence d'un "événement" relevant de l'analyse temps-échelles dans un signal. Souvent, certaines analyses multi-résolution se révèlent plus exploitables que d'autres face à une classe de signaux donnée (par exemple, pour les signaux correspondant à des enregistrements de secousses sismiques, les analyses multi-résolution du type Franklin ou Spline se révèlent plus intéressantes).

3.6.6 Les deux écueils de l'analyse multi-résolution

L'idée de l'analyse résolution et de proposer, pour un espace de référence V_0 , deux bases orthonormées :

- celle $(\varphi(t - n))_{n \in \mathbb{Z}}$, où φ est le père de l'analyse, dans laquelle on visualise l'information digitale $(s(n))_n$, en décidant de traiter cette information digitale comme l'information continue

$$t \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n) \varphi(t - n);$$

- la base $(2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - n))_{j > 0, n \in \mathbb{Z}}$ dans laquelle la lecture temps-échelles se trouve mise en évidence.

La seconde base peut se révéler plus intéressante que l'autre, au sens où l'indicateur du chaos qu'est l'entropie (on y reviendra) peut être significativement plus petite si calculée dans la seconde base plutôt que dans la première (l'information peut se révéler mieux concentrée en seulement quelques coefficients significatifs, au lieu d'être diffuse et répartie sur beaucoup de coefficients sensiblement de même taille). Cette base peut se révéler aussi intéressante si on l'exploite comme une base d'éléments finis pour exprimer la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles (la matrice du système dans cette base peut se révéler beaucoup mieux conditionnée dans une telle base que dans une base d'éléments finis classique ou dans la base des harmoniques obtenue en transformant le système d'équations par une transformation de Fourier totale ou partielle).

Mais il y a au moins deux défauts ou lacunes :

- La seconde base est la seule autre base proposée et elle ne met en évidence que la structure temps-échelles de l'information (le paramètre "fréquentiel", pourtant significatif car l'aspect oscillant des atomes est souvent tout aussi important que leur localisation temps-échelles, se trouve ignoré). En fait, on décompose toujours les résumés et jamais les détails : projeter $\text{pr}_{W_j}[s]$ sur V_{j+1} donnerait bien sur 0 car W_j est orthogonal à V_j donc à V_{j+1} !
- La liste des coefficients d'ondelette est donnée d'un coup (ceci vaut encore plus pour l'analyse temps-échelles continue) et l'image peut être confuse à analyser.

Au chapitre 4, nous verrons comment pallier partiellement le premier défaut en introduisant l'analyse en paquets d'ondelettes au lieu de l'analyse en ondelettes.

Dans la section 3.6 ci-dessous, nous allons indiquer comment pallier au premier défaut.

3.7 Le matching pursuit

L'orthogonalité reste une notion idéaliste, relevant plus du modèle mathématique idéal que de sa réalisation concrète ; la *redondance* (ou non-orthogonalité) est une caractéristique majeure de la plupart des décompositions atomiques significatives des signaux ou informations (les signaux de parole en sont un bon exemple). C'est pourquoi l'analyse des signaux, des images, ou des informations (et ultérieurement leur traitement) se trouve souvent confrontée au problème suivant : étant donné un signal s d'un espace de Hilbert et un dictionnaire \mathbf{D} de signaux de référence (correspondant de fait aux modèles que l'on espère pister dans la décomposition du signal s), retrouver, en respectant les poids de leurs contributions respectives, les divers atomes d du dictionnaire susceptibles de jouer un rôle significatif dans une décomposition de s , en même temps que les coefficients $\alpha_d(s)$ dont ils sont affectés, soit effectuer l'analyse

$$s \simeq \sum_{d \in \mathbf{D}} \alpha_d(s) d.$$

Bien sûr, une telle décomposition ne saurait être unique que si le dictionnaire \mathbf{D} est un système libre ; quand bien même cette hypothèse serait satisfaite, il n'y a aucune raison, si l'espace de Hilbert n'est pas de dimension finie, pour que l'on soit certain de disposer d'une unique représentation comme ci-dessus. Cependant, l'algorithme que nous allons introduire, et qui conduit non seulement à la réalisation d'une décomposition, mais encore à celle de tout un processus, va nous guider vers une décomposition "adaptée".

Proposition 3.4 *Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe), s un élément de H et \mathbf{D} un dictionnaire d'atomes que l'on suppose dénombrable et engendrant un sous-espace dense ; on suppose que l'on ait construit de manière itérative une suite d'atomes d_1, \dots, d_n, \dots , une suite de coefficients réels ou complexes $\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s)$ tels que*

$$|\langle s, d_1 \rangle| = \max_{d \in \mathbf{D}} |\langle s, d \rangle|, \quad \alpha_1 d_1 = P_{\mathbf{K}d_1}[s],$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle s - \sum_{k=1}^n \alpha_k d_k, d_{n+1} \right\rangle \right| &= \max_{d \in \mathbf{D}} \left| \left\langle s - \sum_{k=1}^n \alpha_k d_k, d \right\rangle \right| \\ \alpha_{n+1} d_{n+1} &= P_{\mathbf{K}d_{n+1}} \left[s - \sum_{k=1}^n \alpha_k d_k \right], \end{aligned}$$

où $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} suivant que l'espace est réel ou complexe. Alors, la suite

$$s_n := \sum_{k=1}^n \alpha_k d_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge vers s dans H et réalise un *matching-pursuit* de s relativement au dictionnaire d'atomes \mathbf{D} .

Preuve. On suppose pour simplifier les atomes du dictionnaire tous de norme 1. Ceci n'est en rien restrictif, car il suffit sinon de remplacer chaque α_k par $\alpha_k \|d_k\|$. Posons $h_k := \alpha_k d_k$, $k \in \mathbb{N}^*$, et notons r_n le reste de s au cran n , soit

$$r_n := s - \sum_{k=1}^n h_k$$

en partant de $r_0 = s$. Si $1 \leq n < m$, on a

$$r_n = r_m + \sum_{k=n+1}^m h_k.$$

Comme on effectue à chaque cran de l'algorithme une projection orthogonale unidimensionnelle sur le sous-espace engendré par le nouvel atome trouvé, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|r_k\|^2 = \|r_{k-1}\|^2 - |\langle r_{k-1}, d_k \rangle|^2.$$

et la suite des énergies $\|r_k\|^2$ est donc une suite décroissante minorée, donc convergente. On en déduit aussi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|h_k\|^2 < \infty.$$

Pour montrer dans un premier temps que la suite $(r_k)_k$ converge, nous allons prouver qu'elle est de Cauchy. Fixons donc $\epsilon > 0$. Comme on le voit aisément, on a, si $1 \leq n < m$,

$$\|r_n - r_m\|^2 = \|r_n\|^2 + \|r_m\|^2 - 2\|r_m\|^2 - 2 \sum_{k=n+1}^m \operatorname{Re} \langle r_m, h_k \rangle.$$

Mais on a, pour tout k entre $n+1$ et m ,

$$|\langle r_m, h_k \rangle| \leq \|h_k\| \|h_{m+1}\|.$$

Cela résulte simplement de ce que

$$\begin{aligned} |\langle r_m, h_k \rangle| &= |\langle r_m, \langle r_{k-1}, d_k \rangle d_k \rangle| \\ &= |\langle r_m, d_k \rangle| |\langle r_{k-1}, d_k \rangle| \\ &= \|h_k\| |\langle r_m, d_k \rangle| \\ &\leq \|h_k\| \|h_{m+1}\| \end{aligned}$$

du fait du principe de l'algorithme, puisque $|\langle r_m, d_{m+1} \rangle|$ (qui est par définition la norme de h_{m+1}) maximise tous les $|\langle r_m, d \rangle|$, avec $d \in \mathbf{D}$. On a donc

$$\|r_n - r_m\|^2 \leq \|r_m\|^2 - \|r_n\|^2 + 2\|h_{m+1}\| \sum_{k=n+1}^m \|h_k\| \quad (1)$$

Or

$$\|h_{m+1}\| \sum_{k=n+1}^m \|h_k\| \leq \|h_{m+1}\| \sum_{k=1}^{m+1} \|h_k\|.$$

Mais on voit que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \inf_{q \geq p} \left(\|h_q\| \sum_{k=1}^q \|h_k\| \right) = 0. \quad (2)$$

Si n est assez grand, on est certain que

$$\|r_n\|^2 - \|r_m\|^2 \leq \epsilon.$$

On choisira n assez grand pour qu'il en soit ainsi. Il résulte de (2) qu'il existe $q > m$ tel que

$$\|h_q\| \sum_{k=1}^q \|h_k\| \leq \epsilon.$$

Mais on a

$$\|r_n - r_m\| \leq \|r_n - r_q\| + \|r_m - r_q\|.$$

En appliquant (1) (mais cette fois avec les couples (n, q) et (m, q) au lieu de (m, n)), on voit que

$$\max(\|r_n - r_q\|^2, \|r_m - r_q\|^2) \leq 3\epsilon.$$

En mettant tout ensemble, on voit donc que

$$\|r_n - r_m\| \leq 2\sqrt{3\epsilon}$$

pour ce choix de n , ce qui implique bien que la suite $(r_k)_k$ est de Cauchy, donc convergente. Mais on a aussi la convergence vers 0 de $\|h_k\|$ lorsque k tend vers l'infini. On a donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\langle r_k, d_{k+1} \rangle| = 0.$$

Le principe de l'algorithme (appliqué une fois de plus) nous assure que pour tout atome d du dictionnaire

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\langle r_k, d \rangle| = 0.$$

Comme le dictionnaire forme une partie totale, la limite de la suite r_k , qui doit être orthogonale à tous les atomes du dictionnaire, doit être 0 et la proposition est ainsi démontrée. \diamond

Ce programme est implémenté sous l'algorithme **mpurs1** présenté ci-dessous :

```
>function [f,R1,R2,err]=mpurs1(D,s,epsilon,k);
% effectue le matching-pursuit ordinaire d'un signal s
% de taille (1,N) suivant un dictionnaire D
% dont les atomes sont les D(j,:), j=1,..., m
% Le dictionnaire D est de une matrice de taille (m,N).
% l'algorithme s'arrete apres k iterations ou
% des que l'energie E(r) du reste
% est telle que E(r) < epsilon E(s), ou E(s)
% designe l'energie du signal.
% La sortie f est une matrice de taille (m,N) dont les lignes
% successives, f(:,j), j=1,2,..., sont les approximations
% successives de s. La commande plot(R1) (resp. R2) donne les
% numeros des atomes choisis (en abscisses) et les
% parties reelles (resp. imaginaires) des coefficients dont ils sont
% affectes (en ordonnees) lorsque les atomes sont normalises
% et d'energie egale a 1. La variable err designe l'erreur
% relative commise apres k iterations en termes d'energie.
```

Cet algorithme, bien que robuste, souffre néanmoins certaines améliorations ; une variante particulièrement intéressante est celle qui consiste à imposer à chaque itération l'orthogonalité du reste avec les atomes déjà sélectionnés. Ceci suppose une redétermination des coefficients multiplicateurs de ces atomes. L'avantage est cette fois que l'on cherche à chaque étape le nouvel atome dans le dictionnaire privé des atomes déjà sélectionnés. C'est l'algorithme de *matching-pursuit orthogonal* dont nous présentons ici le passage d'un cran au cran suivant (les atomes du dictionnaire sont supposés normalisés, d'énergie 1) :

1. *Initialisation au cran n* . On part du signal *résumé* au cran n , obtenu via les itérations de l'algorithme qui ont précédé

$$\text{résumé}_n = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} d_k.$$

2. *Calcul de la matrice de Gram G_n des n premiers atomes* : ce calcul s'effectue de manière récursive comme on le verra ci-dessous.

3. *Détection de l'atome d_{n+1} suivant le principe du matching-pursuit* :

$$| \langle \text{reste}_n, d_{n+1} \rangle | = \max_{\substack{d \in \mathbf{D} \\ d \neq d_1, \dots, d_n}} | \langle \text{reste}_n, d \rangle |.$$

4. *Calcul du vecteur des corrélations du nouvel atome d_{n+1} avec les atomes d_1, \dots, d_n précédemment trouvés*. On note ce vecteur

$$C_n := \begin{pmatrix} \langle d_{n+1}, d_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle d_{n+1}, d_n \rangle \end{pmatrix}.$$

5. *Calculs du vecteur $B_n = G_n^{-1} C_n$* .

6. *Calcul du coefficient affectant le nouvel atome* : ce calcul s'effectue suivant la formule

$$a_{n+1}^{(n+1)} = \frac{\langle \text{reste}_n, d_{n+1} \rangle}{1 - \sum_{k=1}^n B_n(k) \langle d_k, d_{n+1} \rangle}.$$

7. *Calcul final du résumé au cran $n+1$* : on a la formule

$$\text{résumé}_{n+1} = \sum_{k=1}^n (a_k^{(n)} - a_{n+1}^{(n+1)} B_n(k)) d_k + a_{n+1}^{(n+1)} d_{n+1}.$$

8. *On ré-injecte ces nouvelles données* ; on repart alors à l'étape d'initialisation 1, mais cette fois au cran $n+1$.

Le calcul de G_n^{-1} se fait, comme nous l'avons signalé, de manière récursive

$$G_{n+1}^{-1} = \begin{bmatrix} G_n^{-1} + \rho_n B_n B_n^* & -\rho_n B_n \\ -\rho_n B_n^* & \rho_n \end{bmatrix},$$

où

$$\rho_n := \frac{1}{1 - C_n^* B_n}.$$

Les vecteurs B_n et C_n sont les deux vecteurs calculés aux étapes 4 et 5 de l'algorithme. Ces diverses opérations correspondent seulement au couplage entre le

matching-pursuit ordinaire et le procédé d’orthonormalisation classique de Gram-Schmidt. La convergence de la suite des restes vers 0 est encore satisfaite pourvu bien sûr que le dictionnaire engendre un sous-espace dense. L’algorithme **mpurs2** présenté ci-dessous réalise ces diverses étapes :

```
>function [f,R1,R2,err]=mpurs2(D,s,epsilon,k);
% effectue le matching-pursuit orthogonal d'un signal s
% de taille (1,N) suivant un dictionnaire D
% dont les atomes sont les D(j,:), j=1,..., m
% D est de une matrice de taille (m,N)
% l'algorithme s'arrete au bout de k operations
% ou des que l'energie E(r)
% du reste est telle que E(r) < epsilon E(s), ou E(s)
% designe l'energie du signal.
% La commande plot(R1) (resp. plot(R2)) donne (en abscisses)
% les numeros des atomes retenus et (en ordonnees)
% la valeur de la partie relle (resp. imaginaire)
% du coefficient trouve dans le resume au cran k de l'algorithme.
% Les atomes sont supposes normalises, d'energie 1
% err designe l'erreur d'energie relative.
% f est une matrice de taille (m,N) dont les lignes
% successives, f(:,j), j=1,2,..., sont les approximations
% successives de s.
```

Ces algorithmes robustes de “matching” sont de bons candidats pour traiter les signaux physiologiques par exemple (tester un signal contre un dictionnaire de pathologies par exemple). On verra plus tard comment des outils statistiques classiques (Proper Orthogonal Decomposition, réseaux de neurones,...) permettent de construire des dictionnaires issus de l’information elle-même pour y traquer des motifs ou des structures.

Concernant les analyses temps-échelles, on peut, comme l’a proposé et implémenté David Donoho (lociciel **WaveLab** développé à Stanford), considérer comme dictionnaire la collection des atomes $a^{-1/2}\psi((t-b)/a)$ (dans le cas de l’analyse temps-échelles continue) ou la collection $(2^{-j/2}\psi((t-n)/2^j))$, $j > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ (dans le cas de l’analyse multi-résolution) et limiter le nombre de pas de l’algorithme *matching pursuit* et donc le nombre d’atomes du dictionnaire en jeu dans une décomposition (cette fois bien sûr seulement partielle).

3.8 La “Proper Orthogonal Decomposition”

La réalisation du matching pursuit pré-suppose la construction préalable d’un dictionnaire d’atomes normalisés. Nous allons voir comment des idées empruntées aux statistiques permettent de construire un dictionnaire aux fins de mettre en route l’algorithme de *matching pursuit* à partir d’un signal analogique ou digital donné s .

Supposons que l’on dispose, pour un intervalle temporel I donné de longueur M , de N réalisations $s^{(1)}, \dots, s^{(N)}$ du signal s (disons par exemple N échantillons d’un même signal temporel s enregistré dans des plages de longueur M distinctes, ces échantillons étant appelés *snapshots* ou encore “clichés” du signal s) et que l’on

souhaite déterminer le modèle mathématique Φ qui approche au mieux en “moyenne” les diverses réalisations que sont $s^{(1)}, \dots, s^{(N)}$, le sens de “en moyenne” restant à préciser, le cadre devant malgré tout demeurer hilbertien. Nous nous placerons ici pour simplifier dans le cadre l^2 discret en supposant que I est l'intervalle digital $\{1, \dots, M\}$ et que $s^{(1)}, \dots, s^{(N)}$ sont N éléments de $l^2(I)$. La matrice des corrélations

$$R_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M s^{(i)}(m) \overline{s^{(j)}(m)}, \quad 1 \leq i, j \leq N$$

induit un opérateur linéaire hermitien sur $l^2(\{1, \dots, N\})$:

$$\mathcal{R} : \Phi = (\Phi(1), \dots, \Phi(N)) \mapsto \left(\sum_{j=1}^N R_{1j} \Phi(j), \dots, \sum_{j=1}^N R_{Nj} \Phi(j) \right);$$

les valeurs propres de cet opérateur (dont on s'assurera aisément qu'il est positif) se rangent en ordre décroissant : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$. Un vecteur unitaire $\Phi_{pp} = (\Phi_{pp}(1), \dots, \Phi_{pp}(N)) \in l^2(\{1, \dots, N\})$ tel que $\langle \mathcal{R} \Phi_{pp}, \Phi_{pp} \rangle$ soit maximal (c'est-à-dire un vecteur propre unitaire de \mathcal{R} associé à la plus grande valeur propre λ_1) induit une *direction principale* pour le sous-espace engendré par les réalisations $s^{(1)}, \dots, s^{(N)}$ du signal s , et la réalisation qui correspond à cette direction et approche le mieux en moyenne quadratique les diverses réalisations $s^{(1)}, \dots, s^{(N)}$ est $s_{\text{moyen}} = \sum_{j=1}^N \Phi_{pp}(j) s^{(j)}$ (il s'agit d'un signal sur l'intervalle I).

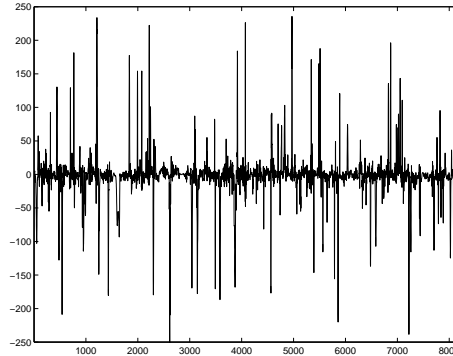


FIG. 3.23 – Le signal s étudié grâce à la combinaison “matching-Pursuit/P.O.D”

Dans l'exemple du signal s de longueur 8192 (affiché sur la figure 3.17 ci-dessus) dont l'étude est ici proposée, on introduit $N = 39$ fenêtres de $M = 256$ points (régulièrement espacées sur $\{1, \dots, 8192\}$, puis l'on considère comme motifs du dictionnaire les 4 vecteurs propres unitaires correspondant aux valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ tels que les fournit par exemple un algorithme de décomposition en valeurs singulières de la matrice de corrélation $[R_{ij}]_{1 \leq i, j \leq N}$. Sur la figure 3.18 ci-dessous, on a représenté ces quatre modes, soit les quatre signaux (de longueur 256)

$$d^{(k)}(m) := \frac{\sum_{j=1}^N \Phi_k(j) s^{(j)}(m)}{\left\| \sum_{j=1}^N \Phi_k(j) s^{(j)} \right\|}, \quad m = 1, \dots, 256, \quad k = 1, \dots, 4,$$

où $(\Phi_k(1), \dots, \Phi_k(N))$ représente le vecteur propre (normalisé) de la matrice de \mathcal{R} associé à la valeur propre λ_k , $k = 1, \dots, 4$.

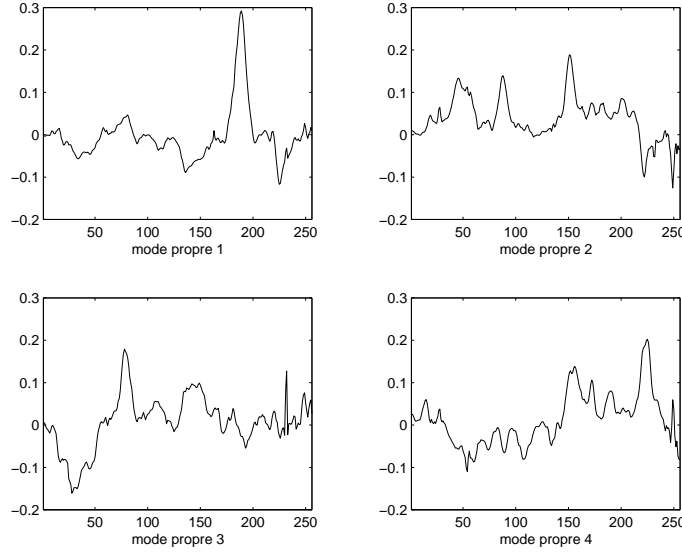


FIG. 3.24 – Les quatre premiers modes propres

Le dictionnaire que l’on suggère de construire pour décomposer suivant l’algorithme de *matching pursuit* ou *matching pursuit orthogonal* le signal **vort** le suivant ; on fixe un entier q tel que $1 \leq 2^q < 256$ (plus q sera petit, plus riche sera la dictionnaire) et l’on prend précisément comme dictionnaire la juxtaposition de quatre familles : la $k^{\text{ème}}$ -famille ($k = 1, 2, 3, 4$) étant constituée de la collection des signaux

$$[d^{(k)}, 0_{2^q}, \dots, 0_{2^q}], [0_{2^q}, d^{(k)}, 0_{2^q}, \dots, 0_{2^q}], \quad \dots \quad [0_{2^q}, \dots, 0_{2^q}, d^{(k)}]$$

où 0_{2^q} dénote un bloc ligne de 2^q zéros (le “motif” $d^{(k)}$ est décalé de 2^q en 2^q) .

L’algorithme de matching fournit, dans l’ordre, les atomes du dictionnaire contre lesquels le signal est poursuivi. Si l’on travaille avec l’algorithme de Matching Pursuit Orthogonal, il n’est pas nécessaire de remettre les atomes dans le dictionnaire lorsqu’ils ont été tirés ; par contre, il faut noter que le coefficient dont un atome est affecté se transforme au fur est à mesure de l’algorithme (à cause du procédé d’orthogonalisation de Schmidt en jeu ici) ; on peut préférer ne conserver pour chaque atome impliqué que le coefficient avec lequel il a été trouvé lors de son apparition.

Le dictionnaire ayant été fabriqué avec les quatre familles correspondant aux quatre premiers modes propres et le choix de $q = 2$, on a affiché sur les figures 3.19 et 3.20 les signaux approximants (confrontés à l’original $s(1 : 2048)$) après respectivement 10 et 20 itérations ainsi que la liste des atomes sélectionnés (dans les quatre sous-familles du dictionnaire) avec les coefficients dont ils sont affectés après 20 itérations de l’algorithme “*Matching Pursuit Orthogonal*”. On constate que certaines sections du signal s’approximent avec les atomes du dictionnaire, d’autres non.

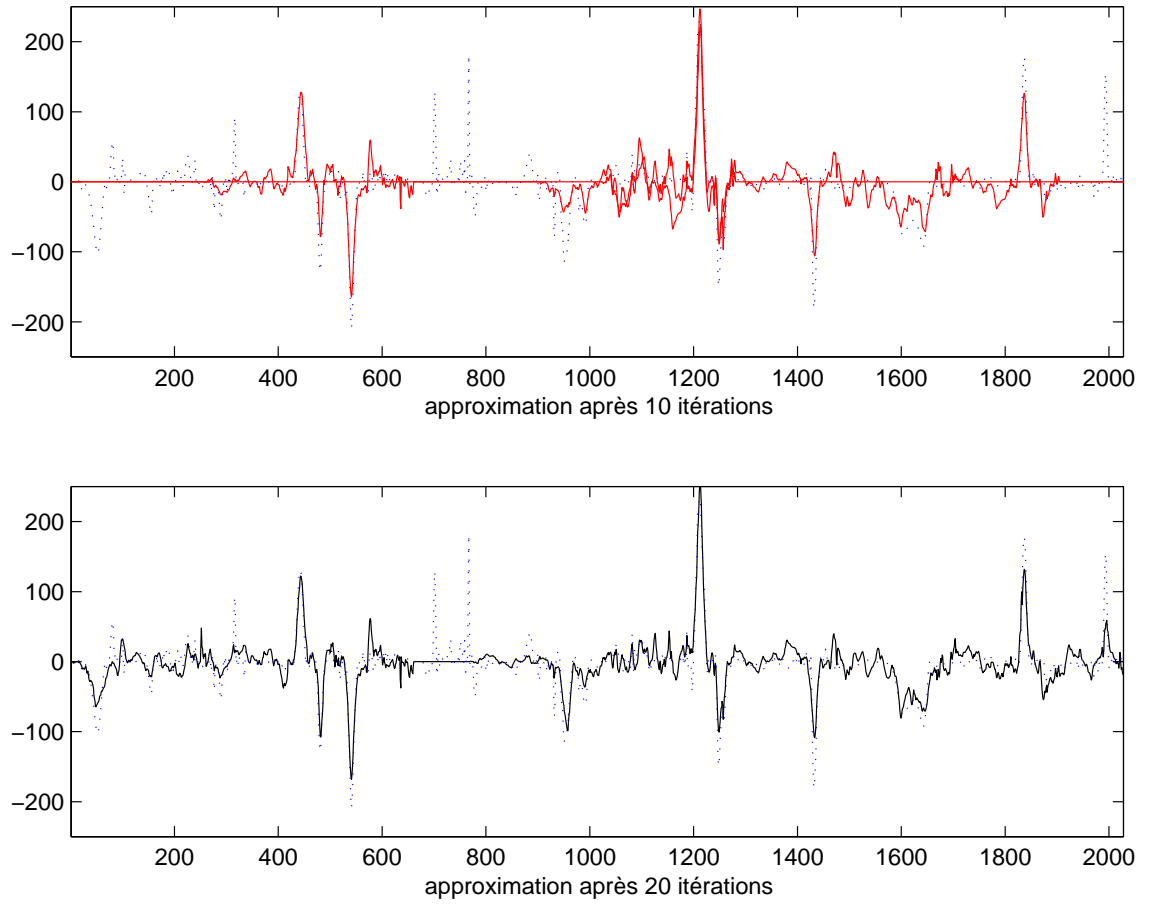


FIG. 3.25 – Approximations de $s(1 : 2048)$ après 10 ou 20 itérations de M.P.O

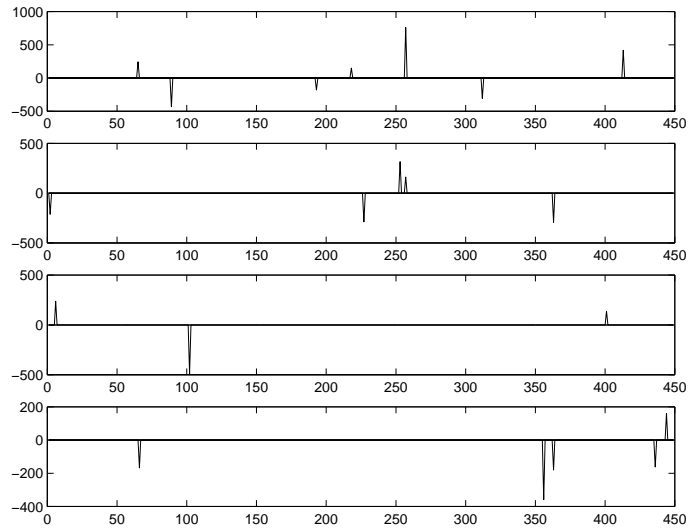


FIG. 3.26 – Comment les atomes choisis se répartissent-t'ils dans le dictionnaire ?

Chapitre 4

La notion d'entropie et les algorithmes d'analyse du signal afférents

4.1 La notion d'entropie dans le cadre Hilbertien

L'entropie en thermodynamique est un indicateur quantitatif du chaos : minimiser l'entropie, c'est chercher à coder le signal en fonction de sa cohérence ; c'est aussi cette idée qui préside au maniement de la notion d'entropie dans le traitement numérique des informations digitales (1D ou 2D) tel que nous le proposons ici. La notion d'entropie est une notion d'analyse hilbertienne tout aussi essentielle que l'est celle d'énergie (dont la forme polarisée est, rappelons le, le produit scalaire de corrélation, par exemple dans le cadre de $l^2(\mathbb{Z})$,

$$\langle (s_n)_n, (\tilde{s}_n)_n \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n \overline{\tilde{s}_n}.$$

C'est d'ailleurs essentiellement le cadre hilbertien de $l^2(\mathbb{Z})$ (ou $l^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$), espace des signaux ou des images d'énergie finie (ou les pendants continus que sont respectivement $L^2(\mathbb{R}, dx)$, et $L^2(\mathbb{R}^2, dxdy)$) qui nous servira ici de modèle, étant entendu que signaux ou images seront toujours supposés ne contenir qu'un nombre fini de pixels $n \in \mathbb{Z}$ ou $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ affectés d'une valeur (ou d'un code de couleurs) non nulle.

Si $(s_n)_n$ une suite de réels tendant vers 0 à l'infini, $-\log_2 |s_n|^2$ correspond au nombre de bits nécessaires au codage de l'information $|s_n|^2$ et l'on peut voir la quantité

$$-\sum_{n \in \mathbb{Z}} |s_n|^2 \log_2 |s_n|^2$$

comme une entropie ; chercher à la minimiser revient aussi à faire en sorte que soit "le mieux organisée possible" la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (de préférence, peu de coefficients, mais significatifs, plutôt que beaucoup de coefficients, eux petits).

Définition 4.1 Soit H un espace de Hilbert (séparable) et $(H_\iota)_\iota$ une décomposition (indexée forcément par un ensemble I dénombrable) orthogonale de cet espace

$$H = \bigoplus_{\iota \in I}^\perp H_\iota.$$

L'entropie d'un élément s de H relativement à cette décomposition est par définition :

$$e(s; (H_i)_i) := - \sum_i \|\text{pr}_{H_i}[s]\|^2 \log \|\text{pr}_{H_i}[s]\|^2.$$

La proposition suivante est une re-écriture immédiate du théorème de Pythagore ; c'est ce que l'on appelle l'équation de Shannon :

Proposition 4.1 Soient $H = H_1 \overset{\perp}{\oplus} H_2$ une décomposition orthogonale de H et $\mathcal{H}_1 = (H_{1,\iota_1})_{\iota_1 \in I_1}$ et $\mathcal{H}_2 = (H_{2,\iota_2})_{\iota_2 \in I_2}$ des décompositions orthogonales respectives de H_1 et H_2 :

$$H_1 = \overset{\perp}{\bigoplus}_{\iota_1 \in I_1} H_{1,\iota_1}, \quad H_2 = \overset{\perp}{\bigoplus}_{\iota_2 \in I_2} H_{2,\iota_2}.$$

Soit \mathcal{H} la décomposition de H obtenue en concaténant les décompositions \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 ; alors, si s est un signal normalisé (de norme 1) de H , on a

$$e(s; \mathcal{H}) = e(s; \{H_1, H_2\}) + \|s_1\|^2 e(s_1/\|s_1\|; \mathcal{H}_1) + \|s_2\|^2 e(s_2/\|s_2\|; \mathcal{H}_2),$$

si $s_j = \text{pr}_{H_j}[s]$, $j = 1, 2$.

Le corollaire de cette proposition immédiate est ce que l'on appelle le *critère de Shannon* ; c'est ce critère qui présidera à nos méthodes de minimisation de l'entropie et justifiera l'utilisation dans le cadre hilbertien de l'entropie que l'on vient de définir (dite *entropie de Shannon*), même si le recours à d'autres entropies, plus en relation avec ce que l'on prétend extraire de notre information, est envisageable, quand bien même le critère de Shannon ne serait plus satisfait. Notons toutefois qu'un produit scalaire induit un cadre hilbertien, et, par voie de conséquence, une entropie de Shannon adéquate.

Voici en tout cas le critère de Shannon :

Proposition 4.2 Si $H = H_1 \overset{\perp}{\oplus} H_2$, $s = s_1 + s_2 \in H$, de norme 1 ($s_j = \text{pr}_{H_j}[s]$, $j = 1, 2$), et si les décompositions orthogonales \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 de H_1 et H_2 sont telles que $e(s_1/\|s_1\|; \mathcal{H}_1)$ soit minimale (pour toutes les décompositions orthogonales possibles de H_1) ainsi que $e(s_2/\|s_2\|; \mathcal{H}_2)$ (cette fois pour toutes les décompositions orthogonales possibles de H_2), alors $e(s; \mathcal{H})$, où $\mathcal{H} := \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$, est minimale (pour toutes les décompositions de H).

De fait, nous utiliserons aussi la version de l'entropie non normalisée, alors que le critère de Shannon nous indique que l'entropie d'un vecteur s se décomposant sous la forme

$$s = \sum_{k \in \mathcal{K}} x_k$$

devrait être (pour que notre notion se plie à ce critère)

$$e_{\text{norm}}(s; \text{décomposition}) = - \sum_k \frac{\|x_k\|^2}{\|s\|^2} \log \frac{\|x_k\|^2}{\|s\|^2}.$$

Qu'à cela ne tienne, l'entropie définie par

$$e(s; \text{décomposition}) = - \sum_k \|x_k\|^2 \log \|x_k\|^2$$

(ou encore $L^2 \log L^2$ -norme) que nous utiliserons est telle que si s et s' sont deux vecteurs de même norme, alors

$$e(s; \text{décomp}) < e(s'; \text{décomp}) \iff e_{\text{norm}}(s; \text{décomp}) < e_{\text{norm}}(s'; \text{décomp});$$

trouver la base dans laquelle la décomposition de s est telle que cette entropie (non normalisée) soit minimale reviendra de fait à trouver la base relativement à laquelle l'entropie (elle normalisée) de s est minimale, et c'est là la raison pour laquelle nous utiliserons cette $L^2 \log L^2$ norme plutôt que l'entropie normalisée dans nos exemples à venir.

4.1.1 Dimension théorique d'une information

La dimension théorique d'une suite $(x_n)_n$ de $l^2(\mathbb{N})$ est par définition

$$d = \exp\left(-\sum_k \frac{|x_k|^2}{\|x\|^2} \log \frac{|x_k|^2}{\|x\|^2}\right).$$

La convexité de la fonction $t \in]0, \infty[\mapsto t \log t$ implique que la dimension théorique d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont au plus N coefficients sont non nuls est comprise entre 1 et N : si $M > 0$ est en effet le nombre de x_k non nuls, on a, de par l'inégalité de convexité,

$$\log \left[\frac{1}{M} \sum_k \frac{|x_k|^2}{\|x\|^2} \right] \times \frac{\sum_k |x_k|^2}{M \|x\|^2} = -\frac{\log M}{M} \leq \frac{1}{M} \sum_k \frac{|x_k|^2}{\|x\|^2} \log \frac{|x_k|^2}{\|x\|^2},$$

ce qui implique que la dimension théorique de la suite $(x_n)_n$ est dans ce cas majorée par $\exp(\log M) = M$.

De plus, si $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ sont deux suites de N nombres réels que l'on peut réarranger en des suites décroissantes $(y_n)_n$ et $(y'_n)_n$ de manière à ce que, pour tout $n = 1, \dots, N$, le total cumulé de la suite réordonnée $(y_n)_n$

$$T_n := \sum_{k=1}^N y_k$$

domine le total cumulé

$$T'_n := \sum_{k=1}^N y'_k$$

de la suite réordonnée $(y'_n)_n$, alors la dimension théorique de $(x_n)_n$ est plus petite que celle de $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'entropie de Shannon est donc une bonne mesure de l'efficacité de concentration d'une décomposition. Elle permet en effet de comparer les suites par leur taux de décroissance, autrement dit, le taux avec lequel les éléments deviennent négligeables s'ils sont réarrangés dans l'ordre décroissant.

Il faut noter aussi que bien souvent en cryptographie (et en particulier dans les techniques récentes développées en *watermarking*, nous y reviendrons), il arrive que l'on utilise des entropies *ad hoc* ne satisfaisant pas *a priori* le critère de Shannon, mais conduisant à la recherche d'une "meilleure base" dans laquelle se décompose une information. La "clef" devient alors le critère d'entropie lui-même conduisant à l'arbre de sélection de cette meilleure base *via* le lemme de décomposition que nous introduisons dans la section suivante.

4.2 Le *splitting lemma* (lemme de décomposition) dans le cadre dyadique

Soit m_0, m_1 deux fonctions définies presque partout sur \mathbb{R} , 2π -périodiques, d'énergie finie sur $[0, 2\pi]$ (c'est-à-dire des éléments de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$), telles que la matrice

$$M := \begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) \\ m_0(\omega + \pi) & m_1(\omega + \pi) \end{pmatrix}$$

soit, pour presque tout ω , une matrice unitaire (les colonnes sont de norme 1 et les lignes sont orthogonales pour le produit scalaire usuel dans \mathbb{C}^2). Par exemple, si m_0 est un élément de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ tel que

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 \equiv 1 \quad \text{p.p.}, \quad (4.1)$$

le couple réalisé par les fonctions

$$\begin{aligned} m_0 &: \omega \mapsto m_0(\omega) \\ m_1 &: \omega \mapsto e^{-i(\omega+\pi)} \overline{m_0(\omega + \pi)} \end{aligned}$$

est un couple de fonctions qui convient ; notons toutefois que la contrainte sur m_0 est assez drastique : la fonction

$$\omega \mapsto \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} = e^{\frac{-i\omega}{2}} \cos(\omega/2)$$

y satisfait ; en revanche, pour N fixé, on ne peut trouver qu'un seul polynôme trigonométrique

$$m_0^{(N)} = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N (1 + \gamma_{N,1} e^{-i\omega} + \cdots + \gamma_{N,N-1} e^{-i(N-1)\omega})$$

qui y satisfasse. De fait, nous nous contenterons de travailler avec des exemples de fonctions m_0 du type polynôme trigonométrique comme ci-dessus ; il faut noter que les exigences portant sur les coefficients (le fait que de tels polynômes trigonométriques soient en relation avec des identités trigonométriques très précises, sur le modèle de $\cos^2 + \sin^2 \equiv 1$) exclut que ces coefficients puissent être des nombres rationnels. Le côté “numérique” et non “arithmétique” de ces outils est ainsi évident. Cela peut bien sûr s'avérer un handicap sur des terrains comme la cryptographie où les aspects arithmétiques jouent un rôle majeur.

La fonction m_0 admet un développement en série de Fourier

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{-in\omega},$$

où $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$; la fonction m_1 qui lui est couplée admet alors le développement

$$m_1(\omega) = e^{-i(\omega+\pi)} \overline{m_0(\omega + \pi)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \overline{h(1-n)} e^{-in\omega} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) e^{-in\omega}$$

avec

$$g(n) = (-1)^n \overline{h(1-n)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On impose aussi la contrainte que la suite $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ soit dans $l^1(\mathbb{Z})$ et que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) = \sqrt{2},$$

ce qui assure que les fonctions m_0 et m_1 soient des fonctions 2π -périodiques continues, avec de plus $m_0(0) = 0$ et $m_1(0) = 1$; de fait, on est obligé d'imposer une contrainte plus forte relativement aux convergences, à savoir qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que l'on ait

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h(n)| |n|^\epsilon < +\infty; \quad (4.2)$$

pareille contrainte est bien sûr satisfaite dès que m_0 se trouve être un polynôme trigonométrique (comme c'est le cas si $m_0 = m_0^{(N)}$).

Du point de vue de l'analyse de Fourier, la convolution d'un signal discret $(s_n)_n$ avec la suite $(h(-n))_{n \in \mathbb{Z}}$ correspond à l'action sur le signal d'un filtrage passe-bas (les basses-fréquences sont préservées puisque $m_0(0) = 1$), tandis que la convolution du même signal avec la suite $(g(-n))_{n \in \mathbb{Z}}$ correspond à l'action sur ce même signal d'un filtrage passe-bande (les fréquences voisines de 0 sont coupées puisque $m_1(0) = 0$).

Ce n'est cependant pas ce point de vue du filtrage que nous allons privilégier, mais plutôt l'idée du filtrage couplé avec la décimation présente dans l'algorithme pyramidal.

Le mécanisme de la vision nous suggère de penser une information digitale $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (disons pour fixer les idées dans $l^2(\mathbb{Z})$) comme le signal "continu" (et appartenant lui, à $L^2(\mathbb{R})$)

$$s : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n \varphi(t - n),$$

où φ est un "atome temporel" bien localisé autour de $[0, 1]$, d'énergie finie, et tel que ses translatés $(\varphi(\cdot) - n)_{n \in \mathbb{Z}}$ constituent un système orthonormé dans $L^2(\mathbb{R})$ (ce qui rend "orthogonales" les diverses informations visuelles s_n , $n \in \mathbb{Z}$).

Notons que la donnée de la fonction m_0 suggère (tout au moins formellement), la construction d'un tel atome φ , celui que l'on construit, grâce à l'équation fonctionnelle

$$\widehat{\varphi}_0(2\omega) = m_0(\omega) \widehat{\varphi}_0(\omega)$$

sous la contrainte $\widehat{\varphi}_0(0) \neq 0$, c'est-à-dire, l'atome φ donné via son spectre (si toutefois le produit infini converge) par

$$\widehat{\varphi}_0(\omega) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}\omega); \quad (4.3)$$

rappelons que le spectre d'un signal φ de $L^2(\mathbb{R}, dt)$ est donné comme le signal $\widehat{\varphi}$ d'énergie finie défini dans l'espace des fréquences par

$$\widehat{\varphi}(\omega) := \lim_{\substack{L^2(\mathbb{R}, dt) \\ N \rightarrow \infty}} \int_{-N}^N \varphi(t) e^{-i\omega t} dt.$$

C'est d'ailleurs pour satisfaire aux exigences qu'implique la convergence de ce produit infini que nous avons du imposer que la contrainte additionnelle (2.1) soit

satisfaite pour un certain $\epsilon > 0$. Le signal φ_0 est tel que la collection $(\varphi_0(\cdot - n))_n$ forme un système orthonormé de $L^2(\mathbb{R})$; en effet, pareille condition implique que la fonction

$$\Psi_0 : \omega \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi_0}(\omega + 2n\pi)|^2$$

vérifie

$$\Psi_0(2\omega) = (|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2)\Psi_0(\omega) = \Psi_0(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

et, par itération

$$\Psi_0(\omega) \equiv \Psi_0(0) = \widehat{\varphi_0}(0) = 1.$$

Ce n'est cependant pas nécessairement cet atome φ_0 que nous aurons en tête dans l'énoncé du lemme de décomposition que voici :

Lemme 4.1 *Soit φ un signal d'énergie finie sur \mathbb{R} tel que le système $(\varphi(\cdot - n))_{n \in \mathbb{Z}}$ soit un système orthonormé (par exemple $\varphi = \varphi_0$ associé à m_0 comme proposé ci-dessus pourvu que le produit infini converge). Soient ϕ et ψ les deux signaux déduits de φ par les relations*

$$\begin{aligned} \phi &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n)\varphi(\cdot - n) \\ \theta &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n)\varphi(\cdot - n), \end{aligned}$$

et V_0, V_1, W_1 les trois sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ engendrés respectivement par les systèmes $(\varphi(\cdot - n))_{n \in \mathbb{Z}}$, $(\phi(\cdot - 2n))_{n \in \mathbb{Z}}$, et $(\theta(\cdot - 2n))_{n \in \mathbb{Z}}$. Alors, on a la décomposition orthogonale de V_0

$$V_0 = V_1 \oplus^\perp W_1$$

et de plus, les deux systèmes $(\phi(\cdot - 2n))_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\theta(\cdot - 2n))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont des bases hilbertiennes respectivement de V_1 et de W_1 .

Commentaire. La suite des coordonnées dans la base orthonormée $(\varphi(t - n))_{n \in \mathbb{Z}}$ de V_0 du signal $\text{pr}_{V_1}[s^{(0)}]$, où

$$s^{(0)} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n \varphi(t - n)$$

correspond à la “version brouillée” du signal dans l'algorithme pyramidal; la suite des coordonnées dans cette même base de la projection sur W_1 du même signal $s^{(0)}$ correspond au signal “détails à l'échelle 1” du signal digital $(s_n)_n$; l'idée nouvelle (par rapport à l'algorithme pyramidal) est que l'on peut continuer à traiter avec ce lemme de décomposition les deux signaux digitaux de $l^2(2\mathbb{Z})$ que sont

- d'une part, la suite des coefficients de $\text{pr}_{V_1}[s^{(0)}]$, élément de V_1 , dans la base orthonormée (de V_1 cette fois) que constitue le système $(\phi(\cdot - 2n))_{2n \in 2\mathbb{Z}}$;
- d'autre part, la suite des coefficients de $\text{pr}_{W_1}[s^{(0)}]$, élément de W_1 , dans la base orthonormée (de W_1 cette fois) que constitue le système $(\theta(\cdot - 2n))_{2n \in 2\mathbb{Z}}$.

Dans le cas de l'algorithme pyramidal, les détails n'étaient plus traités ; seul le “résumé” (projection sur V_1) se trouvait retravaillé éventuellement.

Preuve. La preuve de ce lemme est un calcul, où le caractère unitaire de la matrice

$$\begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) \\ m_0(\omega + \pi) & m_1(\omega + \pi) \end{pmatrix},$$

ainsi que le fait que les translatés de φ forment un système orthonormé, jouent un rôle fondamental. Ce calcul fait apparaître les résultats suivants :

- la projection orthogonale sur V_1 du signal $s^{(0)}$ associé au signal digital $(s_n)_n$ s'écrit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu \overline{h(\nu - 2n)} \right) \phi(t - 2n);$$

- la projection orthogonale sur W_1 du signal $s^{(0)}$ associé au signal digital $(s_n)_n$ s'écrit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu \overline{g(\nu - 2n)} \right) \theta(t - 2n);$$

Si l'on note R_0 et D_0 les opérateurs (considérés de $l^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même)

$$\begin{aligned} R_0 &: (s_n)_n \mapsto \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu \overline{h(\nu - 2n)} \right)_{n \in \mathbb{Z}} \\ D_0 &: (s_n)_n \mapsto \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu \overline{g(\nu - 2n)} \right)_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

(il serait plus judicieux de les penser de $l^2(\mathbb{Z})$ dans $l^2(2\mathbb{Z})$), alors les coordonnées dans la base $(\varphi(t - n))_n$ cette fois de la projection orthogonale de $s^{(0)}$ sur V_1 sont données par la suite $R_0^* R_0[(s_n)_n]$ tandis que celles de la projection orthogonale de $s^{(0)}$ sur W_1 dans la même base sont données par la suite $D_0^* D_0[(s_n)_n]$; on a donc la pseudo-identité de Bézout

$$\text{Id}_{l^2(\mathbb{Z})} = R_0^* R_0 + D_0^* D_0$$

que nous retrouverons plus loin dans l'analyse temps-échelles dyadique.

4.3 L'algorithme “Split and Merge” de V. Wickerhauser

4.3.1 Le cadre des signaux digitaux

Soit s un signal digital de longueur 2^N (que l'on suppose, pour tous les calculs qui suivent, prolongé par 0 hors de l'ensemble $\{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$).

On se donne en “filigramme” une fonction φ d'énergie finie sur \mathbb{R} et dont les translatées forment un système orthonormé de $L^2(\mathbb{R}, dt)$. Le signal digital s est alors pensé comme le signal analogique (et non plus digital) S

$$S : t \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n \varphi(t - n),$$

s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
r_0	r_1	r_2	r_3	d_0	d_1	d_2	d_3
rr_0	rr_1	dr_0	dr_1	rd_0	rd_1	dd_0	dd_1
rrr_0	drr_0	rdr_0	ddr_0	rrd_0	$drrd_0$	rdd_0	ddd_0

FIG. 4.1 – Décomposition d'une information 1D

signal que l'on décompose suivant ses projections orthogonales $\text{pr}_{V_1}[S]$ et $\text{pr}_{W_1}[S]$ sur les deux sous-espaces (orthogonaux) V_1 et W_1 respectivement engendrés par les $(\phi(t-2n))_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\theta(t-2n))_{n \in \mathbb{Z}}$ du lemme de décomposition (les deux suites $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(g(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ ayant été choisies de manière à ce que les polynômes trigonométriques m_0 et m_1 correspondants répondent aux exigences du lemme).

Le signal digital s (de longueur 2^N et prolongé par 0) donne ainsi naissance à deux signaux digitaux de longueur 2^{N-1} , les signaux $\{r_0, \dots, r_{2^{N-1}-1}\}$ et $\{d_0, \dots, d_{2^{N-1}-1}\}$, correspondant aux coefficients dans les bases orthonormées respectives $(\phi(t-2n))_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\theta(t-2n))_{n \in \mathbb{Z}}$ des projections $\text{pr}_{V_1}[S]$ et $\text{pr}_{W_1}[S]$; la concaténation de ces deux listes fournit la liste des coordonnées de S dans un autre système orthonormé (celui obtenu en concaténant les deux systèmes $(\phi(t-2n))_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\theta(t-2n))_{n \in \mathbb{Z}}$, au lieu de considérer le système $(\varphi(t-n))_{n \in \mathbb{Z}}$). Ces deux listes représentent, l'une une version "résumé" de l'information (c'est la suite $\{r_0, \dots, r_{2^{N-1}-1}\}$ des coefficients de la projection de S sur V_1), l'autre une version décimée des "détails" de l'information (c'est la suite $\{d_0, \dots, d_{2^{N-1}-1}\}$ des coefficients de la projection de S sur W_1). Chacune de ces deux suites (cette fois de longueur 2^{N-1}) peut être retraitée suivant le même mécanisme et l'on peut visualiser sur le tableau ci-dessous ($N = 3$) figurant sur la figure 4.1 les résultats des calculs.

À chaque niveau de la décomposition, on peut comparer l'entropie de l'information figurant dans une case donnée C (on prend l'entropie de Shannon, mais on pourrait, on l'a vu, envisager d'autres critères utilisant une notion d'entropie différente) à la somme des entropies des informations contenues dans les deux cases situées sous la case C (ce nouveau calcul correspond au calcul de l'entropie de l'information figurant dans la case C , mais calculée cette fois dans une autre base orthonormée qui privilégie le scindage résumé/détails). S'il s'avère que cette somme d'entropies est plus petite que l'entropie calculée directement dans la case C , alors le choix de cette nouvelle base (et donc de cette nouvelle décomposition) se justifie pour une lecture plus adaptée de l'information. Le fait que l'entropie se plie au critère de Shannon soutend la construction (proposée par Victor Wickerhauser il y a une dizaine d'années) d'un algorithme (dit "*split and merge*") permettant d'accéder à une base orthonormée dans laquelle la décomposition de l'information digitale s soit optimale au niveau du critère de minimisation de l'entropie. Nous avons sur les figures 4.2 et 4.3 proposé des modèles de décomposition dans de telles bases (les cases colorées indiquent les cases choisies par l'arbre de sélection de l'algorithme). L'information contenue dans la décomposition optimale est mieux organisée que l'information s ; la compression

s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
r_0	r_1	r_2	r_3	$d_0 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3$			
rr_0	rr_1	$dr_0 \quad dr_1$		rd_0	rd_1	dd_0	dd_1
rrr_0	drr_0	rdr_0	ddr_0	rrd_0	drd_0	rdd_0	ddd_0

FIG. 4.2 – Un premier exemple de base optimale

s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
$r_0 \quad r_1 \quad r_2 \quad r_3$				d_0	d_1	d_2	d_3
rr_0	rr_1	dr_0	dr_1	rd_0	rd_1	$dd_0 \quad dd_1$	
rrr_0	drr_0	rdr_0	ddr_0	rrd_0	drd_0	rdd_0	ddd_0

FIG. 4.3 – Un second exemple de base optimale

par exemple se trouve mieux "guidée" face à une telle décomposition que face à la décomposition originelle. L'action des filtres correspondant aux suites $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ correspond, l'une à l'action d'un filtre "moyennisateur", d'autre d'un filtre "dérivateur" ; si l'information continue (correspondant à l'information s) est le signal analogique

$$S : t \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n \varphi(t - n),$$

l'information analogique correspondant à la suite $([aa \cdots aa]_n)_n$ figurant dans la case d'étiquette $aa \cdots aa$ (où la lettre **a** signifie **r** ou **d** suivant que l'on est descendu à gauche ou à droite dans l'arbre de sélection conduisant à cette case) est en fait le signal analogique

$$S_{aa \cdots aa} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} [aa \cdots aa]_n \times ([aa \cdots aa](\varphi))(t - kn),$$

où k désigne la longueur du mot correspondant à la case et $[aa \cdots aa]$ désigne le signal analogique obtenu à partir de φ à partir des actions successives des filtres intégrateur et dérivateur (suivant le message codé dans le mot correspondant à l'étiquette de la case), combinées chaque fois avec une décimation de l'information.

L'atome $[aa \cdots aa](\varphi)$ apparaît alors comme un train d'ondes (on dit aussi un “paquet d'ondes”) et l'étiquette de la case permet de repérer la gamme de fréquences impliquée dans l'analyse de Fourier du signal analogique $S_{aa \cdots aa}$. En ce sens, la recherche de la base optimale (au niveau du critère de minimisation de l'entropie) correspond à une exploration simultanée du signal analogique correspondant à s à la fois en temps, en échelles, et en fréquences. L'indicateur du paramètre d'échelle d'une case est le niveau dyadique où elle se trouve, l'indicateur du paramètre de fréquence étant son étiquette. Des lemmes de décomposition non plus dyadiques, mais p -adiques (comme on en verra dans la section 4.3.4) joueront aussi le rôle de décomposition de l'information suivant un banc de filtres (en même temps que dans une gamme p -adique d'échelles). Le mot inscrit sur l'étiquette d'une case est en relation (si l'on prend $R = 0$ et $D = 1$) avec la fréquence $\omega \in [0, \pi]$ des paquets d'ondes liés à cette case : le mot, une fois transcrit en mot composé de 0 et de 1, représente les coefficients de l'écriture en base 2 de ω/π dans $[0, 1]$.

4.3.2 Le cas des images digitales

Le principe de la décomposition des images (et de la recherche d'une base optimale) est le même, excepté que le scindage de l'image n'est plus un scindage en deux, mais un scindage en quatre (“résumé” dans les deux directions, résumé “en horizontal” et détails “en vertical”, résumé “en vertical” et détails “en horizontal”, “détails” dans les deux directions, comme sur la figure 1.13). Le processus de décision se réduit à décider si oui ou non, on scinde une image en quatre ou si on la garde telle quelle. Au bout du compte, on détermine une base optimale, dont voici un modèle sur la figure 4.4 (pour une image 8×8).

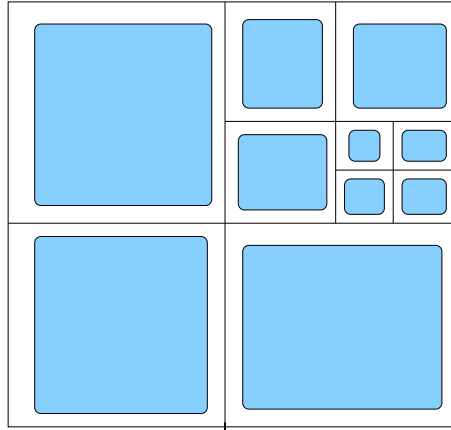


FIG. 4.4 – Un exemple de base optimale pour la décomposition d'une image

4.3.3 Implémentation algorithmique en 1D

Nous proposons de la faire dans le cas dyadique à partir soit de la fonction $m_0^{(N)}$, $N = 2$ (c'est dans ce cas la routine **wpack4** que nous utilisons), ou $N = 4$ (avec la routine **wpack8**). Voici par exemple le synopsis (sous **MATLAB**) de la routine **wpack8** :

```
function [U,etiq]=wpack8(s,nlev);
```

```
%      [U,etiq]=wpack8(s,nlev);
%decomposition en paquets d'ondelettes
%(analyse multi-resolution de Daubechies
% a 8 parametres); nlev est le nombre de
%niveaux d'echelle; les paquets sont les
%lignes de U; les etiquettes correspondantes
%%sont les lignes de etiq (R pour resume, D pour
%detail,0 pour l'operateur identite). L'entropie
%est l'entropie de Shannon non normalisee.
```

La routine **viewpack** permet dans un second temps de visualiser les divers composants obtenus.

```
function viewpack(U,etiq,m);
% viewpack(U,etiq,m)
%permet la visualisation de la decomposition en
%paquets d'ondelettes (analyse multiresolution
%de Daubechies a 4 ou 8 parametres); on prend
%[U,etiq]=wpackM(s) avec M=4 ou 8; m est le nombre
%de composants par figure.
```

Les signaux obtenus après enregistrement d'une secousse sismique sont de bons modèles de signaux au sens où précisément interviennent les trois paramètres que sont le temps, l'échelle, et le nombre d'onde. Ce nombre d'onde joue un rôle dans les processus de réflexion ou de transmission des ondes sismiques en milieu non homogène et il est important, si l'on désire avoir des informations sur le milieu de propagation à partir de l'enregistrement de la secousse, de tenter de décomposer le phénomène en tenant compte de ces trois paramètres (c'est le principe du SONAR ou, en optique médicale, de l'échographie).

Voici dans un premier temps un signal correspondant à l'enregistrement d'une secousse sismique, de fait à trois enregistrements, dans les trois directions est-ouest, nord-sud, et suivant l'axe vertical. Ce signal a été décomposé en composants orthogonaux suivant un algorithme consistant (dans le sens descendant) à privilégier la minoration de l'entropie (non normalisée). Nous avons indiqué la décomposition des signaux correspondant aux enregistrements est-ouest, nord-sud et vertical, selon quatre niveaux d'échelle, avec ici $m_0 = m_0^{(4)}$.

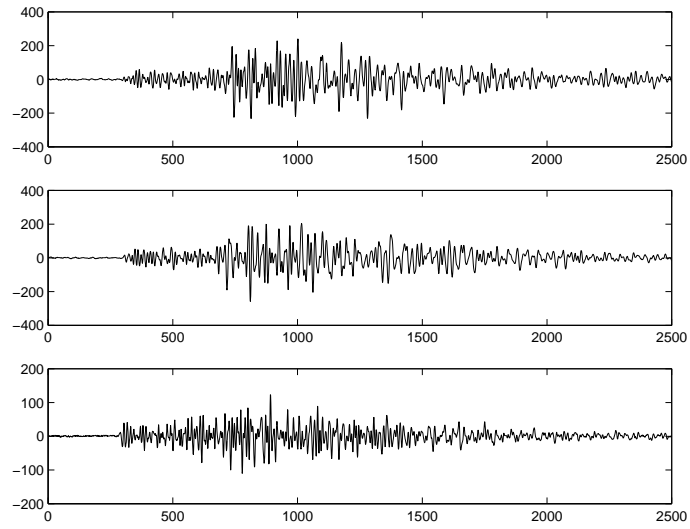


FIG. 4.5 – Un signal de secousse sismique (est-ouest, nord-sud, vertical)

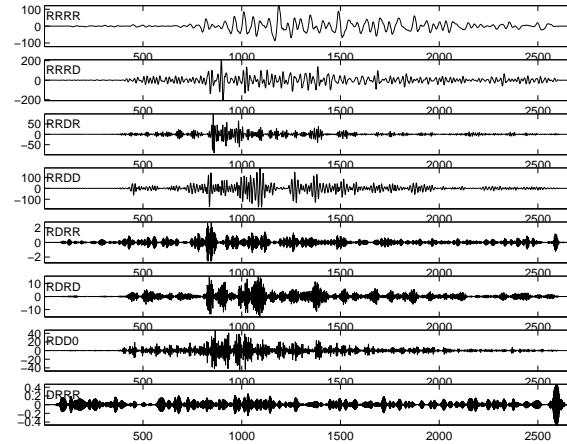


FIG. 4.6 – Analyse est-ouest

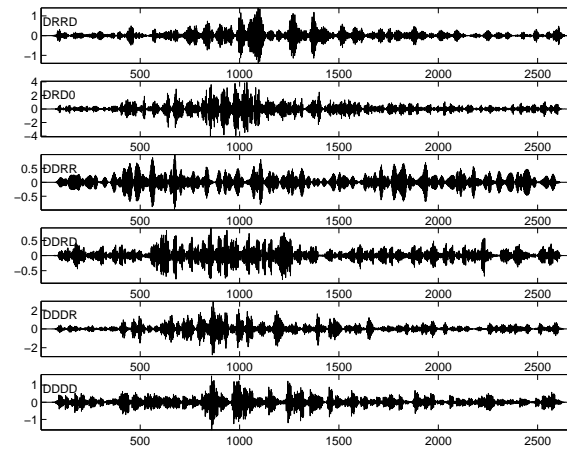


FIG. 4.7 – Analyse est-ouest (suite)

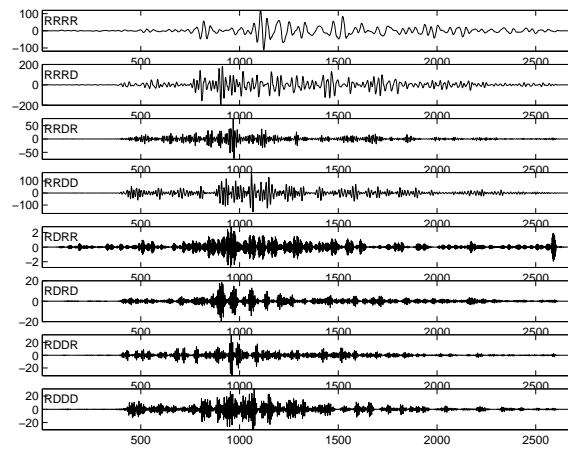


FIG. 4.8 – Analyse nord-sud

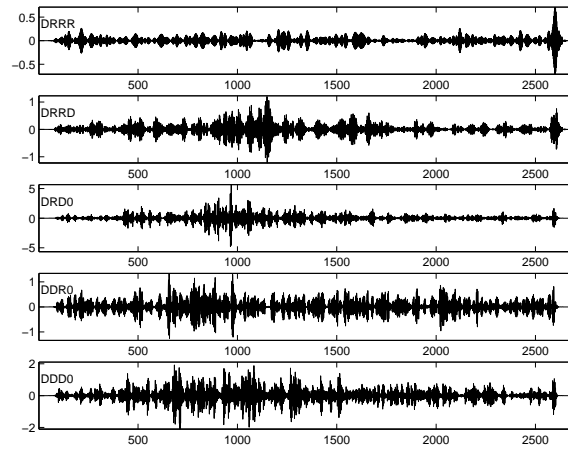


FIG. 4.9 – Analyse nord-sud (suite)

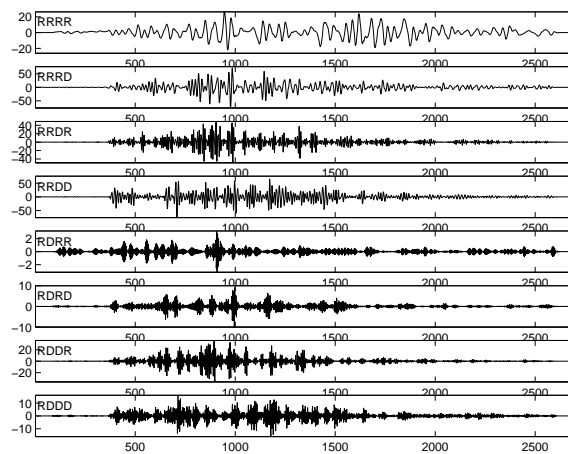


FIG. 4.10 – Analyse enregistrement vertical

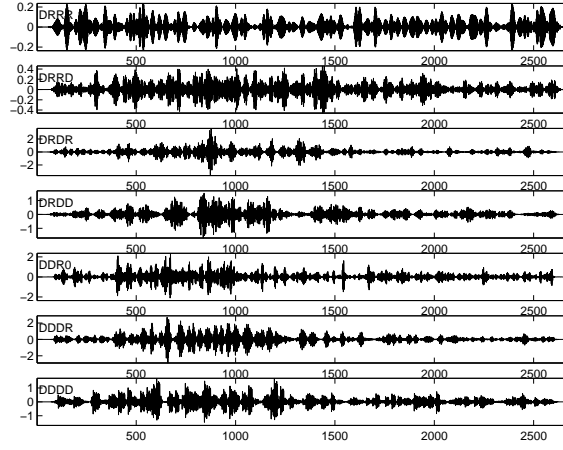


FIG. 4.11 – Analyse enregistrement vertical (suite)

Pour donner un exemple de la manière dont on peut exploiter ces diverses analyses, on s'appuiera sur le fait suivant : il est intéressant de savoir discerner dans une onde sismique les instants d'arrivée des ondes à propagation horizontale (ondes P), ceux d'arrivée des ondes à propagation verticale (ondes S), ainsi qu'éventuellement les arrivées successives retardées par les effets de diffusion ou de réflexion dans le milieu inhomogène où s'effectue le transit. Pour cela, on peut par exemple construire la fonction de polarisation de l'onde, consistant à calculer, pour chaque niveau de décomposition (disons j) commun aux décompositions des trois composantes envisagées (les signaux de la décomposition correspondants étant ew_j, ns_j, z_j) la matrice de corrélation glissante C_j (pour la notion de corrélation glissante, on se référera au chapitre 1) des variables (ew_j, ns_j, z_j) , puis, pour chaque position temporelle t , la quantité

$$1 - \frac{\lambda_{j2}(t)}{\lambda_{j1}(t)},$$

où $\lambda_{j1}(t) \geq \lambda_{j2}(t)$ sont les deux plus grandes valeurs propres de cette matrice de corrélation $C_j(t)$; la fonction de polarisation

$$F(t) := \prod_j \left(1 - \frac{\lambda_{j2}(t)}{\lambda_{j1}(t)}\right)$$

rend compte de la localisation des instants d'arrivée des P -ondes. Voici le résultat concernant par exemple le cas de notre signal. Sur la figure suivante, nous avons indiqué le graphe de cette fonction de polarisation (en haut) et reproduit le graphe de l'enregistrement est-ouest de la secousse.

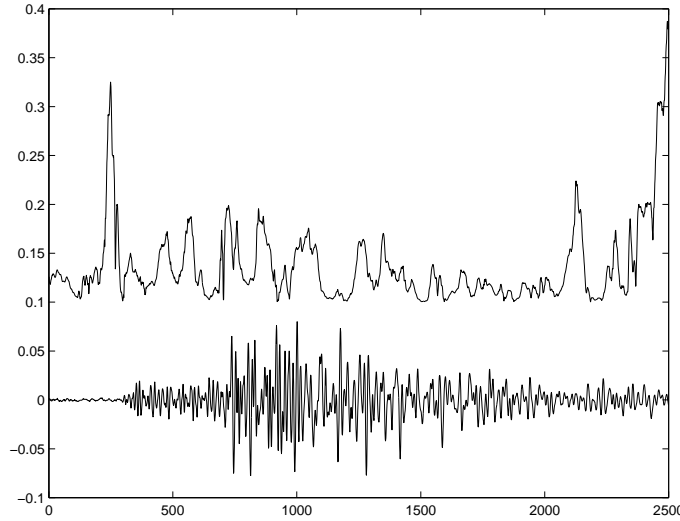


FIG. 4.12 – Polarisation

Une fois l’azimut déterminé (via le calcul du vecteur propre associé à la plus grande valeur propre aux instants supposés d’arrivée de la P -onde), on choisit le bon repère pour analyser à nouveau le problème afin de détecter les instants d’arrivée des ondes de type S . On voit en tout cas sur cet exemple combien ce procédé simple construit sur le modèle de l’analyse de la vision peut s’avérer utile pour envisager l’analyse de signaux où se superposent des informations relatives au temps, à l’échelle où l’on se place, ou au nombre d’onde (ou encore fréquence). C’est volontairement que nous avons choisi ici d’illustrer notre présentation de l’algorithme “*Split and Merge*” grâce à des signaux empruntés à la sismique. Signalons toutefois que le choix de la fonction m_0 n’est pas anodin, si l’on pense que lui est couplé le choix d’une fonction φ particulière, en l’occurrence φ_0 ; la fonction φ_0 et surtout la fonction ψ_0 donnée par

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1(\omega/2) \prod_{j=2}^{+\infty} m_0(2^{-j}\omega)$$

peut s’avérer plus ou moins bien adapté à la “forme” des ondes présentes dans un signal correspondant à l’enregistrement d’une secousse sismique ; le choix de $m_0^{(4)}$ utilisé dans les calculs ci-dessus n’est pas du tout le choix optimum de fonction m_0 pour de tels signaux ; nous l’avons plus utilisé dans un souci didactique.

4.3.4 La généralisation au cadre p -adique

Si l’on a en vue les applications de ce type de lemme de décomposition à un cadre de nature plus arithmétique (ou si l’on souhaite plus simplement enrichir la finesse de la décomposition), il est intéressant de savoir que les idées introduites ci-dessus peuvent s’étendre au cadre non plus dyadique, mais p -adique, avec p nombre premier cette fois strictement supérieur à 2.

Supposons que p soit un tel nombre premier (d’ailleurs le fait que p soit premier ne joue pas de rôle ici) et que nous disposions de p fonctions m_0, \dots, m_{p-1} de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ (c’est-à-dire des fonctions définies presque partout, 2π -périodiques, d’énergie finie

sur $[0, 2\pi]$)

$$m_j = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_j(n) e^{-in(\cdot)}, \quad j = 0, \dots, p-1,$$

telles que, pour presque tout ω dans \mathbb{R} , la matrice

$$M = \left[m_j(\omega + \frac{2k\pi}{p}) \right]_{0 \leq j, k \leq p-1}$$

soit une matrice unitaire, qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\sum |h_0(n)| |n|^\epsilon < \infty$$

et que $m_0(0) = 1$.

On peut comme précédemment associer à m_0 un signal φ_0 défini via l'équation fonctionnelle

$$\widehat{\varphi}_0(p\omega) = m_0(\omega) \widehat{\varphi}_0(\omega)$$

sous la contrainte $\widehat{\varphi}_0(0) \neq 0$, c'est-à-dire le signal défini via son spectre par

$$\widehat{\varphi}_0(\omega) := \prod_{j=1}^{+\infty} m_0(p^{-j}\omega)$$

(la convergence est assurée par les conditions sur la suite $(h_0(n))_n$). Ce signal φ_0 est tel que la collection $(\varphi(\cdot - n))_n$ forme encore un système orthonormé dans $L^2(\mathbb{R})$. En effet, pareille condition implique cette fois que la fonction

$$\Psi_0 : \omega \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_0(\omega + 2n\pi)|^2$$

vérifie

$$\Psi_0(p\omega) = \left(|m_0(\omega)|^2 + \dots + |m_0(\omega + \frac{2(p-1)\pi}{p})|^2 \right) \Psi_0(\omega) = \Psi_0(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

et, par itération

$$\Psi_0(\omega) \equiv \Psi_0(0) = \widehat{\varphi}_0(0) = 1.$$

Nous avons alors la version suivante du *splitting lemma*, extension naturelle au cadre p -adique du lemme 4.1 :

Lemme 4.2 *Soit φ un signal d'énergie finie sur \mathbb{R} tel que le système $(\varphi(\cdot - n))_{n \in \mathbb{Z}}$ soit un système orthonormé (par exemple $\varphi = \varphi_0$ associé à m_0 comme proposé ci-dessus pourvu que le produit infini converge, mais ce n'est pas le seul choix possible). Soient ϕ_j , $j = 0, \dots, p-1$, les p signaux déduits de φ par les relations*

$$\begin{aligned} \phi : &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_0(n) \varphi(\cdot - n) \\ \theta_j : &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_j(n) \varphi(\cdot - n), \quad j = 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

et $V_0, V_1, W_{1,1}, \dots, W_{1,p-1}$ les $p+1$ sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ engendrés respectivement par les systèmes $(\varphi(\cdot - n))_{n \in \mathbb{Z}}$, $(\phi(\cdot - pn))_{n \in \mathbb{Z}}$, et $(\theta_j(\cdot - pn))_{n \in \mathbb{Z}}$, $j = 1, \dots, p-1$. Alors, on a la décomposition orthogonale de V_0

$$V_0 = V_1 \oplus \bigoplus_{1 \leq j \leq p-1}^{\perp} W_{1,j}$$

et de plus, les systèmes $(\phi(\cdot - pn))_n$ $(\theta_j(\cdot - pn))_{n \in \mathbb{Z}}$, $j = 1, \dots, p-1$ sont des bases hilbertiennes respectivement de $V_0, W_{1,1}, \dots, W_{1,p-1}$.

Commentaire. La suite des coordonnées dans la base orthonormée $(\varphi(t - n))_{n \in \mathbb{Z}}$ de V_0 du signal $\text{pr}_{V_1}[s^{(0)}]$, où

$$s^{(0)} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n \varphi(t - n)$$

correspond à la "version brouillée" du signal dans une version de l'algorithme pyramidal où la décimation aurait été remplacée par une " p -cimation" ; la suite des coordonnées dans cette même base de la projection sur un sous-espace $W_{1,j}$, $j = 0, \dots, p-1$, du même signal $s^{(0)}$ correspond à une certaine gamme de détails "détails à l'échelle 1 et dans la gamme j " du signal digital $(s_n)_n$; comme dans le cas dyadique, on peut toujours continuer à traiter avec ce lemme de décomposition les p signaux digitaux de $l^2(p\mathbb{Z})$ que sont

- d'une part, la suite des coefficients de $\text{pr}_{V_1}[s^{(0)}]$, élément de V_1 , dans la base orthonormée (de V_1 cette fois) que constitue le système $(\phi(\cdot - pn))_{pn \in p\mathbb{Z}}$;
- d'autre part, pour chaque $j = 1, \dots, p-1$, la suite des coefficients de $\text{pr}_{W_{1,j}}[s^{(0)}]$, élément de $W_{1,j}$, dans la base orthonormée (de $W_{1,j}$ cette fois) que constitue le système $(\theta_j(\cdot - pn))_{pn \in p\mathbb{Z}}$.

Preuve. La preuve de ce lemme est analogue à celle du lemme de décomposition dyadique classique ; le fait que la matrice M et le fait que les translatés de φ forment un système orthonormé jouent un rôle fondamental. Ce calcul fait apparaître les résultats suivants :

- la projection orthogonale sur V_1 du signal $s^{(0)}$ associé au signal digital $(s_n)_n$ s'écrit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu \overline{h_0(\nu - pn)} \right) \phi(t - pn) ;$$

- la projection orthogonale sur $W_{1,j}$, $j = 1, \dots, p-1$, du signal $s^{(0)}$ associé au signal digital $(s_n)_n$ s'écrit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu \overline{h_j(\nu - pn)} \right) \theta_j(t - pn) ;$$

Si l'on note R_0 et $D_{0,j}$, $j = 1, \dots, p-1$, les opérateurs (considérés de $l^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même)

$$\begin{aligned} R_0 & : (s_n)_n \mapsto \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu \overline{h_0(\nu - pn)} \right)_{n \in \mathbb{Z}} \\ D_{0,j} & : (s_n)_n \mapsto \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} s_\nu \overline{h_j(\nu - pn)} \right)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad j = 1, \dots, p-1 \end{aligned}$$

(il serait plus judicieux de les penser de $l^2(\mathbb{Z})$ dans $l^2(p\mathbb{Z})$), alors les coordonnées dans la base $(\varphi(t-n))_n$ cette fois de la projection orthogonale de $s^{(0)}$ sur V_1 sont données par la suite $R_0^* R_0[(s_n)_n]$ tandis que celles de la projection orthogonale de $s^{(0)}$ sur $W_{1,j}$, $j = 1, \dots, p-1$, dans la même base sont données par la suite $D_{0,j}^* D_{0,j}[(s_n)_n]$; on a donc la pseudo-identité de Bézout

$$\text{Id}_{l^2(\mathbb{Z})} = R_0^* R_0 + \sum_{j=1}^{p-1} D_{0,j}^* D_{0,j},$$

décomposition de l'identité plus affinée qu'elle ne l'était dans le cadre dyadique. De fait, l'indice j peut être (tout au moins dans une première approche) perçu comme l'indice d'un canal fréquentiel. Pareille décomposition est à mettre en parallèle avec la décomposition que matérialise le codage en sous-bande (on pourrait d'ailleurs retrouver exactement ce codage en sous bande modulo le choix d'une judicieuse famille m_0, \dots, m_{p-1}).

Un tel lemme de décomposition génère (comme dans le cas dyadique) un algorithme de sélection de base optimale au niveau de la minimization de l'entropie. L'étiquette d'une case (dans l'alphabet $R_0, D_{0,1}, \dots, D_{0,p-1}$) est en relation avec l'indicateur fréquentiel; en effet, les "paquets d'onde" déduits de l'atome φ et engendrant le sous-espace correspondant à la case correspondent à une fréquence correspondant (si rapportée à l'intervalle utile $[0, \pi]$) au nombre dont le développement en base p correspond à ce mot (R_0 correspondant à 0, $D_{0,j}$ à j , $j = 0, \dots, p-1$).

Un exemple de famille (m_0, \dots, m_{p-1}) (codage en sous-bandes) :

On peut prendre pour m_0 la fonction (2π -périodique) obtenue en périodisant la fonction caractéristique de $[-\pi/p, \pi/p]$; on prend alors pour m_j ($j = 1, \dots, p-1$) la fonction 2π -périodique obtenue en périodisant la fonction

$$\chi_{[-(j+1)/p, -j/p]} + \chi_{[j/p, (j+1)/p]};$$

on construit ainsi un p -uplet de fonctions (m_0, \dots, m_p) utilisable dans le *splitting lemma* p -adique.

Un autre exemple de fonction m_0 :

Soit V_0 l'espace des fonctions affines par morceaux, avec noeuds toutes les unités, d'énergie finie, c'est-à-dire les fonctions du type :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n \Delta(t-n), \quad (s_n)_n \in l^2(\mathbb{Z}),$$

où Δ désigne la *fonction triangle*

$$\Delta(t) := \max(0, 1 - |t|), \quad t \in \mathbb{R};$$

notons que le signal continu

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n \Delta(\cdot - n)$$

représente la "visualisation" naturelle du signal digital $(s_n)_n$ affichée sur l'écran de l'ordinateur. Cependant, Δ ne saurait être considéré comme un atome φ auquel les lemmes de décomposition s'appliquent, puisque Δ et $\Delta(t-1)$ (ou Δ et $\Delta(\cdot+1)$) ne sont clairement pas orthogonaux; la fonction φ appartenant à V_0 et telle que ses

translatés $(\varphi(\cdot - n))_n$ forment une base orthonormée de V_0 est la fonction dont le spectre est donné par

$$\widehat{\varphi} = m\widehat{\Delta},$$

où m est la fonction continue 2π -périodique

$$m : \quad \omega \in \mathbf{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\widehat{\Delta}(\omega + 2n\pi)|^2}} ;$$

le calcul de m se fait grâce à la formule de Plancherel, puisque

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\widehat{\Delta}(\omega + 2n\pi)|^2 = \int_0^1 |\Delta(t) + e^{i\omega} \Delta(t-1)|^2 dt = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{\cos \omega}{2}\right),$$

d'où

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \sqrt{\frac{3}{2 + \cos \omega}} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right)^2.$$

Soit, pour un nombre premier p , $m_0^{[p]}$ la fonction 2π -périodique sur \mathbf{R} telle que

$$\forall \omega \in \mathbf{R}, \quad \widehat{\varphi}(p\omega) = m_0^{[p]}(\omega) \widehat{\varphi}(\omega);$$

il s'agit d'une fonction 2π -périodique réelle, facile à calculer, au moins pour les petits nombres premiers ; par exemple :

$$\begin{aligned} m_0^{[2]}(\omega) &= \sqrt{\frac{2 + \cos \omega}{2 + \cos 2\omega}} (\cos(\omega/2))^2 \\ m_0^{[3]}(\omega) &= \sqrt{\frac{2 + \cos \omega}{2 + \cos 3\omega}} \left(\frac{2 \cos(\omega) + 1}{3} \right)^2 \\ m_0^{[5]}(\omega) &= \sqrt{\frac{2 + \cos \omega}{2 + \cos 5\omega}} \left(\frac{4(\cos(\omega))^2 \cos \omega + \cos 2\omega}{5} \right)^2 \end{aligned}$$

L'opérateur de projection orthogonale de l'espace V_0 sur le sous-espace $V_1^{[p]}$ des fonctions affines par morceaux avec noeuds toutes les p unités s'exprime (si l'on ramène les signaux de V_0 aux suites de leurs coefficients dans la base $(\varphi(t - n))_{n \in \mathbf{Z}}$) sous la forme :

$$\text{pr}_{V_1^{[p]}} \left[\sum_{n \in \mathbf{Z}} s_n \varphi(\cdot - n) \right] = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \tilde{s}_n^{[p]} \varphi(t - n),$$

où

$$(\tilde{s}_n^{[p]})_n = R_0^{[p]*} R_0^{[p]} [(s_n)_n],$$

où

$$R_0^{[p]} [(s_n)_n] := \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} s_n h_0^{[p]}(\nu - pn) \right)_n \in l^2(p\mathbf{Z}) \simeq l^2(\mathbf{Z})$$

si

$$m_0^{[p]}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_0^{[p]}(n) e^{-in\omega}.$$

Un calcul simple montre que l'opérateur de $l^2(\mathbf{Z})$ dans lui-même donné comme $R_0^{[p]*} R_0^{[p]}$ se lit en continu comme l'opérateur $\mathcal{L}_0^{[p]}$ de V_0 dans lui-même

$$\mathcal{L}_0^{[p]}[s] = \sum_{j=0}^{p-1} L_{p,j} [e^{-\frac{2ij(\cdot)}{p}} s],$$

où $L_{p,j}$, $j = 0, \dots, q-1$, est le filtre digital de transformée de Fourier la fonction 2π -périodique

$$\omega \mapsto m_0^{[p]}(\omega) \overline{m_0^{[p]}(\omega + \frac{2j\pi}{p})} = m_0^{[p]}(\omega) m_0^{[p]}(\omega + \frac{2j\pi}{p}).$$

Il s'agit donc de la somme des actions d'une cascade de filtres, chacun d'eux agissant sur une version déphasée du signal d'entrée s . On parle pour un tel opérateur de *pseudo-filtre*. Nous retrouverons ces pseudo-filtres $\mathcal{L}_0^{[p]}$ dans à propos de la décomposition dite de Franklin.

L'algorithme de recherche de la meilleure base induit par un tel p -lemme de décomposition induit (le paramètre d'échelles étant de plus pris en compte) une décomposition "intelligente" de l'information suivant ce que l'on pourrait appeler un *banc de filtres*.

4.4 La décomposition temps-fréquences adaptative

Étant donné un intervalle $I = [b_1, b_2]$ de l'axe des temps, de longueur $L_{1,2} = b_2 - b_1$, on vérifie que la collection des signaux

$$\phi_{b_1, b_2, l} : t \mapsto \sqrt{\frac{2}{L_{1,2}}} \sin \left[\left(\pi(l + \frac{1}{2}) \right) \left(\frac{t - b_1}{L_{1,2}} \right) \right], \quad l \in \mathbb{N},$$

constitue une base orthonormée de l'espace $L^2([b_1, b_2])$ des signaux d'énergie finie sur le laps de temps $[b_1, b_2]$. Ces "atomes" constituent la liste des harmoniques locaux relatifs à l'intervalle $[b_1, b_2]$.

Considérons un signal digital sur $[0, 1]$ donné par

$$\begin{aligned} s(t) &\sim \sin(2\pi(l_1 + 1/2)t), \quad t \in [0, 1/2] \\ s(t) &\sim \sin(2\pi(l_2 + 1/2)(t - 1/2)), \quad t \in]1/2, 1] \end{aligned}$$

(comme sur la figure 4.13), l_1 et l_2 désignant deux entiers strictement positifs distincts. Il est clair que l'entropie d'un tel signal dans la base de $L^2([0, 1])$ obtenue en concaténant les bases d'harmoniques locales relatives à $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$ est plus petite que celle obtenue en exprimant un tel signal dans la base des harmoniques locales relatives à l'intervalle $[0, 1]$ tout entier ; le "dictionnaire" constitué de telles harmoniques n'est pas un dictionnaire adapté au signal ; le premier dictionnaire (obtenu en concaténant les deux bases) lui convient en revanche tout à fait, et l'on trouverait en exprimant le signal dans cette première base essentiellement deux coefficients significatifs (correspondant à l_1 pour la première liste d'harmoniques, à l_2 pour la seconde).

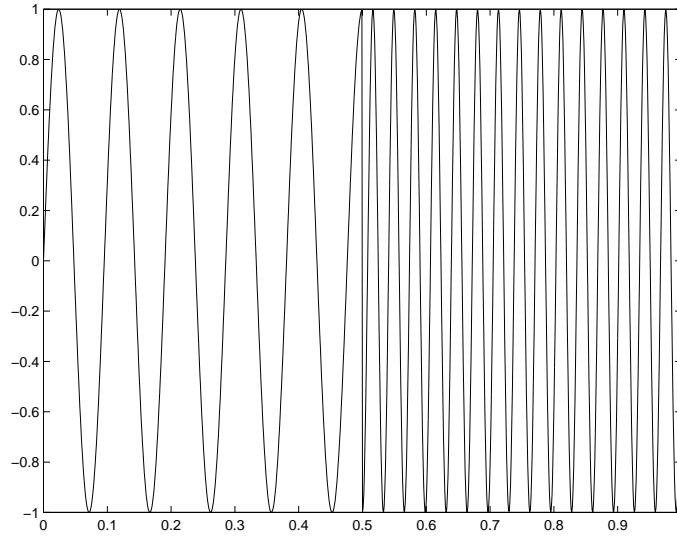


FIG. 4.13 – Un signal présentant deux niveaux de fréquences

Considérons maintenant une suite strictement croissante $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ d'instants marqués sur l'axe des temps, avec $\lim_{\pm\infty} b_k = \pm\infty$, couplée avec une suite $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres réels positifs desquels on exige simplement

$$\epsilon_k + \epsilon_{k+1} < b_{k+1} - b_k = L_{k,k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous pouvons définir une fenêtre θ_k supportée par l'intervalle $[b_k - \epsilon_k, b_{k+1} + \epsilon_{k+1}]$ par

$$\begin{aligned} \theta_k(t) &= \sin\left(\pi(t - b_k + \epsilon_k)/4\epsilon_k\right), \quad t \in [b_k - \epsilon_k, b_k + \epsilon_k] \\ \theta_k(t) &= \cos\left(\pi(t - b_{k+1} + \epsilon_{k+1})/4\epsilon_{k+1}\right), \quad t \in [b_{k+1} - \epsilon_{k+1}, b_{k+1} + \epsilon_{k+1}] \\ \theta_k(t) &= 1, \quad t \in [b_k + \epsilon_k, b_{k+1} - \epsilon_{k+1}] \\ \theta_k(t) &= 0 \text{ dans tous les autres cas.} \end{aligned}$$

Comme on le vérifie immédiatement, la collection de toutes ces fenêtres génère la partition de l'unité de l'axe des temps

$$1 \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta_k^2, \quad (4.4)$$

et l'on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout t dans $[b_k - \epsilon_k, b_k + \epsilon_k]$ les relations

$$\theta_k(t) = \theta_{k-1}(2b_k - t) \quad \text{et} \quad \theta_k^2(t) + \theta_{k-1}^2(t) = 1. \quad (4.5)$$

On définit sur l'intervalle $I_k := [b_k - L_{k,k+1}, b_{k+1} + L_{k,k+1}]$ la collection de signaux $(\sigma_{k,k+1,l})_{l \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{aligned} \sigma_{k,k+1,l} &= -\phi_{b_k, b_{k+1}, l}(2b_k - t), \quad t \in [b_k - L_{k,k+1}, b_k] \\ \sigma_{k,k+1,l} &= \phi_{b_k, b_{k+1}, l}(t), \quad t \in [b_k, b_{k+1}] \\ \sigma_{k,k+1,l} &= \phi_{b_k, b_{k+1}, l}(2b_{k+1} - t), \quad t \in [b_{k+1}, b_{k+1} + L_{k,k+1}] \end{aligned} \quad (4.6)$$

et l'on a alors la

Proposition 4.3 *La collection des signaux $\theta_k \sigma_{k,k+1,l}$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$, constitue une base orthonormée de l'espace des signaux d'énergie finie sur \mathbb{R} et l'on dispose ainsi de la possibilité, étant donné un signal s dans $L^2(\mathbb{R})$, de construire, avec la double suite des produits scalaires $\langle s, \theta_k \sigma_{k,k+1,l} \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$, un spectrogramme de s attaché à la segmentation $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de l'axe des temps. Le fait que cette segmentation soit arbitraire et puisse, on le verra, être construite de manière inter-active en fonction du signal s , confère à cette construction le qualificatif d'accordéon de Malvar.*

Preuve. On vérifie par un calcul que le système constitué des $\theta_k \sigma_{k,k+1,l}$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ constitue bien un système orthonormé. En utilisant l'analyse de Fourier des signaux périodiques, on montre que, si s est un signal d'énergie finie sur l'axe des temps,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \langle s, \theta_k \sigma_{k,k+1,l} \rangle \theta_k(t) \sigma_{k,k+1,l}(t) = \\ = \theta_k^2(t) s(t) - \theta_{k-1}(t) \theta_k(t) s(2b_k - t) + \theta_k(t) \theta_{k+1}(t) s(2b_{k+1} - t), \end{aligned} \quad (4.7)$$

et ce pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'égalité (4.7) étant entendue au sens L^2 (et donc pour presque tout t). En ajoutant toutes les identités (4.7) pour les diverses valeurs de k et en utilisant le fait que les fenêtres $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifient (4.5) et (4.6), on conclut que le système des $\theta_k \sigma_{k,k+1,l}$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$, est bien un système total et que l'on a, au sens L^2 ,

$$s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{\infty} \langle s, \theta_k \sigma_{k,k+1,l} \rangle \theta_k \sigma_{k,k+1,l}.$$

La proposition en résulte. \diamond

Remarque 4.1 Dans l'énoncé de la proposition précédente, il est possible de remplacer, pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la suite

$$(\phi_{k,k+1,l})_{l \in \mathbb{N}}$$

par n'importe quel système constituant une base orthonormée de l'espace des signaux d'énergie finie sur $[b_k, b_{k+1}]$, la modification du système $(\phi_{k,k+1,l})_{l \in \mathbb{N}}$ en le système $(\sigma_{k,k+1,l})_{l \in \mathbb{N}}$ étant faite en conséquence suivant les formules (4.6).

On remarque aussi que si W_k est le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les $\theta_k \sigma_{k,k+1,l}$, $l \in \mathbb{N}$, une base orthogonale du sous espace

$$W_{k,k+1} := W_k \overset{\perp}{\oplus} W_{k+1}$$

obtenu par concaténation (ou encore “merging”) des deux sous-espaces W_k et W_{k+1} est donnée par les signaux

$$\sqrt{\theta_k^2 + \theta_{k+1}^2} \sigma_{k,k+2,l}.$$

Si k_0 désigne un entier relatif quelconque, les décompositions orthogonales

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} W_k$$

et

$$L^2(\mathbb{R}) = \left(\bigoplus_{k < k_0} W_k \right) \oplus W_{k_0,k_0+1} \oplus \left(\bigoplus_{k > k_0+1} W_k \right)$$

réalisent deux décompositions orthogonales de $L^2(\mathbb{R})$.

Partant d'une segmentation fine $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de l'axe des temps, (générant une famille de fenêtres, dites fenêtres de la génération 0), on peut donc lui attacher une décomposition $(W_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$ en sous espaces orthogonaux de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ (chaque W_k^0 permettant de quantifier l'analyse des signaux dans la fenêtre $[b_k - \epsilon_k, b_{k+1} + \epsilon_{k+1}]$). L'espace W_k^0 est le sous-espace engendré par le système orthonormé $\mathcal{B}_k = (\theta_k \sigma_{k,k+1,l})_{l \in \mathbb{N}}$, où θ_k désigne la fonction fenêtre correspondant à l'intervalle $[b_k, b_{k+1}]$.

Ces données étant précisées, on peut alors générer un algorithme avec le synopsis suivant :

1. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on calcule les trois entropies

$$\begin{aligned} e_{2p}[s] &:= \text{ENTR}_{W_{2p}}[\text{pr}_{W_{2p}}[s]; \mathcal{B}_{2p}] \\ e_{2p+1}[s] &:= \text{ENTR}_{W_{2p+1}}[\text{pr}_{W_{2p+1}}[s]; \mathcal{B}_{2p+1}] \\ e_{2p,2p+1}[s] &:= \text{ENTR}_{W_{2p,2p+1}}[\text{pr}_{W_{2p,2p+1}}[s]; \mathcal{B}_{2p,2p+1}], \end{aligned}$$

où $\mathcal{B}_{2p,2p+1}$ désigne le système orthonormé constitué des signaux

$$\sqrt{\theta_{2p}^2 + \theta_{2p+1}^2}, \sigma_{2p,2(p+1),l}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

2. Pour chaque valeur de p telle que $e_{2p,2p+1}[s] \leq e_{2p}[s] + e_{2p+1}[s]$, on décide que la concaténation (ou encore le “merging” dans la terminologie anglo-saxonne) des deux fenêtres $[b_{2p}, b_{2p+1}]$ et $[b_{2p+1}, b_{2(p+1)}]$ est une opération plus intéressante du point de vue de la recherche d'une décomposition fenêtrée de s dont les atomes soient d'entropie minimale que celle qui consiste à laisser ces deux fenêtres dissociées. On fabrique alors un nouveau fenêtrage (dit fenêtrage à la génération 1) obtenu en éliminant ainsi les b_{2p+1} tels que $e_{2p}[s] + e_{2p+1}[s] \geq e_{2p,2p+1}[s]$.

3. Si l'on note $\Lambda_1[s]$ l'ensemble des entiers p tels que $e_{2p}[s] + e_{2p+1}[s] < e_{2p,2p+1}$ et

$$d_1[s] := \sum_{p \in \Lambda_1[s]} (\text{pr}_{W_{2p}}[s] + \text{pr}_{W_{2p+1}}[s]),$$

on peut réitérer le processus à partir du signal

$$r_1[s] = s - d_1[s] = \sum_{p \notin \Lambda_1[s]} \text{pr}_{W_{2p,2p+1}}[s].$$

(“r” pour “résumé”, “d” pour “détails”, le sens de ces qualificatifs étant toutefois ici différent de celui qui a été utilisé dans la description de l'analyse multi-résolution ou dans celle de la décomposition en paquets d'ondelettes). Les composants (ou “atomes de Malvar”) du signal à la génération 0 seront par définition les signaux

$$D_{1,p}[s] = \text{pr}_{W_{2p}}[s], p \in \Lambda_1[s],$$

et constituent les lignes d'une matrice D_1 , dite matrice des atomes au premier pas de l'algorithme, matrice dont la somme des lignes est le signal $d_1[s]$, et dont 1 est l'étiquette. Cette étiquette correspond au niveau d'échelle où l'on se trouve, les échelles étant prises dans l'ordre croissant.

L'itération de cet algorithme nous conduit à la construction (par concaténation éventuelle de fenêtres consécutives à la même génération) d'une segmentation optimale (du point de vue de la minimalité de l'entropie) pour l'analyse fenêtrée d'un signal donné s , ainsi qu'à une matrice $D = [D_1; D_2; \dots]$ d'atomes composants (en principe orthogonaux) relatifs à cette segmentation. Ce type d'algorithme (dit séquence

MERGE) s'avère d'un intérêt majeur en ce qui concerne l'analyse, la synthèse ou la compression des signaux de parole.

Le programme **merge** ci dessous

```
>>[D1,r1,sp1]=merge(s,q,m);
>>[D2,r2,sp2]=merge(r1,q+1,m);
>>[D3,r3,sp3]=merge(r2,q+2,m);
>>...
```

en réalise une implémentation lorsque le fenêtrage est un fenêtrage régulier avec $L = (2^q + 1)2^m$ et $\epsilon_k = 2^{m-1}$ pour tout k . De plus, le signal $\text{spk}(i, :)$ est le spectre de l'atome $\text{Dk}(i, :)$.

Le programme

```
>>d=merge1(s,m);
```

fournit les signaux $d1, d2, \dots$, dans le cas où $q = 1$.

À titre d'application, nous l'avons implémenté sur le signal vocal de la figure 4.14, correspondant à la prononciation de la suite de phonèmes "PI-ER-RE" par un locuteur ; ce signal digital est un signal de longueur $8224 = (2^8 + 1)2^5$.

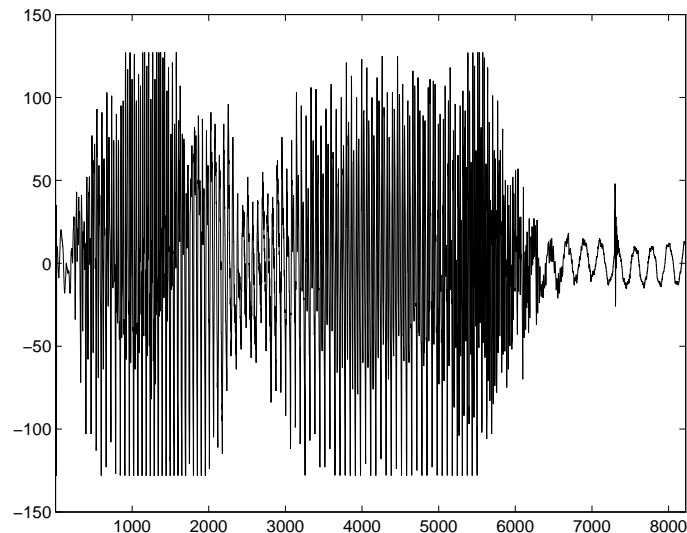
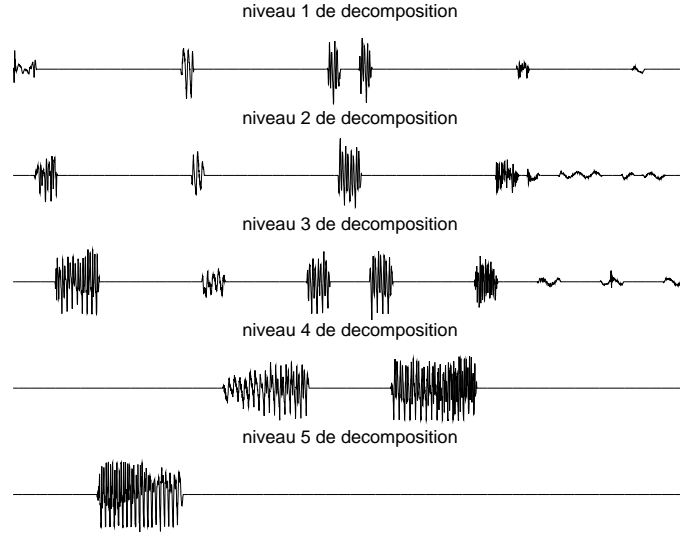


FIG. 4.14 – séquence de phonèmes 'PI – ER – RE'

Si $m = 5$, les divers détails dyadiques non nuls obtenus (la gamme d'échelles contient 8 niveaux ici) sont affichés sur la figure 4.15

FIG. 4.15 – $d = \text{merge1}(s, 5)$

Il existe aussi un algorithme à contrario, dit séquence SPLIT. Cette fois, on choisit M très grand et l'on considère comme fenêtrage originel le fenêtrage induit par les $b_{2^M p+1}$, $p \in \mathbb{Z}$. Pour chaque p , on considère les sous espaces fermés

$$W_{2^M p+1, \dots, 2^M (p+1)+1}, W_{2^M p+1, \dots, 2^{M-1} (p+1)+1}, W_{2^{M-1} (p+1)+1, \dots, 2^M (p+1)+1},$$

correspondant aux concaténations des fenêtres du type $[b_k, b_{k+1}]$ correspondant aux intervalles temporels spécifiés, et les trois entropies correspondantes, que l'on notera respectivement $\tilde{e}_{p,p+1}[s]$, $\tilde{e}_{p,p+1/2}[s]$ et $\tilde{e}_{p+1/2,p+1}[s]$. On appelle cette fois $\tilde{\Lambda}_1[s]$ l'ensemble des $l \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\tilde{e}_{p,p+1}[s] \leq \tilde{e}_{p,p+1/2}[s] + \tilde{e}_{p+1/2,p+1}[s]$$

et

$$\tilde{d}_1[s] := \sum_{l \in \tilde{\Lambda}_1[s]} \text{pr}_{W_{2^M l+1, 2^M (l+1)+1}}[s],$$

et l'on recommence l'opération à partir du signal $\tilde{r}_1[s] = s - \tilde{d}_1$, mais cette fois avec le fenêtrage (dit fenêtrage à la génération 1) induit par la suite $b_{2^M p+1}$, $p \in \mathbb{Z}$, enrichie des points $b_{2^M (p+1/2)}$, $p \notin \tilde{\Lambda}_1[s]$. Si l'on note \tilde{D}_1 la matrice dont les lignes sont les signaux

$$D_{1,p}[s] = \text{pr}_{W_{2^M p+1, 2^M (p+1)+1}}[s], p \in \Lambda_1[s],$$

et ainsi de suite, l'algorithme génère lui aussi une segmentation optimale (en termes de minimisation de l'entropie) du signal originel ; les composants de la décomposition sont les lignes de la matrice $\tilde{D} = [\tilde{D}_1; \tilde{D}_2; \dots]$; le signal \tilde{d}_k représente la somme des atomes composants à un niveau d'échelle donné. Notons ici qu'au contraire de ce qui se passe pour l'algorithme MERGE, c'est l'indice $M+1-k$ qui correspond cette fois à ce niveau d'échelle (et que l'on appelle étiquette).

L'algorithme SPLIT est implémenté sous la commande

```
>>[Dtilde,etiq,sp]=split(s,M,m);
```

généralisant les atomes de la décomposition (lignes de D), le niveau d'échelle auquel ils se situent (lignes de etiq), et leur spectre (lignes de sp).

Le jeu avec ces deux algorithmes (direct ou à rebours) est ce que l'on appelle communément l'algorithme SPLIT & MERGE, tel qu'il est proposé par E. Wesfreid et V. Wickerhauser [WW].

Chapitre 5

L'outil Fourier, combiné avec l'algorithmique Hilbertienne

Nous traitons dans ce chapitre deux exemples où l'analyse d'images ou de signaux passe par l'utilisation de la transformation de Fourier comme outil cette fois de calcul (et non seulement d'analyse comme au chapitre 2) et par des techniques directement inspirées de l'algorithmique Hilbertienne (le recours au théorème de projection et au théorème de Pythagore dans un cadre Hilbertien, celui des signaux ou des images de d'énergie finie).

La transformation de Fourier transforme l'opération mathématique de convolution (correspondant au passage d'une information dans une *boîte noire*, c'est-à-dire un appareil agissant de manière linéaire et continue et dont les paramètres sont immuables dans le temps)

$$(f, h) \rightarrow f * g := \int f(u)g(t-u)du$$
$$((u_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (h_n)_{n \in \mathbb{Z}}) := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{n-k} h_k \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

(formellement dans les cadres respectivement discret et continu) en l'opération de multiplication : la transformée de Fourier de $f * g$ est le produit des transformées de Fourier des fonctions f et g (dans le cadre continu), les choses étant analogues dans le cadre discret.

Cette remarque justifie l'importance de la transformation de Fourier dans le traitement des signaux ou des images ; c'est, entre autres, l'outil adéquat pour procéder au filtrage, c'est-à-dire faire un tri sélectif des canaux de fréquences que l'on souhaite conserver et de ceux que l'on veut éliminer (le bruit par exemple est un phénomène haute fréquence).

Parler du filtrage nécessiterait un cours complet, tant centré sur les points de vue déterministe que probabiliste. Nous nous contenterons de voir Fourier “en action” sur deux exemples :

- la transformation aux rayons X (*X-ray transform*), ingrédient mathématique du CAT-Scanner et de la tomographie, et son inversion ;
- le fascinant problème de l'extrapolation d'une information.

5.1 Les transformations de type Radon et leur inversion

5.1.1 Aspects théoriques : deux transformation mathématiques

Soit \mathbb{S}^{d-1} la sphère unité de l'espace \mathbb{R}^d , $d \geq 1$ (dans la pratique, seuls les cas $d = 2$ et $d = 3$ retiendront ici notre attention). Nous noterons ξ l'élément courant de \mathbb{S}^{d-1} .

Définition 5.1 Soit f une fonction mesurable sur \mathbb{R}^d , à valeurs complexes, et telle que la restriction de f à tout hyperplan de \mathbb{R}^d de la forme $\langle x, \xi \rangle = p$, $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, $p \in \mathbb{R}$, soit intégrable (relativement à la mesure de Lebesgue $d\mu_{\xi,p}$ restreinte à cet hyperplan). On définit la transformée de Radon de f comme l'application

$$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1} \mapsto \mathbb{C} : (p, \xi) \mapsto R[f](p, \xi) := \int_{\langle x, \xi \rangle = p} f(x) d\mu_{\xi,p} \quad (5.1)$$

Si $\delta(\xi^\perp)$ désigne la restriction de la mesure de Lebesgue à l'hyperplan ξ^\perp , alors on peut écrire, pour tout $p \in \mathbb{R}$, en faisant intervenir l'opération de convolution :

$$R[f](p, \xi) = [f * \delta(\xi^\perp)](p\xi).$$

D'autre part, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, on a

$$[f * \delta(\xi^\perp)](y) = [f * \delta_\xi](\text{pr}_{\mathbb{R}\xi}[y])$$

du fait de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue sur la droite réelle. À ξ fixé, la transformation de Radon peut être considérée comme réalisant une *boîte noire* analogique : elle transforme une image f d -dimensionnelle en le signal 1-dimensionnel (fonction du seul paramètre p)

$$p \mapsto R[f](p, \xi)$$

et l'on a l'invariance par translation au sens où

$$\begin{aligned} [f(\cdot - x_0) * \delta(\xi^\perp)](p\xi) &= [f * \delta(\xi^\perp)](p\xi - x_0) \\ &= [f * \delta(\xi^\perp)]((p - p_{0,\xi})\xi), \end{aligned}$$

où $p_{0,\xi} := \text{pr}_{\mathbb{R}\xi}[x_0]$.

De manière tout à fait analogue, nous pouvons définir la transformée aux rayons X *X-Ray Transform*.

Définition 5.2 Soit f une fonction mesurable sur \mathbb{R}^d , à valeurs complexes, et telle que, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, pour tout y dans ξ^\perp , la fonction $t \mapsto f(y + t\xi)$ soit Lebesgue intégrable sur \mathbb{R} . On définit la *X-Ray transform* de f comme l'application

$$(y, \xi) \mapsto XR[f](y, \xi) := \int_{\mathbb{R}} f(y + t\xi) dt, \quad \xi \in \mathbb{S}^{d-1}, y \in \xi^\perp. \quad (5.2)$$

C'est la X-Ray Transform qui, dans le cas particulier $d = 3$, se trouve matérialisée par le dispositif de CAT-Scanner de la figure 5.1. Cette fois, pour chaque valeur de ξ , c'est une image $d - 1$ dimensionnelle que l'on forme, à savoir l'image

$$y \in \xi^\perp \rightarrow \text{XR}[f](y, \xi).$$

Dans tous les cas, la X-Ray Transform peut être considérée, à ξ fixé dans \mathbb{R}^{d-1} , comme une boîte noire; en effet :

$$\text{XR}[f(\cdot - x_0)](y, \xi) = \text{XR}[f](y - \text{pr}_{\xi^\perp}(x_0), \xi)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, pour tout $y \in \xi^\perp$, pour tout x_0 dans \mathbb{R}^d .

La formule dite *de la projection* relie la connaissance du spectre de f à celle de sa transformée de Radon et fournit donc un moyen théorique (et bien utile) d'inversion de cette dernière transformation.

Proposition 5.1 *Soit f une fonction continue et à support compact dans \mathbb{R}^d et*

$$(p, \xi) \mapsto \text{R}[f](p, \xi)$$

sa transformée de Radon. Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, la transformée de Fourier du signal

$$p \in \mathbb{R} \mapsto \text{R}[f](p, \xi)$$

est le signal

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto \hat{f}(\omega\xi),$$

où \hat{f} désigne la transformée d -dimensionnelle du signal f , f étant considéré comme un signal d -dimensionnel (une image si $d = 2$). De plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la formule de reconstruction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\mathcal{F}[\text{R}[f](\cdot, \xi)](r) e^{ir\langle x, \xi \rangle} r^{d-1} d\sigma_{\mathbb{S}^{d-1}}(\xi) dr \right),$$

où $d\sigma_{\mathbb{S}^{d-1}}$ désigne la mesure de Lebesgue normalisée sur la sphère unité \mathbb{S}^{d-1} et \mathcal{F} la prise de transformée de Fourier.

Preuve. Une fois la première assertion démontrée, la formule ci-dessus (qui réalise bien une formule d'inversion car on y exprime ponctuellement f à partir des valeurs de sa transformée de Radon) est une conséquence de la formule d'inversion de Fourier étendue au cadre de la dimension d et non plus de la dimension 1, et de l'expression d'une intégrale volumique via le changement de coordonnées sphériques.

Il reste donc à prouver la première assertion de l'énoncé. On a par définition de la transformée de Fourier de f et en utilisant le théorème de Fubini, que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \omega\xi \rangle} dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{\langle \xi, x \rangle = p} f(x) e^{-i\omega p} d\mu_{r, \xi} \right) dr \\ &= \int_{-\infty}^\infty \text{R}[f](p, \xi) e^{-ip\omega} dp, \end{aligned}$$

ce qui prouve bien l'assertion et clôt la preuve de cette proposition. \diamond

En ce qui concerne la X-Ray Transform, nous avons un énoncé similaire qui lui aussi, en théorie du moins, permet l'inversion de cette transformation. C'est la :

Proposition 5.2 *Soit f une fonction d'énergie finie et à support compact dans \mathbf{R}^d ; alors, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y + t\xi) dt$$

qui définit $\text{XR}(y, \xi)$, $y \in \xi^\perp$, est convergente pour presque tout $y \in \xi^\perp$ et définit une fonction intégrable dans ξ^\perp . De plus, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, pour tout $\zeta \in \xi^\perp$,

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{\xi^\perp} \text{XR}(y, \xi) e^{-i\langle y, \zeta \rangle} dm_{\xi^\perp}(y), \quad (5.3)$$

où m_{ξ^\perp} désigne la mesure de Lebesgue sur l'hyperplan ξ^\perp . Si f est une fonction à support compact, d'énergie finie et de spectre intégrable, on a la formule de reconstitution

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\xi(u)^\perp} \text{XR}(y, \xi(u)) e^{-i\langle y-x, u \rangle} dm_{\xi^\perp}(y) \right) du, \quad (5.4)$$

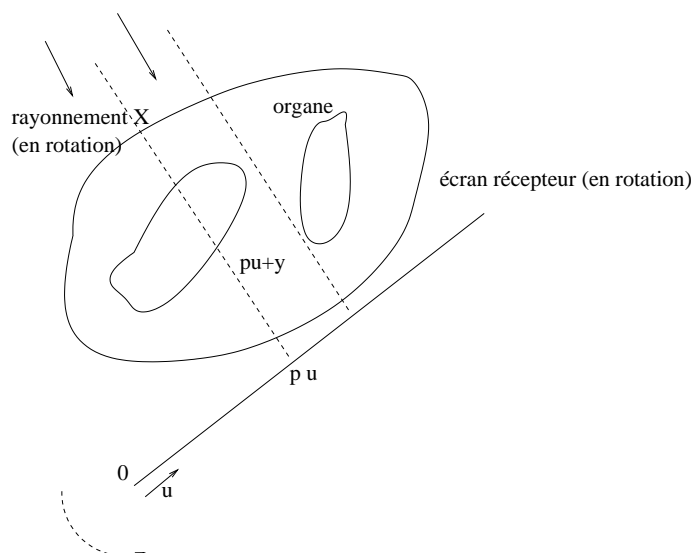
où $\xi(u)$ désigne un vecteur arbitraire de \mathbb{S}^{d-1} orthogonal à u .

Preuve. Cette preuve est identique à la preuve de la proposition précédente. C'est le fait que f soit intégrable (car d'énergie finie et à support compact) plus le théorème de Fubini, qui implique que pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, l'intégrale (5.2) converge pour presque tout $y \in \xi^\perp$ et définit une fonction intégrable dans ξ^\perp . C'est encore Fubini qui assure la validité de la formule (5.3). Enfin, c'est la formule d'inversion de Fourier qui conduit comme dans la preuve de la proposition précédente, à la formule de reconstitution (5.4). \diamond

5.1.2 Aspects pratiques : l'imagerie médicale

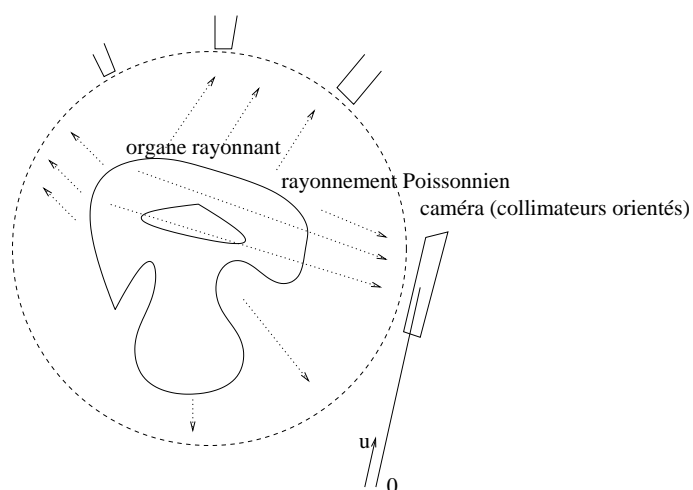
Introduite par J. Radon dans un article précurseur en 1917, la transformation de Radon et la transformation rayons-X ne deviendront opérationnelles qu'une fois acquis des algorithmes rapides pour le calcul de la FFT (Cooley-Tuckey, 1968). Dès lors, elles prendront son essor depuis le prix Nobel de Médecine attribué en 1979 à Cormack et Hounsfield pour connaître aujourd'hui les développements que l'on sait en imagerie médicale. Le principe du CAT-Scanner est simple : on soumet le champ à explorer à un rayonnement et les phénomènes d'absorption de photons font que l'on récupère, pour chaque direction \vec{u} du plan, le "cliché radiologique"

$$p \in \mathbf{R} \mapsto \mathcal{R}[f](p, \vec{u})$$

FIG. 5.1 – *Transformation X – Ray ; le CAT – Scanner*

C'est donc la X-Ray Transform qui, dans le cas particulier $d = 3$, se trouve matérialisée par le dispositif de CAT-Scanner en 3D schématisé sur la figure 5.1 ci-dessus.

On peut aussi imaginer le champ d'étude émettant un rayonnement (de fait un bruit Poissonnien), le rayonnement se trouvant capté par les senseurs de la caméra ; c'est aussi une autre manière d'envisager le "captage" de la transformée aux rayons X d'un organe ou d'un milieu ; c'est là le principe de l'*échographie*, esquissé sur la figure 5.2 ci dessous :

FIG. 5.2 – *Dispositif échographique*

L'organe émet un rayonnement, n'est plus traversé (et jouant le rôle d'"obstacle" générant une image "en négatif") comme dans le cas précédent.

5.1.3 Aspects numériques en 2D

Si $d = 2$, les deux transformations coïncident et la transformation aux rayons X est dans ce cas la transformation qui à une image $(x, y) \rightarrow I(x, y)$ associe l'image

$$(p, \theta) \in \mathbf{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow R[I](p, \theta) := \int_{\mathbf{R}} I(p \cos \theta - t \sin \theta, p \sin \theta + t \cos \theta) dt.$$

C'est cette transformation que nous inversons *via* la transformation de Fourier et la formule de projection donnée dans la proposition 5.1. Bien sûr, l'inversion numérique suppose une troncature de la transformation de Fourier au niveau du domaine des hautes fréquences, ce qui nécessite l'usage d'une fenêtre de troncature dans l'espace des fréquences ; ce mécanisme d'inversion est connu sous le nom de *rétroprojection* et ce sont les routines **radon** et **retroproj** qui réalisent respectivement, d'une part le calcul de la transformée de Radon d'une image (*via* un balayage digital, on appelle aussi la nouvelle image obtenue le *sinogramme* de l'image I), d'autre part, la restitution de l'image à partir de son sinogramme.

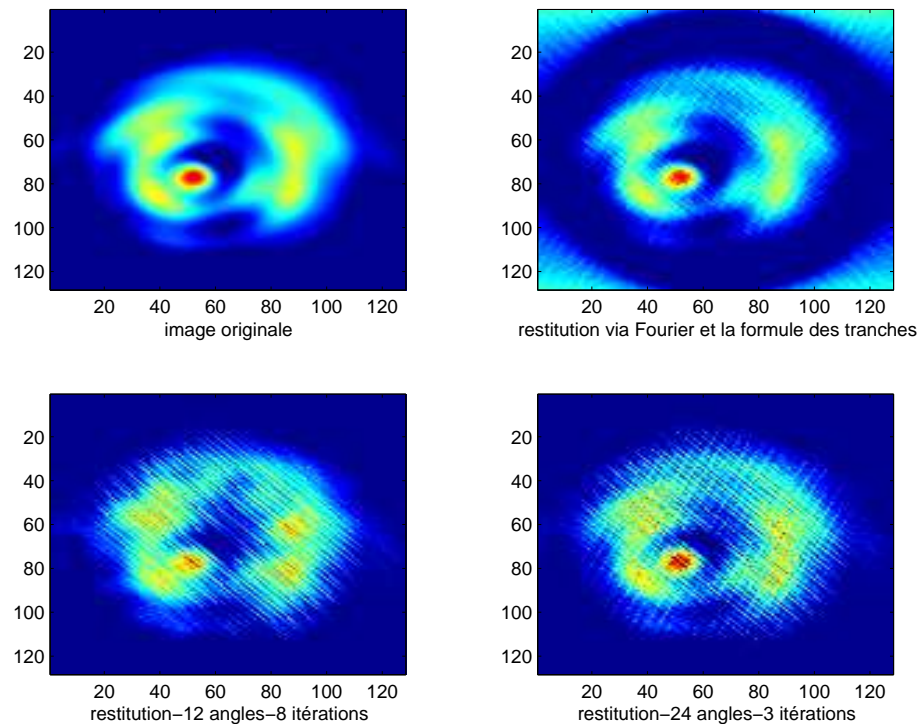


FIG. 5.3 – Inversion numérique de la transformée aux rayons X

Sur la figure 5.3 (en haut à gauche) nous avons figuré l'image origine I dont nous prenons la transformée de Radon, suivant la routine **MATLAB** dont voici le synopsis :

```
>> B = radon(R,tau,sigma,A);
function B = radon(R,tau,sigma,A);
%               B=radon(R,tau,sigma,A)
% Calcule la transformee de Radon (sinogramme)
% d'une image A=A(-R:tau:R-tau,-R:tau:R-tau)
% apres l'avoir tronque pour la localiser dans D(0,R)
```

```
% La sortie B(theta,p) est une image du type
% B(theta,p)= B(0:sigma:2*pi, -R:p:R-tau)
```

Le sinogramme obtenu est figuré en codes de couleurs sur la figure 5.4 ci-dessous (angles en ordonnées) :

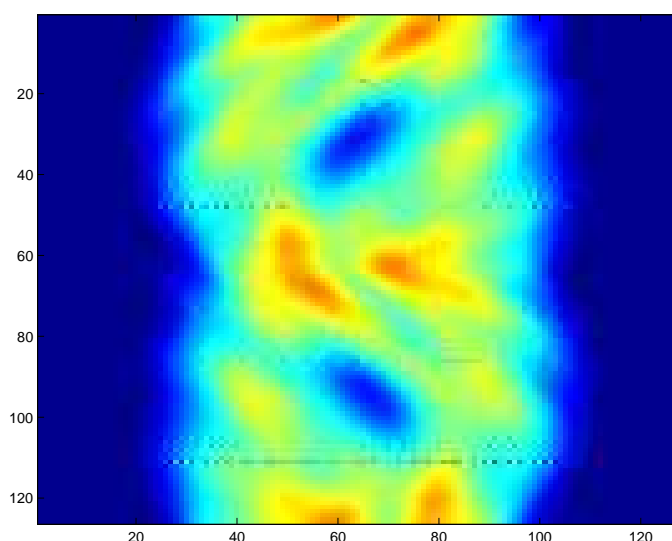


FIG. 5.4 – Sinogramme de l'image I

La méthode d'inversion théorique pour la transformée aux rayons X proposée ci-dessus (basée sur Fourier et la formule des projections) est implémentée en 2D sous la routine **MATLAB** dont voici le synopsis :

```
>>I = retroproj(R,tau,sigma,S)
function f=retroproj(R,tau,sigma,B);
%           f=retroproj(R,tau,sigma,B);
%Calcule l'inversion de la transformee de Radon A d'une image 2D
%A=A(-R:tau:R-tau,-R:tau:R-tau) par retroprojection; le pas angulaire
%est fixe egal a sigma; l'entree B est la transformee de Radon du
%signal s calculee selon B=radon(R,tau,sigma,A)
%(eventuellement bruitée)
```

L'image restituée à partir du sinogramme de I est l'image \tilde{I} affichée en haut à droite sur la figure 5.3; on constate une restauration convenable de I , que l'on préserverait si I était une image bruitée (la transformée de Radon, transformation intégrale, a tendance à affaiblir le bruit).

Cette restitution de l'image ne s'est avérée possible qu'à partir de la connaissance du sinogramme complet. Nous retrouvons ici une illustration du fossé séparant théorie et pratique : en théorie, le spectre d'une fonction à support compact et d'énergie finie est une fonction analytique et est donc entièrement déterminé (du fait du principe du prolongement analytique) à partir de ses valeurs en une infinité dénombrable de points dont l'ensemble présente un point d'accumulation ; a connaissance des images $\text{XR}[f](\cdot, \theta)$ pour une infinité dénombrable de θ suffit en principe à la détermination de la transformée de Fourier de f , donc de f . En pratique, le

problème de la restitution de l'original f à partir de ce que l'on convient d'appeler sa *X-Ray Transform incomplète* (où l'on ne dispose que des informations $\text{XR}[I](\cdot, \theta)$ pour un nombre fini de directions qui correspondent dans le cas $d = 3$ aux radiographies de l'objet f prises lorsque le système émetteur de rayonnement+ caméra est orienté suivant un nombre fini de positions et dans le cas $d = 2$ à la modélisation 2D plus simple qui nous occupe ici) s'avère numériquement un problème d'une toute autre nature, qu'il convient d'attaquer avec des outils d'analyse hilbertienne plutôt qu'avec l'outil Fourier (notons que ceci a été le leitmotif de ce cours).

L'analyse Hilbertienne se substitue en effet à l'outil Fourier pour proposer une autre méthode (itérative cette fois) de restitution permettant de prendre en compte non plus une transformée aux rayons X complète, mais une transformée incomplète.

On se place en dimension d quelconque. Supposons que f soit un signal inconnu, d'énergie finie et de support inclus dans la boule unité \mathbf{B}_d de \mathbb{R}^d . On appelle \mathbf{H} l'espace de Hilbert (pour le produit scalaire dérivé de l'énergie) constitué de tels objets. On peut associer à chaque direction $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ un opérateur A_ξ continu de \mathbf{H} dans $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ et défini par

$$A_\xi f[y] = \int_{\mathbb{R}} f(y_1 \eta_{\xi,1} + \dots + y_{d-1} \eta_{\xi,d-1} + t\xi) dt \text{ pour presque tout } y \in \mathbb{R}^{d-1},$$

où $\eta_{\xi,1}, \dots, \eta_{\xi,d-1}$ désigne une base orthonormée (choisie une fois pour toutes) de ξ^\perp . Le sous-espace affine

$$L := f + \text{Ker } A_\xi$$

représente le sous-espace des signaux \tilde{f} tels que

$$\text{XR}[f](y, \xi) = \text{XR}[\tilde{f}](y, \xi) \quad \forall y \in \xi^\perp.$$

En dimension 2, et si f est une image I , les éléments de L sont les images donnant la même image que I lorsque le rayonnement de la caméra est orthogonal à la direction ξ .

Si P_ξ désigne le projecteur affine orthogonal sur le sous-espace affine $f + \text{Ker } A_\xi$, on a, pour tout $g \in \mathbf{H}$,

$$P_\xi[g](x) = g(x) + \chi_{\mathbf{B}}(x) \frac{A_\xi[f - g](\langle x, \eta_{\xi,1} \rangle, \dots, \langle x, \eta_{\xi,d-1} \rangle)}{A_\xi[\chi_{\mathbf{B}}](\langle x, \eta_{\xi,1} \rangle, \dots, \langle x, \eta_{\xi,d-1} \rangle)}.$$

Si maintenant on choisit N directions ξ_1, \dots, ξ_N et que Q soit l'opérateur

$$Q = P_{\xi_N} \circ \dots \circ P_{\xi_1}.$$

On a figuré sur le diagramme 5.5 les divers sous-espaces affines $L_j := f + \text{Ker } A_{\xi_j}$, $j = 1, \dots, N$. Le schéma figurant ici ne fait que rendre compte (ce n'est pas une démonstration!) de la proposition "hilbertienne" suivante (soutenant l'algorithme dit des *projections itérées*).

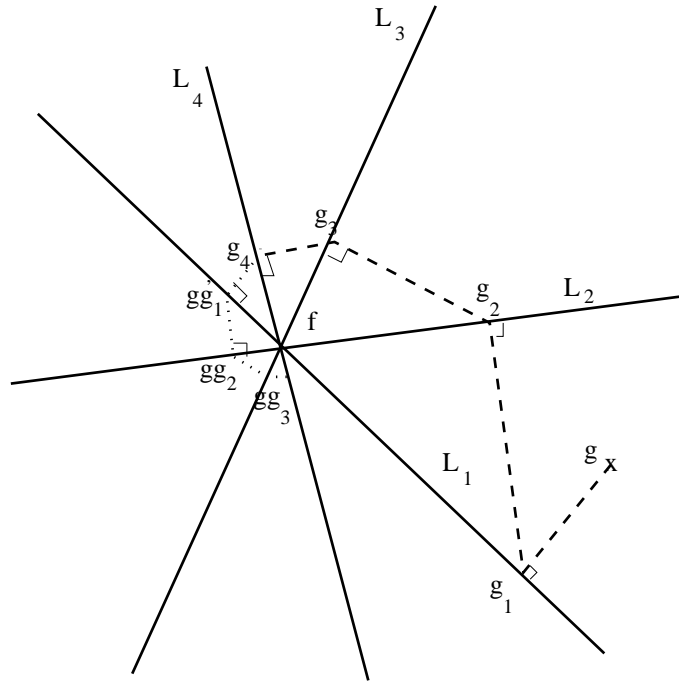


FIG. 5.5 – Algorithme des projections itérées

Proposition 5.3 Soient F_1, F_2, \dots, F_N , N sous espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert réel H , f un élément de H , et P_1, \dots, P_N , les projections orthogonales sur les sous-espaces affines respectifs $L_1 := f + F_1, \dots, L_N := f + F_N$. Soit P la projection orthogonale sur le sous espace affine $f + (F_1 \cap \dots \cap F_N)$. Alors, si Q est l'application affine $Q = P_N \circ \dots \circ P_1$, on a

$$Q^k[g] \rightarrow P[g]$$

pour tout g dans H lorsque k tend vers l'infini. De plus, lorsque $N = 2$ et

$$\cos \theta := \sup_{\substack{x_1 \in F_1^* \cap (F_1 \cap F_2)^\perp \\ x_2 \in F_2^* \cap (F_1 \cap F_2)^\perp}} \frac{|\langle x_1, x_2 \rangle|}{\|x_1\| \|x_2\|} < 1,$$

alors, on a l'information quantitative permettant l'estimation d'erreur dans cet algorithme itératif :

$$\|Q^k[g] - P[g]\| \leq (\cos \theta)^k \|g - P[g]\|.$$

Preuve. Tout d'abord, on remarque que l'on peut se ramener au cas où $f = 0$, ce qui nous permet de poser le problème au niveau des sous-espaces vectoriels et non plus affines. Les projections orthogonales sur des sous-espaces vectoriels fermés étant des opérateurs de norme égale à 1, on voit que si g est dans le noyau de $Q - \text{Id}$, on a

$$\|g\| \leq \|P_1[g]\| \leq \dots \leq \|Q[g]\| = \|g\|,$$

et donc $\|P_k[g]\| = \|g\|$, $j = 1, \dots, N$. Ceci implique (via Pythagore), que $P_k[g] = g$ pour tout k , soit $g \in F := F_1 \cap \dots \cap F_N$. On a donc $\text{Ker}(I - Q) = F$. D'autre part,

on rappelle qu'étant donné un opérateur linéaire continu L d'un Hilbert dans lui-même, il admet un unique opérateur adjoint, défini par la *formule d'adjonction*

$$\langle g, L[g'] \rangle = \langle L^*[g], g' \rangle,$$

qu'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé est autoadjointe, et que l'on a toujours, étant donné un opérateur linéaire continu L de H dans lui-même,

$$\text{Ker } L = \overline{\text{Im } L^*}^\perp.$$

Comme ici

$$\text{Ker } (I - Q^*) = \text{Ker } (I - Q) = F$$

(il suffit d'inverser l'ordre des projections orthogonales P_k), on peut donc décomposer l'espace de Hilbert H sous la forme

$$H = \text{Ker}(I - Q^*) \oplus^\perp \overline{\text{Im}(I - Q)} = F \oplus^\perp \overline{\text{Im}(I - Q)}.$$

Prouver le premier volet de la proposition revient donc à le prouver pour $g \in \overline{\text{Im}(I - Q)}$, ou encore, ce qui est suffisant par continuité de $I - Q$, pour tout $g \in \text{Im}(I - Q)$. Mais si $g = (I - Q)[y]$ et si

$$a := \lim_{k \rightarrow \infty} \|Q^k[y]\| > 0$$

(a existe bien car on a affaire à une suite décroissante de nombres positifs), on peut considérer la suite

$$u_k = Q^k[y] / \|Q^k[y]\|$$

et remarquer que $\|Q[u_k]\| \rightarrow 1$; ceci implique $(I - Q)[u_k] \rightarrow 0$, comme on le voit en utilisant une fois de plus Pythagore (on raisonne par récurrence sur le nombre N de projecteurs impliqués dans Q). On a donc, sous l'hypothèse $a > 0$,

$$[Q^k(I - Q)][y] = (I - Q)Q^k[y] \rightarrow 0.$$

Si maintenant $a = 0$, on a également $(I - Q)Q^k[y] \mapsto 0$. Par conséquent, pour tout g dans $\text{Im}(I - Q)$, on a $Q^k[g] \rightarrow 0 = P[g]$, ce qui conclut la preuve du premier volet de la proposition.

Pour le second volet, il suffit de remarquer que, compte tenu de la définition de $\cos \theta$,

$$\|Q[g]\| \leq \cos \theta \|g\|$$

pour tout g dans F^\perp et d'appliquer l'inégalité de manière itérative à $g - P[g]$. \diamond

Plaçons nous en dimension 2, f (inconnu) étant une image I dont on connaît le sinogramme, et choisissons des directions ξ_1, \dots, ξ_N en nombre fini (disons bien réparties sur $[0, 2\pi]$); à partir de $g = 0$, la connaissance du sinogramme de I permet le calcul des projections successives

$$[P_{\xi_N} \circ \dots \circ P_{\xi_1}]^k[0],$$

où P_{ξ_k} désigne la projection sur $L_k(I) := I + A_{\xi_k}$. Ce calcul est implémenté sous la routine **MATLAB** dont le synopsis est le suivant :

```

>> f=invradoniteree(m,R,tau,A,B,iter)
function f=invradoniteree(m,R,tau,A,B,iter);
%
%           f=invradoniteree(m,R,tau,A,B,iter);
%Inversion de la transformation de radon 2D suivant le
%schema des projections iteree. Ici B est le sinogramme
%(c'est-a-dire la transformee de Radon) d'une image
%
%           Ainit(-R:tau:R-tau,-R:tau:R-tau)
%tronquee au disque D(0,R); ce sinogramme
%peut etre eventuellement bruite.
%Les angles correspondant aux projections successives xi
%sont pris de 0 a 2*pi avec un pas de m*(2*pi/M), ou M designe
%le nombre de lignes de B (2*pi/M etant donc
%la resolution angulaire du sinogramme). L'algorithme est
%itere iter fois. la matrice A est la matrice choisie
%pour initier l'algorithme
%(en principe A=zeros(-R:tau:R-tau,-R:tau:R-tau)).
%Le mecanisme affiche un compteur d'iterations (ll).

```

La projection orthonogale sur le sous espace

$$\bigcap_{k=1}^N L_k[I]$$

vers laquelle converge la suite que génère cet algorithme si l'on prend pour A la matrice nulle et pour B le sinogramme de I est une image indiscernable (au point de vue de la transformée aux rayons X) de I lorsque la caméra enregistre les données (ou envoie un rayonnement) dans une direction orthogonale à l'une des directions ξ_k ; plus il y a de direction, plus la restitution approchée de I ainsi obtenue est fidèle. Par exemple, sur la figure 5.3 (en bas), on a figuré les résultats obtenus en retenant une direction sur 10 (soit 12 angles), puis une direction sur 5 (soit 24 angles) dans le choix des angles, puis en itérant plusieurs fois. On peut avantageusement comparer les résultats obtenus à ceux donnés par l'inversion utilisant Fourier et la rétroprojection.

D'autres méthodes de nature hilbertienne (évoquées dans ce cours) peuvent être exploités aux fins de l'inversion de la transformation de Radon, par exemple le *matching pursuit* (contre un dictionnaire d'images par Radon de pathologies), la décomposition en modes propres (POD); on peut aussi exploiter la matrice de la transformation de Radon écrite dans des bases d'ondelettes (dans l'espace source et l'espace but).

5.2 Face au problème de l'extrapolation des informations

Si s est un signal d'énergie finie et de spectre borné (ce qui signifie que la transformée de Fourier de s est nulle presque partout hors d'un intervalle $[-\Omega, \Omega]$), la formule d'inversion de Fourier

$$s = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \hat{s}(\omega) e^{i(\cdot)\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{s}(\omega) e^{i(\cdot)\omega} d\omega$$

assure que s peut être prolongée à \mathbb{C} tout entier en la fonction analytique

$$z \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{s}(\omega) e^{iz\omega} d\omega.$$

Le principe des zéros isolés pour les fonctions analytiques nous assure que si s est connu sur un intervalle $[-T, T]$, en théorie du moins, F est connu partout.

Bien sûr, il y a un pas de géant entre théorie et pratique et on se doute bien que l'extrapolation des signaux à spectre borné est un challenge irréalisable. D'une part, aucun signal n'est réellement à spectre borné (il y a toujours du bruit !); d'autre part, il n'y a pas de formule directe permettant l'extrapolation, même théorique.

Les méthodes hilbertiennes vont ici s'avérer utiles, voici comment. Dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$, soient F_1 et F_2 les deux sous-espaces définis par

$$F_1 = \{s \in L^2(\mathbb{R}) ; s = 0 \text{ presque partout hors de } [-T, T]\},$$

où T est fixé ($T > 0$) et

$$F_2 = \{s \in L^2(\mathbb{R}) ; \widehat{s} = 0 \text{ presque partout hors de } [-\Omega, \Omega]\},$$

où Ω est fixé ($\Omega > 0$). La projection orthogonale P_1 sur F_1 associe à un signal $s \in L^2(\mathbb{R})$ le signal tronqué

$$P_1[s] = s \chi_{[-T, T]} ;$$

la projection orthogonale P_2 sur F_2 associe à un signal $s \in L^2(\mathbb{R})$ le signal

$$P_2[s] : t \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} s(u) \frac{\sin \Omega(t-u)}{t-u} du$$

car la fonction ayant pour transformée de Fourier la fonction caractéristique $\chi_{[-\Omega, \Omega]}$ est la fonction

$$t \rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{\sin \Omega t}{t}$$

et que la transformation de Fourier échange convolution et multiplication.

Supposons que s soit un signal (inconnu) appartenant à F_2 ; connaître s sur $[-T, T]$ signifie connaître la projection $s_1 = P_1[s]$ sur F_1 . Si F désigne le sous-espace affine

$$F = s_1 + F_1^\perp$$

et P la projection orthogonale sur F , l'algorithme décrit par

$$\begin{aligned} s_2 &= P_2[s_1] \\ s_3 &= P[s_2] \\ s_4 &= P_2[s_3] \\ s_5 &= P[s_4] \\ &\vdots \end{aligned}$$

semble, au vu du diagramme suggéré sur la figure 5.6, donner un moyen d'approcher s . Ceci serait vrai si l'angle entre F_1^\perp et F_2 était non nul, ce qui signifie

$$\sup_{\substack{f_1 \in F_1^\perp \setminus \{0\} \\ f_2 \in F_2 \setminus \{0\}}} \frac{|\langle f_1, f_2 \rangle|}{\|f_1\| \|f_2\|} < 1,$$

ce qui malheureusement n'est pas le cas ici.

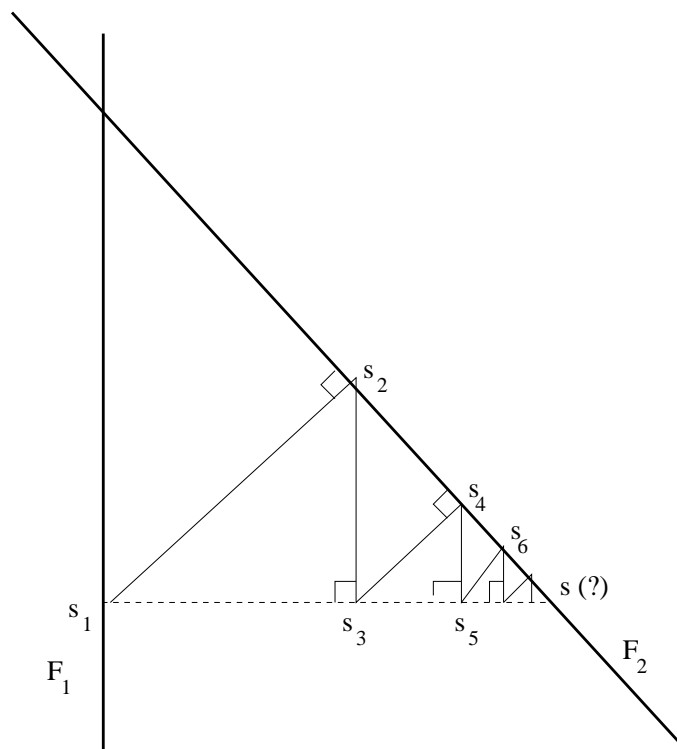


FIG. 5.6 – Algorithme des projections itérées (2)

Néanmoins, on peut montrer que l'algorithme proposé ici, dit *algorithme de Gerschberg-Papoulis* fonctionne (en théorie du moins); de fait, l'extrapolation s'avère possible au voisinage de $[-T, T]$. Cet algorithme est implémenté sous **MATLAB** sous la routine **papoulis** dont voici le synopsis :

```
>>f=papoulis(s,T0,T,tau,Omega,k)
function f=papoulis(s,T0,T,tau,Omega,k);
% f=papoulis(s,T0,T,tau,Omega,k);
% Etant donne un signal s sur -T0:tau:T0-tau
% de spectre inclus dans [-Omega,Omega],
% et un reel T entre 0 et T0, l'algorithme
% calcule l'extrapolation apres k iterations
% du signal s depuis l'intervalle [-T,T] jusqu'a
% l'intervalle [-T0,T0]. L'extrapolation n'est fiable
% que sur un intervalle [-T0-epsilon,T0+epsilon]
% avec epsilon petit.
```

L'algorithme a été implanté ci-dessous comme suit :

```
>>t=-10.24:.01:10.23
>>s=8.58*sinc(8.58*(t-.78))+3.27*sinc(3.27*(t+.84))+.14*sinc(.14*(t-.65))
>>f=papoulis(s,10.24,1,.01,20,5000);
```

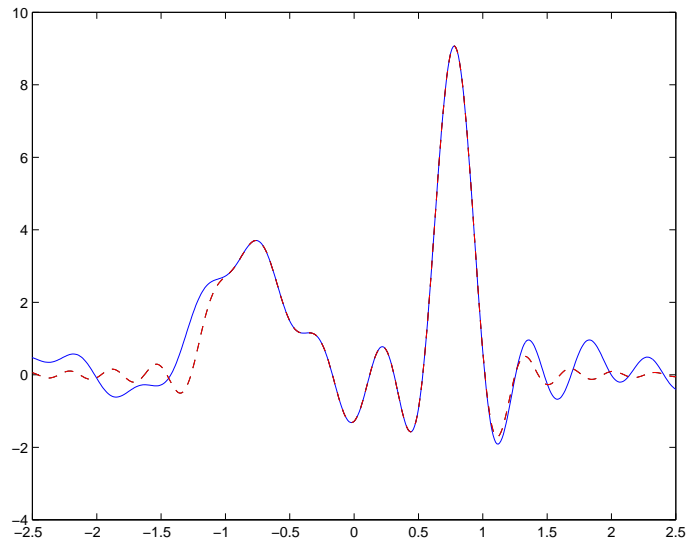



FIG. 5.7 – Extrapolation via Gerschberg-Papoulis

Sur la figure 5.7, on a représenté le signal original s qui est une combinaison de signaux du type

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi/2)t}{(\pi/2)t}$$

sur l'intervalle $[-2.5, 2.5]$ ainsi que l'extrapolation réalisée depuis l'intervalle $[-1, 1]$ (l'intervalle temporel de travail étant $[-10.24, 10.23]$) ; on constate qu'au bout de 5000 itérations, le signal “tentant” l'extrapolation représenté en pointillés tente de suivre l'original au moins à droite de l'instant $t = 1$ (plus difficilement à gauche de $t = -1$). Un zoom du “décrochage” entre $t = 1$ et $t = 1.5$ est aussi affiché sur la figure 5.8 et l'on y voit clairement comment le signal obtenu s'efforce de ne pas “décrocher” de l'original virtuel.

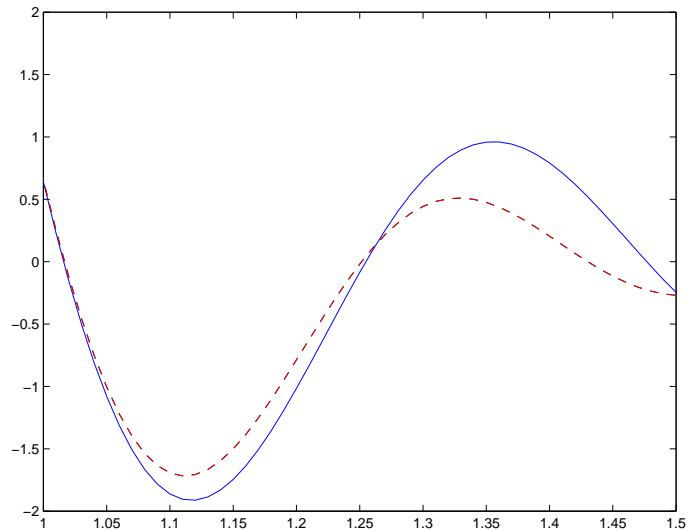


FIG. 5.8 – Extrapolation via Gerschberg-Papoulis (détail)

Ici encore, d'autres méthodes d'analyse hilbertienne pourraient être envisagées pour

tenter l'extrapolation, parmi elles l'utilisation d'algorithmes du type *matching pursuit* ou POD utilisant les fonctions propres de l'opérateur auto-adjoint de F_2 dans lui-même défini par

$$T = P_2 \circ P_1 .$$

Ces fonctions sont dites *fonctions prolate* et jouent un rôle intéressant, celui de concilier au mieux (au sens des moindres carrés) des localisations en temps et fréquences respectivement dans $[-T, T]$ et $[-\Omega, \Omega]$.

On conclura ici l'étude de ce second exemple où des méthodes d'algorithmique hilbertienne viennent “épauler” l'instrument de calcul ou d'analyse qu'est la transformation de Fourier.

Chapitre 6

Quelques aspects du traitement des signaux : le filtrage

Les cinq premiers chapitres de ce cours étaient centrés autour du problème de l'analyse des signaux ; ce dernier chapitre esquisse (dans le cadre discret seulement) les bases du filtrage de l'information, outil incontournable du traitement du signal et présente les diverses notions fondamentales liées à la notion de filtre.

6.1 Filtres digitaux ; réalisabilité, causalité, stationnarité

Un *filtre digital* est par définition un opérateur linéaire de l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ des suites $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes dont tous les termes, sauf au plus un nombre fini, sont nuls, à valeurs dans l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ des suites $(s(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes, tel que \mathcal{L} commute avec l'opérateur de translation dans le temps, dit aussi *shift*, $(u(k))_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow (u(k-1))_{k \in \mathbb{Z}}$.

Concrètement, un filtre digital correspond à l'action d'un appareil (on dit aussi une *boîte noire*) agissant de manière linéaire sur l'espace des signaux digitaux d'entrée et dont les paramètres restent immuables dans le temps. Tel est le cas par exemple des cellules électriques ou mécaniques, dont nous verrons plus loin des versions analogiques (l'espace des temps étant pensé continu et non plus discret).

Soit \mathcal{L} un tel filtre digital. La suite $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ définie comme la réponse de \mathcal{L} à la suite $(\delta_0^k)_{k \in \mathbb{Z}}$, où $\delta_0^k = 0$ si $k \neq 0$ et $\delta_0^0 = 1$ est dite *réponse impulsionnelle* du filtre. Cette réponse impulsionnelle permet d'exprimer le signal de sortie $\mathcal{L}[e]$ à partir du signal d'entrée suivant la liste de relations :

$$s(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)e(n-k), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (\dagger)$$

traduisant le fait que l'action d'un filtre discret se matérialise par l'opération de convolution.

Pour que les relations (\dagger) soient exploitables concrètement, il faut qu'il existe un entier $M \in \mathbb{N}$ tel que tous les $h(k)$ soient nuls pour $k \leq -M$; si en effet ce n'est pas le cas, il s'avère indispensable de disposer, étant donné un instant n , d'une infinité de valeurs du *futur* de l'entrée (c'est-à-dire des valeurs $e(n+k)$ pour une infinité

de $k > 0$) pour pouvoir calculer la sortie $s(n)$ à cet instant n . Un filtre digital dont le support de la réponse impulsionnelle est borné à gauche est dit *filtre réalisable* (ou encore à *capacité de mémoire finie*, ce qui exprime bien ce que cela veut dire, à savoir qu'il suffit de connaître le passé-présent de l'entrée, ainsi que son futur proche (sur un laps de temps fini, futur à mémoriser donc) pour être à même de calculer la sortie; si ce n'est pas le cas, il est dit *irréalisable*. On doit constamment garder à l'esprit le souci de ne concevoir, pour transposer la théorie à la pratique, que des filtres réalisables (quand bien même les filtres théoriques que l'on proposerait ne le seraient pas, mais il conviendra à ce moment de les "corriger", ce qui, on le verra, n'ira pas sans difficulté!).

Si la réponse impulsionnelle est de support dans \mathbb{N} ($h(k) = 0$ si $k < 0$), le passé-présent de l'entrée suffisent à la restitution de la sortie et le filtre est dit *causal*.

Reste un dernier concept, plus délicat, celui de *stationnarité*. Un filtre digital est dit *stationnaire* si et seulement si il se prolonge en un opérateur continu de l'espace

$$l^2(\mathbb{Z}) := \{(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}; \sum_{k \in \mathbb{Z}} |e(k)|^2 < \infty\}$$

des signaux digitaux d'énergie finie dans lui-même, ce qui signifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (e(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{L}[e](k)|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |e(k)|^2.$$

L'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$ est en correspondance isométrique *via* la transformation de Fourier \mathcal{F} des signaux 2π -périodiques avec l'espace $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ des signaux 2π -périodiques d'énergie finie sur $[0, 2\pi]$, équipé de la norme

$$\|f\|_{\mathbb{T}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

On rappelle que la transformation de Fourier \mathcal{F} (ou encore la prise de spectre des signaux périodiques) est l'application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ qui à un signal f associe la liste de ses coefficients de Fourier

$$c_n[f] := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

l'inverse étant l'application qui à une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ associe la série de Fourier

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$$

(la convergence ayant lieu dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$).

Si \mathcal{L} est un filtre digital stationnaire, l'opérateur $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{F}$ est un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ dans lui-même; comme la transformation de Fourier échange les opérations de convolution et de multiplication, cet opérateur $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{F}$ est l'opérateur de multiplication par la fonction de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ définie comme la transformée de Fourier inverse de la réponse impulsionnelle $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ (dont on sait qu'elle appartient à $l^2(\mathbb{Z})$), c'est-à-dire la fonction

$$\omega \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{ik\omega}$$

(la convergence de la série ayant lieu dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$). La fonction

$$H : \omega \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{ik\omega}$$

est dite *fonction de transfert* (ou encore *impédance*, voire *admittance*) du filtre digital stationnaire \mathcal{L} et l'action de ce filtre se lit encore, après transformation de Fourier :

$$\mathcal{F}[\mathcal{L}[e]] = H \times \mathcal{F}[e]$$

si $e = (e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est un signal digital d'entrée appartenant à $l^2(\mathbb{Z})$. La continuité de \mathcal{L} impose à la fonction H d'être une fonction essentiellement bornée, la quantité $\|H\|_\infty$ étant alors la norme de l'opérateur $\mathcal{L} : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$. La *transformée de Fourier* du filtre digital stationnaire \mathcal{L} de réponse impulsionnelle $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est par définition la fonction

$$\omega \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-ik\omega}$$

(elle aussi essentiellement bornée). On appelle *spectre d'énergie* de \mathcal{L} la fonction 2π -périodique essentiellement bornée

$$|H|^2 : \omega \rightarrow \left| \omega \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{ik\omega} \right|^2$$

et *distorsion d'amplitude* la fonction 2π -périodique essentiellement bornée

$$|H| : \omega \rightarrow \left| \omega \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{ik\omega} \right|,$$

cette dernière terminologie se trouvant justifiée par la formule :

$$|\mathcal{F}[\mathcal{L}[e]]| = |H| \times |\mathcal{F}[e]|.$$

6.2 Le design d'un filtre digital stationnaire à partir de sa fonction de transfert

Supposons que l'on veuille réaliser un filtre digital dont l'effet, lorsque le filtre agit sur une entrée $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, est de couper les fréquences dans le domaine $\{\omega ; \omega_{c,1} \leq |\omega| \leq \omega_{c,2}\}$ de $[-\pi, \pi]$ (on rappelle que, d'après le théorème de Shannon, $[-\pi, \pi]$ est l'intervalle fréquentiel utile). La fonction de transfert du filtre digital idéal devrait être la fonction :

$$\omega \rightarrow H(\omega) = \chi_{[-\omega_{c,2}, -\omega_{c,1}]} + \chi_{[\omega_{c,1}, \omega_{c,2}]} ;$$

or il s'avère que la suite des coefficients de Fourier d'une telle fonction est une suite $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ correspondant à la réponse impulsionnelle d'un filtre irréalisable ; en effet, le support de cette réponse impulsionnelle n'est pas limité à gauche. Pour réaliser un filtre digital à capacité de mémoire finie visant à un objectif s'approchant de celui du filtre digital idéal (mais non réalisable !) $\mathcal{L}_{\omega_{c,1}, \omega_{c,2}}$, il convient donc de remplacer la réponse impulsionnelle $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ par sa version tronquée $(h(l)w_{N/2}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, où

$$k \rightarrow w_{N/2}(k)$$

désigne une fonction “fenêtre” de longueur $N+1$ adaptée à l’intervalle $[-N/2 : N/2]$; cette fonction fenêtre est à choisir intelligemment de manière à esquiver au mieux le phénomène de Gibbs, par exemple en utilisant le fenêtrage de Hamming ou de Hanning; la suite (de longueur $N+1$) des coefficients $[h(-N/2), \dots, h(N/2)]$ correspond à la suite $[\tilde{h}_N(0), \dots, \tilde{h}_N(N)]$ des coefficients de la réponse impulsionnelle d’un filtre digital causal (dont la réponse impulsionnelle est à support dans $\{0, \dots, N\}$). La fonction de transfert d’un tel filtre approche $H \times \exp(i\omega p)$, où p est la partie entière de $N/2$; en remplaçant H par la fonction de transfert $\omega \rightarrow \tilde{H}(\omega) \exp(-ip\omega) H(\omega)$ et en raisonnant avec \tilde{H} au lieu de H comme ci-dessus, on construit, N (donc p) étant fixé, un filtre causal dont la fonction de transfert approche la fonction H . La construction d’un tel filtre est générée sous **MATLAB** par la commande

```
>>f=fir1(N,[omega_(c,1),omega_(c,2)],window);
```

Une fois la suite de ces coefficients calculée, l’action du filtre digital ainsi construit sur un vecteur d’entrées $e = (e(1), \dots, e(N))$ est donnée par la routine

```
>>s=filter(f,1,e);
```

La sortie est ici calculée à partir d’un vecteur d’entrées initial $(e(-N), \dots, e(0))$ égal au vecteur nul; le vecteur de sortie est un vecteur de même longueur que le vecteur d’entrée; si l’on introduit la routine

```
>>[s,final]=filter(f,1,e);
```

on construit le vecteur [final] des dernières N valeurs calculables du vecteur de sortie, vecteur que l’on verra ultérieurement comment prendre en compte dans un enchaînement de filtres.

Traitons par exemple le cas si signal suivant

```
>>t=0:01:10.24;
>>s=sin(22.457*t)+cos(35.21*t.*(t-8.7235))+ sin(56.865*t)
```

qui est la somme de deux signaux sinusoidaux et d’un signal à évolution linéaire de fréquences. On a affiché ce signal sur la figure 6.1 ci-dessous :

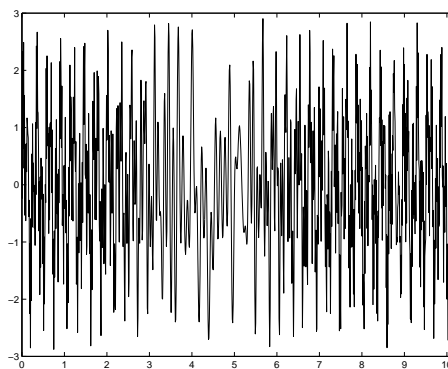


FIG. 6.1 – Le signal s à filtrer

On a ensuite construit les trois signaux s_1, s_2, s_3 correspondant respectivement au filtrage passe-bas (avec fréquence de coupure .1), le filtrage passe-bande (entre les seuils .1 et .2) et le filtrage passe-haut (au delà du seuil .2) en utilisant les routines **MATLAB** comme suit :

```

>> f1=fir1(256,.1);
>> f2=fir1(256,[.1,.2]);
>> f3=fir1(256,.2,'high');
>> s1=filter(f1,1,s);
>> s2=filter(f2,1,s);
>> s3=filter(f3,1,s);

```

Les trois signaux obtenus ont été affichés sur la figure 6.2 ci-dessous ; on constate que du fait de la longueur du filtre (ici 256), il y a un décalage inhérent à l'opération de convolution (les valeurs initiales de l'entrée nécessaires au calcul de la sortie à partir de l'instant $t = 0$ sont toutes prises égales à 0) ; on identifie dans les signaux s_2 et s_3 les deux composants basse-fréquence ($\omega \simeq 22$) et moyenne fréquence ($\omega \simeq 56$) du signal ; le signal à évolution linéaire de fréquences laisse une trace sur les trois composants s_1 , s_2 et s_3 .

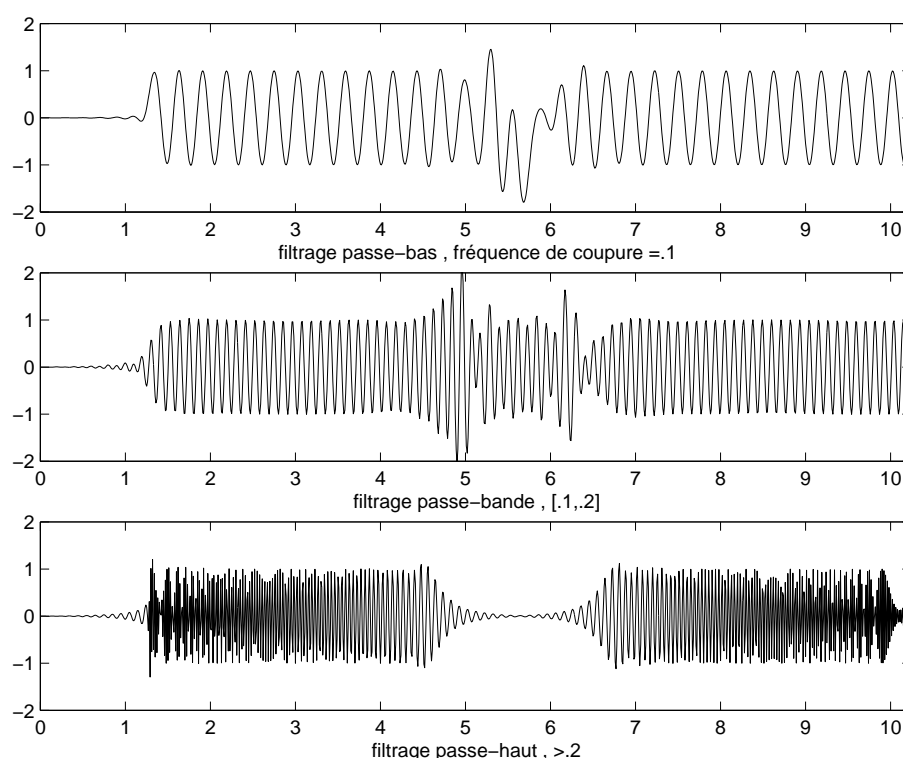


FIG. 6.2 – Filtrage de s

La fonction de transfert du filtre s'affiche (sur $[0, \pi]$ discrétisé en M points régulièrement espacés) à partir des routines

```

>> [h,omega]=freqz(f,1,M);
>> plot(omega,real(h));
>> plot(omega,imag(h));

```

Le *design* d'un filtre rationnel dont la fonction de transfert est donnée sur $[0, \pi]$ comme interpolant les valeurs w_1, \dots, w_M aux points $\omega_1, \dots, \omega_M$ est donnée, si $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_m]$ et $w = [w_1, \dots, w_m]$, par la routine

```

>> f=fir2(N,omega,w)

```


Ici encore, le filtre construit est de fait un filtre causal dont la réponse impulsionnelle est un vecteur de longueur $N + 1$ (la construction généralise simplement celle implémentée sous la routine `fir1` ci-dessus).

6.3 Notion de z -transformée d'un filtre digital

Si $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ désigne une suite indexée par \mathbb{Z} de nombres complexes, on peut lui associer sa z -transformée, qui par définition est la série formelle :

$$T^z((e(k))_k) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} e(k) X^{-k}.$$

L'ensemble $\mathbb{C}[[X, X^{-1}]]$ des séries formelles en X, X^{-1} a une structure de $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$ module ; on peut en effet définir le produit d'une série formelle

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) X^{-k}$$

par le polynôme de Laurent

$$P(X) = \sum_M^N h(k) X^k ;$$

on pose simplement

$$P(X) \bullet \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) X^{-k} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n) X^{-n},$$

où

$$s(n) := \sum_{k=M}^N h(k) e(n - k), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Notons que ce produit pose certaines difficultés ; on ne peut pas munir $\mathbb{C}[[X, X^{-1}]]$ d'une structure d'anneau (car la multiplication de deux séries formelles n'a pas de sens *a priori*) d'une part ; d'autre part, il n'y a pas intégrité : par exemple

$$(1 - X) \bullet \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} X^k \right) = 0$$

(comme série formelle) alors que ni le polynôme $1 - X$, ni la série formelle $\sum_{k \in \mathbb{Z}} X^k$, ne correspondent à la série formelle nulle. La z -transformée d'une suite $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ indexée par \mathbb{Z} n'est ni plus ni moins qu'un moyen commode de "stocker" la suite $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$.

Il y a une relation commode entre z -transformées et action de filtre digitaux. Supposons par exemple que \mathcal{L} soit un filtre digital de réponse impulsionnelle $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ et que $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une suite d'entrées avec les $e(k)$ tous nuls sauf un nombre fini. La z -transformée de la suite $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est alors un polynôme de Laurent P , tandis que la z -transformée de la réponse impulsionnelle $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ (on dit aussi *la z -transformée du filtre \mathcal{L}*) est la série formelle

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) X^{-k}.$$

On remarque que

$$T^z[(e(k))_k] \bullet T^z[(h(k))_k] = T^z[(s(k))_k], \quad (\dagger)$$

où

$$s(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e(n-k), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

ce qui montre que la formule (\dagger) (la z -transformée de la sortie est le produit de la z -transformée de l'entrée par la z -transformée du filtre) rend compte de manière "concise" de l'action du filtre (on écrit simplement une formule au lieu de la liste des formules $(\dagger\dagger)$, mais, bien sûr, cela revient rigoureusement au même!).

On serait tenté, étant donné un filtre \mathcal{L} de z -transformée $F = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) X^{-k}$ et un signal d'entrée $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ inconnu, mais dont on connaît la sortie $(s(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, de retrouver $(e(k))_k$ en écrivant formellement :

$$T^z[(e(k))_k] = \frac{1}{F} \bullet T^z[(s(k))_k],$$

mais bien sûr, tout s'écroule ici car $1/F$ n'a *a priori* pas de sens. Il est cependant un cas où $1/F$ pourrait avoir un sens, c'est le cas où le filtre \mathcal{L} est à capacité de mémoire finie, c'est-à-dire, si les nombres $h(k)$ sont tous nuls si $k < M$ et $h(M) \neq 0$. Dans ce cas

$$F(X) = X^M(h(M) + \sum_{k=1}^{\infty} h(M+k) X^{-k}) = h(M) X^M \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(M+k)}{h(M)} X^{-k}\right).$$

Il existe une z -transformée naturelle correspondant à $1/F$ car l'on peut effectuer par exemple la division de 1 par la série formelle

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(M+k)}{h(M)} X^{-k}$$

en effectuant une division suivant les puissances croissantes de X^{-1} (il y a un algorithme bien connu pour cela); on obtient donc (formellement)

$$\frac{1}{F(X)} = \frac{1}{h(M)} X^{-M} (1 + u(1) X^{-1} + u(2) X^{-2} + \dots)$$

et ainsi un développement

$$\frac{1}{F(X)} = \sum_{k=-M}^{\infty} \tilde{h}(k) X^{-k}$$

correspondant à la z -transformée d'un filtre à capacité de mémoire également finie. Formellement au moins, le rôle de ce filtre $\tilde{\mathcal{L}}$ devrait être dévolu à "inverser" le filtre \mathcal{L} .

Il y a cependant une ambiguïté dans la démarche que nous venons de présenter : si par exemple F est une fraction rationnelle (disons par exemple $F(X) = (X-1)(X-2)$ pour fixer les idées), on a

$$\frac{1}{F(X)} = \frac{1}{(X-1)(X-2)}$$

et l'on pourrait aussi développer formellement $1/F$ en écrivant

$$\frac{1}{F(X)} = \frac{1}{1-X} - \frac{1}{2-X} = \sum_{k=0}^{\infty} X^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (X/2)^k,$$

développement qui n'a rien à voir avec celui que donne la division suivant les puissances croissantes de X^{-1} ! Nous allons lever cette ambiguïté dans la section suivante en rappelant quelques résultats majeurs concernant la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$.

6.4 Quelques rappels d'algèbre concernant $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$

Si $F = N(X)/D(X)$ est une fraction rationnelle à coefficients complexes (écrite sous forme réduite ou encore non simplifiable, ce qui signifie que N et D n'ont pas de racine commune et D étant supposé unitaire) et si

$$D(X) = \prod_{j=1}^s (X - p_j)^{\mu_j},$$

p_1, \dots, p_s étant les racines de D et μ_1, \dots, μ_s les multiplicités de ces racines, alors il existe un choix unique constitué d'un polynôme E (de degré égal ou égal à la différence des degrés de N et D , avec $E \equiv 0$ si $\deg N < \deg D$) et de s listes de nombres complexes $\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,\mu_j}$, $j = 1 = \dots, s$, telles que

$$F(X) = E(X) + \sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^{\mu_j} \frac{\alpha_{j,l}}{(X - p_j)^l}; \quad (6.1)$$

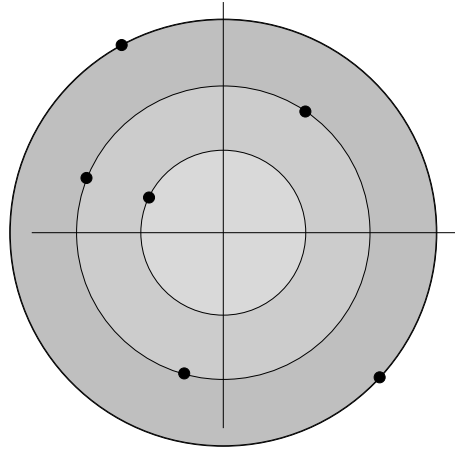
le polynôme E est en particulier le quotient dans la division euclidienne de N par D .

Si $F \in \mathbb{R}(X)$, les racines de D sont soit réelles (disons par exemple que $\alpha_1, \dots, \alpha_{s'}$ soient les racines réelles) soit complexes conjuguées deux à deux, les paires de racines complexes conjuguées étant identifiées par les couples (σ_j, τ_j) , $j = 1, \dots, s''$, avec $s' + 2s'' = \deg D$, σ_l représentant la somme des deux racines conjuguées, τ_l leur produit. La décomposition en éléments simples de F s'organise dans ce cas sous la forme

$$F(X) = E(X) + \sum_{j=1}^{s'} \sum_{l=1}^{\mu_j} \frac{\alpha_{j,l}}{(X - p_j)^l} + \sum_{j=1}^{s''} \sum_{l=1}^{\mu_j} \frac{\beta_{j,l} + \gamma_{j,l}X}{(X^2 - \sigma_j X + \tau_j)^l}, \quad (6.2)$$

les coefficients $\beta_{j,l}, \gamma_{j,l}$, $j = 1, \dots, s''$, $l = 1, \dots, \mu_j$, étant dans ce cas réels.

Le fait qu'une fraction rationnelle se décompose en éléments simples montre qu'elle induit une partition du plan complexe en un certain nombre de couronnes concentriques de centre l'origine, la dernière étant une couronne non bornée du type $\{z \in \mathbb{C}; |z| \geq R\}$. Ces couronnes sont limitées par les cercles contenant les pôles (voir la figure 6.3).

FIG. 6.3 – Partitionnement de \mathbb{C} grâce à une fraction rationnelle

Dans chacune des couronnes ouvertes ainsi délimitées, il existe une unique manière de développer la fonction

$$z \rightarrow F(z)$$

sous la forme d'une série de puissances (positives ou négatives) de $1/z$ de manière à ce que dans la couronne le développement soit convergent. Pour cela, on utilise la décomposition (6.2) en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et l'on voit que l'on est ramené à développer des expressions du type

$$\frac{1}{(z-p)^\nu}, \quad p \in \mathbb{C}^*, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

que l'on écrit, soit

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^\nu}{p^\nu} \frac{1}{(1-z/p)^\nu} &= \frac{(-1)^\nu}{p^\nu} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (z/p)^k \right)^\nu \\ &= \frac{(-1)^\nu}{p^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+\nu-1)!}{k!} (z/p)^k \end{aligned}$$

si la couronne est dans $D(0, |p|)$ ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^\nu} \frac{1}{(1-p/z)^\nu} &= \frac{1}{z^\nu} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (p/z)^k \right)^\nu \\ &= \frac{1}{z^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+\nu-1)!}{k!} (p/z)^k \end{aligned}$$

si le rayon inférieur de la couronne est strictement plus grand que $|p|$.

On constate qu'une seule couronne se plie au fait que le développement de F qui lui correspond puisse être interprété comme la z -transformée d'un filtre réalisable : c'est la couronne non bornée et le développement de F que l'on y trouve est celui que fournirait la division de N par D suivant les puissances croissantes de X^{-1} . Derrière une fraction rationnelle, se cache en fait un et un seul filtre réalisable, celui dont la z -transformée est donnée par le développement en série de Laurent de F dans la couronne non bornée $\{z \in \mathbb{C}; |z| > R\}$, où R désigne le maximum des modules des pôles de F .

Le filtre digital associé à une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ donnée est réalisable, mais n'est stationnaire que si tous les pôles de F sont à l'intérieur du disque unité.

Si $F \in \mathbb{R}(X)$ et si l'on pense à la décomposition (6.2), ce filtre se réalise concrètement par des montages en série idéaux de filtres simples, correspondant à une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{\beta}{(X^2 - \sigma X + \tau)}$$

où σ et τ sont des nombres réels tels que $\sigma^2 - 4\tau < 0$ ou au polynôme X , suivis de montages en parallèle (le produit des fractions rationnelles correspond à l'enchaînement de filtres, donc au montage en série idéal, la somme à l'addition de filtres, donc au montage en parallèle idéal). Il faut prendre garde, concernant les montages en série ou en parallèle de cellules électriques, que les montage en série ou en parallèles ordinaires ne sont pas des montages en série ou en parallèle idéaux car il y a bien sûr des effets pervers de *feed-back* liés à la loi d'Ohm.

6.5 Filtres A.R, filtres A.R.M.A

On s'intéresse dans cette section aux *boîtes noires* correspondant à des filtres digitaux dont la z -transformée correspond au développement en série de puissances croissantes de X^{-1} (ou au développement de Laurent dans la couronne non bornée) d'une fraction rationnelle du type :

$$F(X) = \frac{\sum_{k=0}^M b(k)X^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a(k)X^{-k}}.$$

Si $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est un signal d'entrée de support fini, la z -transformée de la sortie est liée à la z -transformée de l'entrée par la relation :

$$\left(1 + \sum_{k=1}^N a(k)X^{-k}\right) \bullet T^z[(s(k))_k] = \left(\sum_{k=0}^M b(k)X^{-k}\right) \bullet T^z[(e(k))_k]$$

et le filtre est donc régi par le jeu de relations suivantes entre entrées et sorties :

$$s(n) + \sum_{k=1}^N a(k)s(n-k) = \sum_{k=0}^M b(k)e(n-k), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Du point de vue pratique, ce filtre (qui n'est en général pas stationnaire, sauf si les pôles de F sont tous dans le disque unité ouvert) est implémenté (agissant sur un signal digital d'entrée e) sous l'une ou l'autre des trois commandes suivantes :

```
>> f= filter(b,a,e);
>> f= filter(b,a,e,init);
>> [f,final]=filter(b,a,e);
>> [f,final]=filter(b,a,e,init);
```

où a et b désignent les vecteurs $(a(k))_k$ et $(b(k))_k$ correspondant respectivement au dénominateur et au numérateur de la fraction rationnelle F ; le vecteur "init" représente un vecteur initial de sorties (en $s(-1), \dots, s(-N)$) nécessaire pour calculer

$s(n)$ à partir de l'entrée (si les $e(k)$, $k = -M, \dots, -1$ sont supposés nuls) ; on fait jouer un rôle à ce vecteur “init” lorsqu'il s'agit d'enchaîner les actions de divers filtres digitaux de ce type. Le vecteur “final” est le vecteur des N dernières composantes de la sortie, il est prêt à être introduit dans un filtre ultérieur.

Si tous les $b(k)$ sont nuls pour $k \geq 1$, le filtre est dit *auto-régressif* (ou encore A.R) ; dans le cas général (où les $a(k)$ et les $b(k)$ sont quelconques), le filtre est dit filtre A.R.M.A (*Auto -Regressive with Moving Average*, ce que l'on traduit par (*autorégressif à moyenne glissante*). On justifiera cette terminologie au paragraphe suivant lorsque nous mettrons en lumière la relation entre la conception (ou encore le *design*) de tels filtres et les processus discrets que ces filtres ont pour fonction de décorréler. Les modèles de filtres A.R ou A.R.M.A joueront un rôle majeur dans l'analyse ou la synthèse de la parole. Leur “design” implique le choix de M et N (les “ordres” du filtre), puis le choix des coefficients.

Il est dès à présent naturel de concevoir que si un signal discret obéit à une équation aux différences du type

$$e(n) - a(1)e(n-1) - \dots - a(N)e(n-N) = 0$$

(e est corrélé à ses “décalés” dans le passé, ce qui, on le verra, est une propriété typique des empilement de signaux périodiques élémentaires discrétisés, c'est-à-dire des empilements finis d'harmoniques), le filtre autorégressif correspondant à la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{1 - a(1)X^{-1} - \dots - a(N)X^{-N}}$$

jouera un rôle clef pour “décorrélérer” l'entrée e ou voir si elle est présente ou non dans le contenu d'une entrée plus complexe.

6.6 Les filtres analogiques

Du point de vue de l'ingénierie, on est amené à modéliser des filtres pour le traitement des signaux analogiques ; ces filtres sont alors traduits en des filtres digitaux pour agir sur des signaux digitaux (le passage du digital à l'analogique étant conditionné par le choix d'un pas de temps τ ou d'un multi-pas (τ_1, τ_2) lorsque l'on travaille en dimension 2. Nous esquisserons ce point de vue très brièvement dans cette section ; les mathématiques qui y sont impliquées relèvent non plus des mathématiques discrètes, mais de l'analyse, le processus de “discrétisation” n'intervenant que dans un second temps.

6.6.1 Signaux analogiques : le point de vue “distribution”

Revenons un instant sur le passage de l'analogique au digital évoqué au tout début de ce cours (section 1.1). La valeur ponctuelle d'un signal $t \mapsto s(t)$ défini sur un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$ de temps en un instant précis $t_0 \in I$ ou celle d'une image $(x, y) \mapsto I(x, y)$ en un point précis (x_0, y_0) de l'ensemble où elle est définie sont des quantités impossibles à évaluer de manière pratique. On préférera “modéliser” par exemple $s(t_0)$ par

$$s(t_0) \simeq \frac{1}{2\epsilon} \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} s(u) du$$

(avec $\epsilon > 0$ très petit) ou, si l'on préfère, remplacer le test de s contre la fonction $t \mapsto (1/2\epsilon)\chi_{[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]}(t)$ par un test contre une fonction “plus douce”

$$s(t_0) \simeq \int s(u)\varphi_{t_0}(u) du = \langle s, \varphi_{t_0} \rangle,$$

où φ_{t_0} est une fonction de classe C^∞ , d'intégrale 1 (ou d'énergie 1 si l'on adopte le point de vue énergétique pour la normalisation des phénomènes), localisée au mieux dans un intervalle aussi petit que possible au voisinage de t_0 (par exemple une gaussienne d'intégrale 1 ou d'énergie 1 ajustée de manière à être localisée au mieux près de t_0).

Le signal $t \mapsto s(t)$ n'est plus pensé comme un signal fonction, mais il est perçu comme agissant sur les fonctions test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, de classe C^∞ sur \mathbb{R} et à support borné. Ce point de vue (penser les fonctions comme des distributions) permet d'introduire des êtres analogiques qui échappent à la modélisation en termes de fonction, tels l'impulsion de Dirac en l'origine

$$\delta_0 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \langle \delta_0, \varphi \rangle := \varphi(0)$$

qu'il faudrait modéliser comme une fonction de masse 1 localisée exactement sur un point précis (ici l'origine) précis, ce qui est impossible car on sait que la valeur ponctuelle d'une fonction en un point particulier ne compte pour rien dans le calcul de son intégrale ou de son énergie! L'ingénieur “approche” (pour en avoir une représentation graphique visuelle) l'impulsion de Dirac par la fonction $t \mapsto (1/2\epsilon)\chi_{[-\epsilon, \epsilon]}(t)$ pour $\epsilon > 0$ arbitrairement petit mais ce n'est là qu'une approximation.

Ce point de vue, initié par Paul Dirac dès les années 1920, puis formalisé du point de vue mathématique par l'école russe (autour de Sobolev) et Laurent Schwartz dans les années 1945-1950, permet la dérivation des “fonctions” suivant le schéma inspiré de la formule d'intégration par parties (on dit aussi “formule des sauts”)

$$\langle s', \varphi \rangle := -\langle s, \varphi' \rangle$$

(*idem* en deux dimensions). On le retrouve d'ailleurs dans l'analyse (continue) en temps-échelles telle que nous l'avons développé dans les sections 3.2 et 3.3. Ainsi, la “dérivée” de la fonction “saut” Y (dite d'Heaviside) définie par $Y(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $Y(t) = 0$ si $t < 0$ est donnée par

$$\langle Y', \varphi \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(u) du = \varphi(0)$$

et l'on a donc dans ce formalisme commode la formule fondamentale $Y' = \delta_0$.

Parmi les signaux-distributions sur \mathbb{R} , les signaux analogiques “causaux”, c'est-à-dire ceux tels que $\langle s, \varphi \rangle = 0$ dès que le support de φ est inclus dans $] -\infty, 0[$ sont appelés à jouer un rôle important car on peut les “convoler” entre eux suivant la règle

$$\langle (s_1 * s_2), \varphi \rangle = \langle s_1(t_1) \otimes s_2(t_2), \varphi(t_1 + t_2) \rangle,$$

règle qu'un ingénieur s'empressera d'écrire de manière formelle

$$s_1 * s_2(t) = \int_0^\infty s_1(u)s_2(t-u) du = \int_0^\infty s_1(t-u)s_2(u) du,$$

opération où l'on reconnaît immédiatement la version analogique de la convolution discrète que nous avons rencontré comme l'opération sous-jacente au passage à travers une boîte noire digitale (ou un filtre digital), opération se pliant aux règles de linéarité et de temps-invariance (section 6.1).

6.6.2 Filtres analogiques causaux, filtres rationnels

Un filtre analogique causal correspond à la convolution avec un signal distribution causal h dit *réponse impulsionnelle* du filtre.

Plutôt que d'utiliser la transformation de Fourier (ou la Z -transformée) comme dans le cas des filtres digitaux, on préfère utiliser la *transformée de Laplace* du filtre (si elle existe) ; c'est, si on peut la définir dans un demi-plan ouvert à droite $\{\operatorname{Re} p > x\}$ ($x \in \mathbb{R}$) du plan complexe, la fonction

$$p \in \{\operatorname{Re} p > x\} \mapsto F(p) := \langle h, e^{-pt} \rangle,$$

où h est la réponse impulsionnelle du filtre ; cette construction n'est pas toujours possible, comme en témoigne l'exemple du filtre de réponse impulsionnelle $h : t \mapsto Y(t)e^{t^2}$! On remarque cependant que la transformée de Laplace du filtre de réponse impulsionnelle $\delta^{(k)}$ (dérivée k -ème de l'impulsion de Dirac) se définit sans problème et est la fonction polynômiale (définie dans \mathbb{C} tout entier)

$$p \in \mathbb{C} \mapsto p^k,$$

que celle du filtre de réponse impulsionnelle Y est

$$p \in \{\operatorname{Re} p > 0\} \mapsto \frac{1}{p},$$

et, plus généralement, que celle du filtre de réponse impulsionnelle

$$t \mapsto Y(t) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda t}, \quad \alpha > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

est la fonction

$$p \in \{\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda\} \mapsto \frac{1}{(p - \lambda)^\alpha},$$

la détermination de l'argument utilisée pour calculer la fonction puissance étant celle prise dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

Grâce à la décomposition en éléments simples (sur \mathbb{C}), on voit que toute fraction rationnelle en p correspond de manière bi-univoque à un filtre causal, la fraction élémentaire $1/p$ correspondant au filtre causal agissant sur un signal causal d'entrée e par

$$e(t) \mapsto \left[s : t \mapsto \int_0^t e(u) du \right]$$

(filtre dont la réponse impulsionnelle est la fonction d'Heaviside Y).

Les filtres analogiques causaux ainsi en correspondance avec les fractions rationnelles forment la classe des *filtres analogiques rationnels*. La *fonction de transfert* F d'un tel filtre (analogique) est par définition la fraction rationnelle qui lui correspond.

Remarque. Il existe bien sûr des filtres analogiques causaux intéressants qui ne sont pas rationnels : par exemple, le filtre obtenu en composant un filtre de réponse impulsionnelle Y avec un filtre de réponse impulsionnelle $t \mapsto Y(t)t^{-1/2}/\Gamma(1/2)$ a pour fonction de transfert la fonction :

$$p \in \{p; \operatorname{Re} p > 0\} \mapsto p^{1/2}$$

et, compte-tenu que le filtre dérivateur $e \mapsto e' = D[e]$ a lui comme fonction de transfert $p \mapsto p$, peut être interprété comme un filtre *dérivateur d'ordre 1/2* ; les filtres analogiques causaux

correspondant ainsi à la *dérivation fractionnaire* (ce sont de fait des filtres “intégrateurs” !) jouent, on s’en doute, un rôle pratique très intéressant dans de nombreux domaines de l’ingénierie.

Un filtre analogique rationnel est *stable* si les pôles de sa fonction de transfert sont tous dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} p < 0\}$ et si de plus sa fonction de transfert (rationnelle) s’écrit $F(p) = N(p)/D(p)$ avec $\deg N < \deg D$; dire qu’un filtre analogique rationnel est stable signifie concrètement que sa réponse impulsionnelle (causale) h est une fonction de module intégrable sur $[0, +\infty[$ et que le filtre (qui agit par convolution avec h) transforme les entrées analogiques essentiellement bornées en sorties essentiellement bornées. Si la fonction de transfert F d’un filtre analogique rationnel présente des pôles de partie réelle nulle qui soient tous simples (tous les autres étant de partie réelle strictement négative), le filtre est dit seulement *faiblement stable* ; il envoie les entrées bornées et limitées dans le temps en des sorties bornées. Ce concept de stabilité (ou au moins de faible stabilité) est très important du point de vue pratique dans le “*design*” des filtres rationnels analogiques *via* leur fonction de transfert ; le souci de stabilité est, on s’en doute, primordial.

La transformée de Fourier d’un filtre rationnel analogique stable (éventuellement faiblement stable) de fonction de transfert la fraction rationnelle $p \mapsto F(p)$ est la fonction

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto F(i\omega) ;$$

c’est le *spectre* de la réponse impulsionnelle h , c’est-à-dire la fonction

$$\hat{h} : \omega \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{-i\omega u} du .$$

6.6.3 Filtres analogiques rationnels de Butterworth, de Tchebychev, etc.

Si \mathcal{L} est un filtre rationnel stable de transformée de Fourier

$$\hat{\mathcal{L}} : \omega \in \mathbb{R} \mapsto F(i\omega)$$

(F désignant la fonction de transfert de \mathcal{L}), la relation

$$\mathcal{L}[e] = s$$

(traduisant l’action du filtre sur un signal analogique d’entrée e) se transpose (puisque la prise de transformée de Fourier échange formellement les opérations de convolution et de multiplication) en la relation :

$$\hat{\mathcal{L}} \times \hat{e} = \hat{s} ;$$

le spectre (ou transformée de Fourier) d’un signal-distribution analogique s est ici défini *via* son test sur les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \langle \hat{e}, \varphi \rangle &:= \langle e, \hat{\varphi} \rangle \\ \langle \hat{s}, \varphi \rangle &:= \langle s, \hat{\varphi} \rangle , \end{aligned}$$

où

$$\hat{\varphi} : \omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) e^{-i\omega u} du .$$

Dans ce contexte analogique, ni le filtre *passé-bas* idéal en théorie du signal, dont l'effet est de “tailler” les fréquences au niveau d'un seuil de coupure ω_c , ni les filtres *passé-bande* (*resp.* *stop-bande*) dont l'effet est d'extraire du signal les composantes incluses (*resp.* exclues) du point de vue fréquentiel dans une bande de fréquence donnée $\{\omega_{c1} \leq |\omega| \leq \omega_{c2}\}$ donnée, ne sont physiquement réalisables (il n'existe pas de signal causal ou tout au moins de support limité à gauche dont le spectre est la fonction caractéristique d'un segment donné dans l'espace des fréquences. Il est donc naturel de tenter de réaliser l'opération de filtrage *passé-bas* analogique au seuil de coupure ω_c (ou tout au moins une opération ayant un effet sensiblement identique) *via* un filtre rationnel analogique d'ordre M dont la transformée de Laplace serait

$$R^{(\omega_c, M)}(p) = \frac{1}{A_M(p)}$$

avec

$$A_M(p) = 1 + a(2)p + \dots + a(M)p^M.$$

La modélisation approchée du filtrage *passé-bas* par des filtres rationnels analogiques induit alors (par différence) une modélisation des filtrages *passé-bande*, *stop-bande*, *passé-haut*.

Ce souci de “coller” au filtre *passé-bas* idéal par des filtres analogiques rationnels d'ordre donné peut s'accompagner de diverses autres exigences ; en voici par exemple deux :

- préserver au mieux les composantes basse-fréquences du signal traité (en dessous du seuil de coupure ω_c), en évitant qu'elles ne soient détériorées au moment de leur passage à travers le filtre. Ce souci est par exemple présent dans les problèmes pratiques que pose le repiquage d'enregistrements anciens doublés de signaux bruités ;
- privilégier le souhait de rendre le plus brutal possible le phénomène de coupure des composantes fréquentielles au seuil ω_c .

Les deux exigences ci-dessus ne sont pas conciliables si l'on prétend les réaliser de manière optimale à ordre fixé. La première conduira à ce que l'on appellera la génération des *filtres de Butterworth*, la seconde à celle des *filtres de Tchebychev*. Nous évoquerons aussi dans cette section d'autres modèles de filtres rationnels classiques, tels les filtres elliptiques.

Les filtres de Butterworth

Si le filtre que l'on veut réaliser pour “tailler” les fréquences au seuil ω_c est réel et d'ordre M , on doit avoir, $h^{(\omega_c, M)}$ désignant sa réponse impulsionnelle,

$$\begin{aligned} |\hat{h}^{(\omega_c, M)}(\omega)|^2 &= \frac{1}{1 + a(2)i\omega + \dots + a(M+1)(i\omega)^M} \\ &\quad \times \frac{1}{1 - a(2)i\omega + \dots + a(M+1)(-i\omega)^M} \\ &= \frac{1}{1 + \tilde{a}(2)\omega^2 + \dots + \tilde{a}(2M)\omega^{2M}}, \end{aligned}$$

où les $\tilde{a}(2k)$, $k = 1, \dots, M$, sont des nombres réels. Afin que cette fonction (qui représente le spectre d'énergie du filtre) soit la plus plate possible au voisinage de 0, on se doit de choisir $\tilde{a}(2) = \dots = \tilde{a}(2(M-1)) = 0$. Pour que l'effet de coupure

soit marqué au seuil ω_c , on doit choisir le paramètre $a(2M)$ de manière à ce que, dès que $|\omega| \geq \omega_c$, on ait

$$|\hat{h}^{(\omega_c, M)}(\omega)|^2 \leq \frac{1}{2} = \frac{1}{2} |\hat{h}^{(\omega_c, M)}(0)|^2.$$

Ceci nous conduit à choisir de filtre de manière à ce que

$$|\hat{h}^{(\omega_c, M)}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2M}}.$$

Mais alors la fonction de transfert du filtre $F^{(\omega_c, M)}$ se doit de vérifier, puisque les zéros d'une fraction rationnelle non identiquement nulle sont isolés,

$$F^{(\omega_c, M)}(p) F^{(\omega_c, M)}(-p) = \frac{1}{1 + (-1)^M (p/\omega_c)^{2M}}.$$

Les pôles de la fraction rationnelle $F^{(\omega_c, M)}(p)$ sont donc à prendre dans la liste des racines complexes du polynôme

$$1 + (-1)^M (p/\omega_c)^{2M},$$

le tri s'effectuant de manière à ne conserver que les racines de ce polynôme situées dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} p \leq 0\}$ afin d'assurer, sinon la stabilité, du moins la stabilité au sens faible du filtre.

Deux cas sont à distinguer :

- si M est impair, les racines à conserver sont le nombre réel $-\omega_c$ et les nombres complexes $\omega_c \exp(i\gamma_k)$, $k = 1, \dots, [M/2]$, et leurs conjugués, choisis de manière à ce que γ_k soit de la forme $\gamma_k = \pi q_k/M$, $q_k \in \{0, \dots, 2M-1\}$, et $\cos \gamma_k \leq 0$; notons qu'en fait, aucune de ces racines n'est sur l'axe imaginaire dans ce cas; la fonction de transfert du filtre analogique de Butterworth d'ordre M et de seuil de coupure ω_c est donc dans ce cas (M impair)

$$F^{(\omega_c, M)}(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right) \prod_{l=1}^{[M/2]} \left(1 - 2 \cos \gamma_l \frac{p}{\omega_c} + \frac{p^2}{\omega_c^2}\right)};$$

le filtre est dans ce cas stable;

- si M est pair, les racines à conserver sont les nombres complexes $\omega_c \exp(i\delta_k)$, $k = 1, \dots, M/2$, et leurs conjugués, choisis de manière à ce que δ_k soit de la forme $\delta_k = \pi(2q_k + 1)/2M$, $q_k \in \{0, \dots, 2M-1\}$, et $\cos \delta_k \leq 0$; cette fois, il y a deux racines conjuguées sur l'axe imaginaire; la fonction de transfert du filtre de Butterworth d'ordre M et de seuil de coupure ω_c est donc dans ce cas (M pair)

$$F^{(\omega_c, M)}(p) = \frac{1}{\prod_{l=1}^{M/2} \left(1 - 2 \cos \delta_l \frac{p}{\omega_c} + \frac{p^2}{\omega_c^2}\right)};$$

Le filtre est alors seulement faiblement stable.

Les filtres de Tchebychev

La construction, à ordre M fixé, d'un filtre rationnel analogique *passé-bas* au seuil de coupure ω_c sera conditionnée par un troisième paramètre $\epsilon > 0$. On cherchera, pour M , ω_c et ϵ fixés, le filtre optimum (au sens de la seconde exigence) parmi tous les filtres de la forme

$$T^{\omega_c, \epsilon, M} = \frac{1}{1 + a(2)D + \dots + a(M+1)D^M}$$

qui obéissent aux deux contraintes de normalisation additionnelles portant sur le spectre d'énergie

$$\forall \omega \in [0, \omega_c], \quad \frac{1}{1 + \epsilon} \leq |T^{\omega_c, \epsilon, M}(\omega)|^2 \leq 1$$

et

$$|T^{\omega_c, \epsilon, M}(i\omega_c)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon}.$$

Il s'agit donc de construire un polynôme $S^{\omega_c, \epsilon, M}$, optimum vis à vis de notre exigence (à savoir le fait que *l'on veuille accentuer la brutalité de la coupure*), mais de plus pair, à coefficients réels, de degré $2M$, et obéissant aux deux contraintes additionnelles de normalisation

$$\forall \omega \in [0, \omega_c], \quad 0 \leq S^{\omega_c, \epsilon, M}(\omega) \leq \epsilon$$

et

$$S^{\omega_c, \epsilon, M}(\omega_c) = \epsilon.$$

Optimum vis à vis de notre exigence signifie que l'on demande au polynôme $S^{\omega_c, \epsilon, M}$ que son nombre dérivé au point où s'effectue la coupure (en l'occurrence ω_c) soit de module maximal. La solution de ce problème d'optimisation sous contraintes est classique et conduit à ce que $S^{\omega_c, \epsilon, M}$ doive être choisi pour que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$S^{\omega_c, \epsilon, M}(\omega) = \frac{\epsilon}{2} \left(1 + \Theta_{2M}(\omega/\omega_c) \right),$$

où Θ_{2M} est le polynôme de Tchebychev d'ordre $2M$, c'est à dire

$$\Theta_{2M}(X) = \cos(2M \arccos X).$$

On a donc la réalisation optimale de notre exigence (sous les contraintes de normalisation liées à ω_c et ϵ) en prenant

$$|T^{\omega_c, \epsilon, M}(i\omega_c)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon(\Theta_M(\omega/\omega_c))^2}.$$

La fraction rationnelle $T^{\omega_c, \epsilon, M}$ correspondant à la fonction de transfert de notre filtre satisfait donc

$$T^{\omega_c, \epsilon, M}(p) T^{\omega_c, \epsilon, M}(-p) = \frac{1}{1 + \epsilon \left(\Theta_M\left(\frac{p}{i\omega_c}\right) \right)^2}.$$

Le tri des pôles se fait encore en respectant la clause de stabilité qui veut que l'on ne retienne comme pôles de $T^{\omega_c, \epsilon, M}(p)$ que les pôles situés dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} p \leq 0\}$. Pour trouver les zéros des équations

$$\Theta_M\left(\frac{p}{i\omega_c}\right) = \pm i/\sqrt{\epsilon},$$

on pose $p = i\omega_c \cos(u + iv)$; la résolution de cette équation se ramène à la résolution du système

$$\cos(Mu) \operatorname{ch}(Mv) = 0, \quad \sin(Mu) \operatorname{sh}(Mv) = \pm/\sqrt{\epsilon}.$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} u &= u_k = \frac{(2k+1)\pi}{2M} \\ v &= v_k = \pm \frac{1}{M} \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right), \quad k = 0, \dots, M-1. \end{aligned}$$

On retrouve comme parties réelles (*resp.* imaginaires) des pôles du filtre à construire celles des pôles du filtre de Butterworth d'ordre M , multipliées par la quantité $\operatorname{sh}([\operatorname{argsh}(1/\sqrt{\epsilon})]/M)$ (*resp.* $\operatorname{ch}([\operatorname{argsh}(1/\sqrt{\epsilon})]/M)$). Une nouvelle fois, on constate que le filtre est stable si M est impair, faiblement stable si M est pair.

Quelques autres modèles de filtres rationnels

Les paramètres qui nous permettent de décider du “*design*” d'un filtre rationnel passe-bas ont été illustrés par la figure ci-dessous :

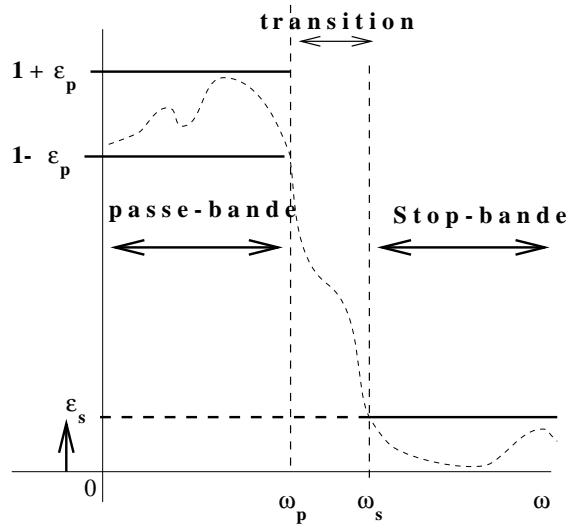


FIG. 6.4 – “*Design*” du module de la transformée de Fourier d'un filtre analogique passe-bas

Les fréquences ω_p et ω_s constituent les bornes de l'intervalle où se situe la phase de transition, tandis que les deux paramètres ϵ_p , ϵ_s commandent la largeur de la bande où se situe le niveau du spectre d'énergie relativement à 1 dans la *bande passante*, relativement à 0 dans la *stop-bande*. Le “*design*” du filtre *passe-bas* nécessite cette fois les quatre paramètres ω_p , ω_s , ϵ_p , ϵ_s . Les trois paramètres $\omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2}$, ϵ_p , ϵ_s , étant fixés, on peut montrer que le carré du module de la transformée de Fourier d'un filtre d'ordre M tel que $\omega_s - \omega_p$ (c'est à dire la longueur de la *phase de transition*) soit minimale est donné par

$$E^{\omega_c, \epsilon_p, \epsilon_s}(\omega) = \frac{1}{1 + \epsilon_{p, \epsilon_s}^2 |U_M^{\epsilon_p, \epsilon_s}(\frac{\omega}{\omega_c})|^2}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

où $U_M^{\epsilon_p, \epsilon_s}$ est une fonction elliptique de Jacobi. Le filtre rationnel analogique correspondant $E^{\omega_c, \epsilon_p, \epsilon_s, M}$ (dit *elliptique*) sera dans ce cas un filtre rationnel dont la fonction

de transfert présente à la fois des zéros et des pôles (au contraire de celles des filtres de Butterworth et Tchebychev, qui, elles, ne présentent que des pôles). Les zéros des fonctions de transfert des filtres analogiques rationnels elliptiques $E^{\omega_c, \epsilon_p, \epsilon_s, M}$ sont d'ailleurs tous sur l'axe imaginaire pur.

6.6.4 Le passage de l'analogique au digital

Nous allons décrire deux méthodes (toutes deux implémentées sous l'environnement **MATLAB**) pour réaliser un filtre rationnel digital “modélisant” dans le cadre discret l'action d'un filtre analogique rationnel donné. Le pas d'échantillonnage des signaux discrets envisagés est ici fixé égal à $\tau > 0$.

I. La transformation “bilinéaire”

L'un des filtres analogiques stables les plus simples (d'ailleurs du premier ordre) est le filtre intégrateur

$$\varphi \mapsto D^{-1}[\varphi] : t \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi(t-u) du.$$

Si τ est un nombre strictement positif (soit un pas d'échantillonnage), on a, pour tout $l \in \mathbb{Z}$,

$$D^{-1}[\varphi](l\tau) = D^{-1}[\varphi]((l-1)\tau) + \int_{(l-1)\tau}^{l\tau} \varphi(u) du.$$

Ceci induit via la méthode des trapèzes l'approximation

$$D^{-1}[\varphi](l\tau) \simeq D^{-1}[\varphi]((l-1)\tau) + \frac{\tau}{2} [\varphi((l-1)\tau) + \varphi(l\tau)].$$

Si l'on pose $y(l) = D^{-1}[\varphi](l\tau)$ et $x(l) = \varphi(l\tau)$, on a les relations de récurrence

$$y(l) - y(l-1) = \frac{\tau}{2} (x(l) + x(l-1)). \quad (*)$$

Si $(x(l))_l$ est une suite de support limité à gauche et que l'on pose

$$X(z) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} x(l) z^{-l}$$

et

$$Y(z) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} y(l) z^{-l},$$

on peut “stocker” de manière condensée toutes les relations (*) sous la forme

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = \frac{\tau}{2} (1 + z^{-1}) X(z),$$

ou encore

$$X(z) = \frac{2}{\tau} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) Y(z).$$

Ceci revient à dire que la Z -transformée du filtre rationnel digital correspondant au filtre rationnel analogique de fonction de transfert $p \mapsto 1/p$ est la fraction rationnelle

$$z \mapsto \frac{\tau}{2} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

C'est donc le changement de variable

$$p = \frac{2}{\tau} \times \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

qui permet de transformer la fraction rationnelle $F(p)$, fonction de transfert du filtre rationnel analogique \mathcal{L} , en un modèle de fraction rationnelle

$$\frac{B_d(z^{-1})}{A_d(z^{-1})} = R\left(\frac{2}{\tau} \times \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$$

tel que la fonction

$$\omega \mapsto \frac{B_d(e^{i\omega})}{A_d(e^{i\omega})}$$

puisse être considérée comme candidate à être la fonction de transfert de la version digitale du filtre analogique \mathcal{L} .

La routine **bilinear** sous l'environnement **MATLAB** opère cette conversion entre les variables complexes p et z . Les versions digitales (dédites des versions analogiques selon le procédé bilinéaire en supposant $\tau = 2$) des filtres de Butterworth, de Tchebychev, ou elliptiques, sont ainsi implémentables sous l'environnement **MATLAB**. Pour les filtres de Butterworth, cette implémentation s'effectue sous les commandes

```
>> [b,a]=butter(N,omega_c);
>> [b,a]=butter(N,[omega_c1,omega_c2]);
```

suivant qu'il s'agisse du filtre *passé-bas* au seuil de coupure ω_c ou du filtre *passé-bande* correspondant à la bande $\{\omega, \omega_{c1} \leq |\omega| \leq \omega_{c2}\}$. Notons que N doit être un entier impair pour assurer la stabilité du filtre analogique (sinon, celui ci est seulement faiblement stable). Le (ou les) seuils de coupure doivent être choisis entre 0 et 1 du fait que les calculs sont effectués à pas normalisé à 1. Si le pas d'échantillonnage est τ , il faut se souvenir que l'intervalle $[0, 1]$ du domaine fréquentiel représente de fait $[0, \pi/\tau]$, où π/τ est la fréquence de Nyquist. Lorsque $\tau = 1$, $[0, 1]$ doit être pensé comme l'intervalle $[0, \pi]$.

En ce qui concerne les filtres de Tchebychev, ce sont les commandes

```
>> [b,a]=cheby1(N,Rp,omega_c);
>> [b,a]=cheby1(N,Rp,[omega_c1,omega_c2]);
```

lorsque l'on désire que l'ordre soit N (impair), la fréquence de coupure ω_c (ou la bande passante $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$), et le paramètre ϵ

$$\epsilon = \epsilon_p = 1 - 10^{-Rp/10}.$$

La même remarque que précédemment vaut concernant le choix des seuils de coupure entre 0 et 1.

Enfin, en ce qui concerne le "*design*" des versions digitales des filtres elliptiques, il s'effectue suivant les commandes

```
>> [b,a]=ellip(N,Rp,Rs,omega_c);
>> [b,a]=ellip(N,Rp,Rs,[omega_c1,omega_c2]);
```

où cette fois N est toujours l'ordre du filtre, ω_c le seuil de coupure, et les paramètres ϵ_p et ϵ_s qui régissent les largeurs respectives de la passe-bande et la stop-bande s'expriment en fonction de R_p et R_s par

$$\epsilon_p = 1 - 10^{-R_p/10}, \quad \epsilon_s = 10^{-R_s/10}.$$

À titre d'exemple (et pour comparaison), nous donnons ici les représentations graphiques du module de la fonction de transfert de trois modèles de tels filtres (le pas temporel est $\tau = 1$ et les signaux sur l'espace des fréquences sont représentés sur $[0, \pi]$).

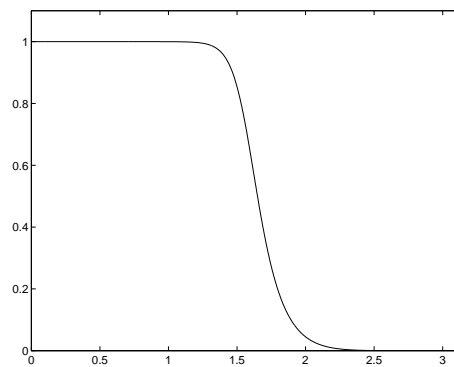


FIG. 6.5 – $\omega \mapsto |f_{\text{butter}}(\omega)|$, $N = 7$, $\omega_c = \frac{\pi}{2}$; $\omega = 0 : \pi$

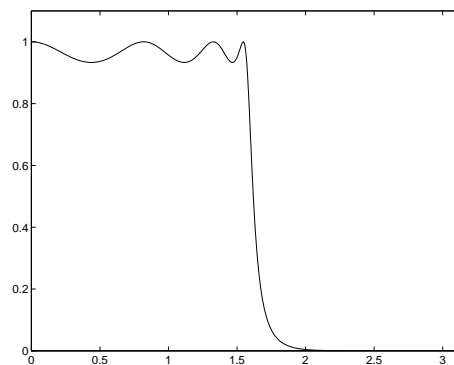


FIG. 6.6 – $\omega \mapsto |f_{\text{cheby}}(\omega)|$, $N = 7$, $\epsilon = 1 - 10^{-.06}$, $\omega_c = \frac{\pi}{2}$; $\omega = 0 : \pi$

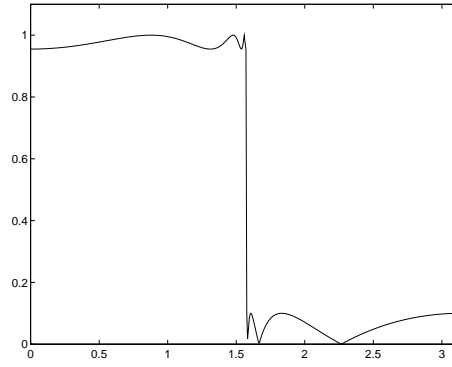


FIG. 6.7 – $\omega \mapsto |f_{\text{ellip}}(\omega)|$, $N = 8$, $\epsilon_p = 1 - 10^{-04}$, $\epsilon_s = 10^{-2}$, $\omega_c = \frac{\pi}{2}$; $\omega = 0 : \pi$

II. Correspondance des réponses impulsionnelles

Si F désigne la fonction de transfert du filtre rationnel analogique que l'on envisage de convertir en un filtre digital (subordonné au pas d'échantillonnage τ), on fait l'hypothèse

$$F(i\omega) \simeq 0$$

pour $|\omega| \geq \pi/\tau$ (c'est à dire $F = 0$ au delà du seuil de Shannon), hypothèse (dite condition (\dagger)) sous laquelle on peut considérer que le filtre digital que l'on envisage de construire ait pour fonction de transfert :

$$f(\omega) = \frac{1}{\tau} F(\omega/\tau).$$

Notons que sinon, la fonction $2\pi/\tau$ -périodique candidate à être la fonction de transfert du filtre digital modélisant le filtre analogique de fonction de transfert F devrait être

$$\omega \mapsto \frac{1}{\tau} \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(\omega/\tau + 2\pi k/\tau).$$

Supposons que la condition (\dagger) soit remplie et que la décomposition en éléments simples de R s'écrive

$$F(p) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{\mu_k} \alpha_{kl} \frac{1}{(p - p_k)^l}$$

La version discrète du filtre $s_{p_k, l}$ dont la transformée de Laplace est $p \mapsto (p - p_k)^{-l}$ est le filtre digital de réponse impulsionnelle la suite $(h_{p_k, l}(\nu))_\nu$, où

$$h_{p_k, l}(\nu) = \frac{(\nu\tau)^{l-1}}{(l-1)!} e^{\nu\tau p_k}$$

La fonction de transfert d'un tel filtre digital (le pas étant normalisé à 1) est la fonction 2π -périodique définie par

$$\begin{aligned} f_{p_k, l}(\omega) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu\tau)^{l-1}}{(l-1)!} e^{\nu\tau p_k} e^{i\nu\omega} \\ &= \frac{\tau^{l-1}}{\Gamma(l)} \frac{d^l}{dp^l} \left[\frac{1}{1 - e^{\tau p_k + p}} \right]_{p=i\omega} \\ &= \frac{B_{p_k, l}(e^{-i\omega})}{A_{p_k, l}(e^{-i\omega})}, \end{aligned}$$

où $A_{p_k,l}$ et $B_{p_k,l}$ sont deux polynômes de degré l , avec $A_{p_k,l}(0) \neq 0$. Le filtre digital correspondant à cette fonction de transfert est un filtre d'ordre l . Lorsque $l = 1$ (c'est le cas le plus simple), on a

$$A_{p_k,l} = 1 - e^{p_k \tau} X$$

et

$$B_{p_k,l;\tau} = 1.$$

Si tous les pôles p_1, \dots, p_m de la fraction rationnelle sont simples, le filtre digital correspondant au filtre analogique rationnel de fonction de transfert F est le filtre digital régi par la fraction rationnelle

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{k1} \frac{1}{1 - e^{\tau p_k} X} = \frac{b_d(1) + b_d(2)X + \dots + b_d(m)X^{(m-1)}}{1 + a_d(2)X + \dots + a_d(m+1)X^m},$$

et dont l'action entrée/sortie est gouvernée par le mécanisme

$$s(k) + \sum_{k=1}^m a_d(k+1)s(n-k) = \sum_{j=0}^{m-1} b_d(j+1)e(n-j).$$

Cette construction est implémentée sous l'environnement **MATLAB** sous la commande

```
>>[b_d,a_d]=impinvar (b,a,Fs);
```

où b et a sont les coefficients des numérateur

$$B(p) = b(1) + \dots + b(M)X^{M-1}$$

et dénominateur

$$A(p) = 1 + a(2)X + \dots + a(M+1)X^M$$

de la transformée de Laplace F du filtre analogique à convertir lorsque la fréquence d'échantillonnage temporelle est $F_s = 1/\tau$ (ou 1 par défaut); la fonction de transfert du filtre discret ainsi obtenu est

$$\omega \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{b_d(1) + \dots + b_d(M)e^{i(M-1)\omega}}{1 + a_d(2) + \dots + a_d(M+1)e^{iM\omega}}.$$

Chapitre 7

Quelques notions de filtrage stochastique des processus discrets

7.1 Densité spectrale de puissance d'un processus stationnaire

Dans ce chapitre, tous les processus que nous considérerons seront des processus *discrets* $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, avec pour tout k , $X_k \in L^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$, où (Ω, \mathcal{T}, P) désigne l'espace probabilisé sur lequel est défini le processus.

Ces processus seront d'autre part supposés être tout au long de ce chapitre des processus *faiblement stationnaires au second ordre*, ce qui signifie que l'espérance des X_k ne dépend pas de k et que la fonction d'autocorrélation

$$(k_1, k_2) \mapsto R_{X,X}(k_1, k_2) := E[X_{k_1} \overline{X_{k_2}}]$$

est une fonction $\mathcal{R}_{X,X}$ de $k_1 - k_2$. Pour un processus continu $(X_t)_t$, la stationnarité au sens faible au second ordre correspond au fait que l'espérance de X_t est constante presque partout et que la mesure d'autocorrélation

$$(t_1, t_2) \mapsto R_{X,X}(t_1, t_2)$$

s'exprime sous la forme

$$(t_1, t_2) \mapsto \mathcal{R}_{X,X}(t_1 - t_2).$$

Étant donné un tel processus, nous définissons sa *densité spectrale de puissance* comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation, c'est-à-dire la fonction

$$\omega \mapsto S_{X,X}(\omega) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}_{X,X}(k) e^{-ik\omega}.$$

Exemples

- La densité spectrale d'un bruit blanc ($E[X_k] = 0$ et $R_{X,X}(k) = \sigma^2 \delta_0^k$) est une constante, égale à la variance σ^2 du bruit blanc.
- La densité spectrale d'un processus A.R. à $m - 1$ paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$, c'est-à-dire un processus discret (X_k) tel que

$$X_k - \sum_{l=1}^{m-1} \alpha_l X_{k-l}$$

soit un bruit blanc de variance σ^2 (voir chapitre 2, section 2.3.2) se calcule immédiatement *via* la formule

$$|1 - \alpha_1 e^{-i\omega} - \dots - \alpha_{m-1} e^{-i(m-1)\omega}|^2 S_{X,X}(\omega) = \sigma^2.$$

- Si Y est un processus discret de la forme $Y = X + B$, où B est un bruit blanc de variance σ^2 tel que les suites $(X_k)_k$ et $(B_l)_l$ soient des suites de variables indépendantes (c'est à dire telles que tout vecteur aléatoire $(X_{k_1}, \dots, X_{k_n})$ soit indépendant de tout vecteur aléatoire $(B_{l_1}, \dots, B_{l_m})$), alors la densité spectrale de Y est, pourvu que la densité spectrale de X soit bien définie, est donnée par la formule

$$S_{Y,Y} = S_{X,X} + \sigma^2.$$

L'une des propriétés majeures de la densité spectrale de puissance est sa positivité.

7.2 Action d'un filtre digital sur un processus discret

Dans cette section, nous allons envisager comment agit un filtre digital \mathcal{L} de réponse impulsionnelle $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ (considérée donc comme objet déterministe) sur un processus L^2 -discret stationnaire au sens faible $(X_k)_k$ défini sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) . Formellement, la réponse au processus discret $(X_k)_k$ après passage dans le système que constitue le filtre, est le processus discret $(Y_k)_k$, où

$$Y_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h(l) X_{k-l}, k \in \mathbb{Z}. \quad (7.1)$$

Il s'agit ici d'une expression formelle car rien ne peut nous assurer que la série (5.3) ci-dessus converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$, condition sine-qua-non pour que le processus de sortie reste un processus L^2 -discret. Il est naturel de proposer des conditions suffisantes portant sur le filtre $(h(k))_k$ pour que pour une classe assez large de processus $(X_k)_k$, le processus de sortie $(Y_k)_k$ reste bien un processus L^2 -discret. La plus raisonnable des hypothèses que nous pouvons faire sur \mathcal{L} (si notre souci est avant tout un souci d'ordre pratique) est qu'il s'agisse d'un *filtre digital stable*, c'est à dire que la suite $(h(k))_k$ vérifie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h(k)| < \infty.$$

La réponse du filtre \mathcal{L} au processus discret stationnaire $(X_k)_k$ est alors le processus discret stationnaire $(Y_k)_k$ dont la fonction d'autocorrélation est donnée par

$$\mathcal{R}_{Y,Y} = \mathcal{R}_{X,X} * H$$

où $(H(k))_k$ est le signal digital défini par

$$H(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h(k+l) \overline{h(l)}, k \in \mathbb{Z}.$$

On a de plus la relation suivante entre les deux densités spectrales

$$S_{Y,Y}(\omega) = \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) e^{-il\omega} \right|^2 S_{X,X}(\omega).$$

Soit maintenant un signal discret $(s(k))_k$, entaché d'un bruit blanc $(B_k)_k$ de variance σ^2 . Le filtre digital \mathcal{L} de réponse impulsionnelle $(h(k))_k$ répond au processus $(s(k) + B_k)_k$ en le processus discret $(Y_k)_k$,

$$Y_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)(s(k-l) + B_{k-l}),$$

dont l'autocorrélation est donnée par

$$R_{Y,Y}(k_1, k_2) = \sigma^2 \|h\|_2^2 + \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} h(l_1) \overline{h(l_2)} s(k_1 - l_1) \overline{s(k_2 - l_2)}.$$

7.3 Aspects pratiques du calcul de l'estimation spectrale stochastique

Dans cette section, tous les processus L^2 -discrets stationnaires au sens faible dont nous traiterons seront *ergodiques* relativement à la fois *au calcul de moyenne* et *au calcul de corrélation*.

On dit qu'un processus stochastique L^2 -discret stationnaire au sens faible est *ergodique au sens du calcul de moyenne* si et seulement si la suite de variables aléatoires

$$\eta_N := \frac{1}{2N-1} \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} X_l$$

converge presque partout vers l'aléa constant $E[X]$. Le processus est dit *ergodique au sens du calcul de corrélation* si et seulement si pour chaque valeur de k dans \mathbb{Z} , le processus $\text{cov}_k X$ défini par

$$[\text{cov}_k X]_l := X_{l+k} \overline{X_l}, \quad l \in \mathbb{Z},$$

est ergodique au sens de la moyenne.

Lorsqu'un processus L^2 -discret et stationnaire au sens faible X est ergodique au sens de sa moyenne, on peut approcher cette moyenne $E[X] = \eta$ en calculant l'aléa η_N en un point particulier de l'espace d'évènements, à savoir le point qui correspond à la version précisée du processus dont on dispose, ce lorsque N est assez grand; on dispose ainsi d'une estimation de l'espérance mathématique de X . Si le processus est en même temps ergodique au sens de la corrélation, on peut calculer aussi sa fonction d'autocorrélation en calculant, pour tout k dans \mathbb{Z} , et pour N assez grand, la valeur de l'aléa

$$\frac{1}{2N-1} \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} X_{l+k} \overline{X_l}$$

au point de l'espace d'évènements qui correspond à la version spécifiée du processus dont on dispose et que l'on traite.

C'est par le biais de ces estimateurs que seront calculés l'espérance d'un processus L^2 -discret stationnaire au sens faible et sa fonction d'autocorrélation, donc sa densité spectrale de puissance. Il est par conséquent intéressant de disposer d'un critère permettant d'assurer l'ergodicité en moyenne. Nous avons pour cela la

Proposition 7.1 *Si X est un processus L^2 -discret stationnaire au sens faible tel que*

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_{X,X}(k) = 0, \quad (7.2)$$

alors le processus est ergodique au sens de la moyenne.

Remarque. Cette proposition génère aussi un critère pour qu'un processus L^2 -discret stationnaire au moins jusqu'à l'ordre 4 (et non plus seulement l'ordre 2) soit ergodique au sens de la corrélation. Mais cette fois la condition porte sur l'autocorrélation, lorsque k est fixé, du processus $X_{l+k}\overline{X_l}$, c'est à dire sur la fonction

$$\mathcal{R}_{X,X,X,X}(k_1, k_2) = E[X_l X_{l+k_1+k_2} \overline{X_{l+k_1}} \overline{X_{l+k_2}}].$$

Les conditions

$$\forall k_2 \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{|k_1| \rightarrow \infty} \mathcal{R}_{X,X,X,X}(k_1, k_2) = 0$$

réalisent par exemple une condition suffisante pour l'ergodicité de X au sens de l'autocorrélation.

Dès lors, nous supposons toujours (dans cette section) que le processus L^2 -discret X avec lequel on travaille est stationnaire au sens faible ainsi qu'ergodique au sens du calcul de la moyenne et de l'autocorrélation.

Comme nous l'avons vu de part sa définition, la densité spectrale de puissance d'un processus L^2 -discret stationnaire au sens faible est donnée formellement par

$$S_{X,X}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_{X,X}(k) e^{-ik\omega}.$$

Pratiquement, nous ne pouvons que calculer numériquement des versions tronquées de cette densité spectrale de puissance, c'est à dire par exemple les polynômes trigonométriques

$$S_{X,X;N}(\omega) = \sum_{-(N-1)}^{N-1} \mathcal{R}_{X,X}(k) e^{-ik\omega}, \quad N \gg 1.$$

Nous pouvons, en utilisant l'ergodicité au sens de la corrélation, calculer $\mathcal{R}_{X,X}(k)$ pour k entre $-(N-1)$ et $N-1$ par

$$\mathcal{R}_{X,X}(k) \simeq \rho_{x,x;N}(k) := \frac{1}{N-|k|} \sum_{l=0}^{N-|k|-1} x_{l+k} \overline{x_l}$$

(où x désigne notre processus spécifié) mais ce calcul approché, s'il est intéressant lorsque $|k|$ est petit comparé à N , perd une part de son contenu lorsque $|k|$ se rapproche de N (car alors la corrélation n'est pas calculée à partir d'un nombre d'échantillons suffisant pour que l'on puisse justifier d'après l'hypothèse d'ergodicité que l'on a là une approximation raisonnable de $\mathcal{R}_{X,X}(k)$). Cette première approximation est qualifiée d'*approximation biaisée*. On peut lui préférer, tenant compte des remarques ci-dessus, l'approximation de $\mathcal{R}_{X,X}(k)$ par

$$\mathcal{R}_{X,X}(k) \simeq \tilde{\rho}_{x,x;N}(k) := \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-|k|-1} x_{l+k} \overline{x_l}. \quad (7.3)$$

Cette approximation est dite *approximation non biaisée*.

Ces deux calculs sont implémentés sous l'environnement **MATLAB** sous les commandes

```
>>S=xcorr(x,x,'biased');
>>S=xcorr(x,x,'unbiased');
```

On peut d'ailleurs tout aussi bien calculer en faisant l'une ou l'autre de ces deux approximations les fonctions d'intercorrélation de deux processus L^2 -discrets et stationnaires X et Y ergodiques au sens de la moyenne pourvu que les processus $(X_{k+l}\bar{Y}_l)_l$, pour tout k dans \mathbb{Z} , eux aussi le soient. Les commandes sont dans ce cas

```
>>S=xcorr(x,y,'biased');
>>S=xcorr(x,y,'unbiased');
```

suivant que l'on considère l'approximation biaisée ou l'approximation non biaisée. Il faut toutefois prendre garde au fait que les calculs effectués suivant ces programmes sous l'environnement **MATLAB** correspondent à une définition de l'intercorrélation différente de la nôtre, en ce sens qu'elle en est simplement conjuguée :

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{X,Y}(m) := E[X_l \overline{Y_{l+m}}] = \overline{\mathcal{R}_{X,Y}(m)} = \mathcal{R}_{X,Y}(-m).$$

On peut maintenant, reprenant nos deux calculs approchés, approcher $\mathcal{S}_{X,X}$ de deux manières. Soit l'on utilise l'approximation biaisée et alors

$$S_{X,X}(\omega) \simeq \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \mathcal{R}_{X,X}(k) e^{-ik\omega} \simeq \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \rho_{x,x;N}(k) e^{-ik\omega},$$

ce qui revient à calculer la densité spectrale de puissance fenêtrée par la fenêtre rectangulaire. Soit l'on utilise l'approximation non biaisée et l'on a

$$S_{X,X}(\omega) \simeq \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \mathcal{R}_{X,X}(k) e^{-ik\omega} \simeq \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \tilde{\rho}_{x,x;N}(k) e^{-ik\omega},$$

ce qui revient à calculer la densité spectrale de puissance fenêtrée par la fenêtre triangulaire

$$S_{X,X}(k) \simeq \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \mathcal{R}_{X,X}(k) \left(\frac{N-|k|}{N} \right) e^{-ik\omega}.$$

Cette seconde approximation se prête mieux au calcul rapide via l'algorithme de FFT puisque l'on a l'identité

$$\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \tilde{\rho}_{x,x;N}(k) e^{-ik\omega} = \frac{1}{N} |X(e^{i\omega})|^2,$$

où $X(e^{-i\omega})$ désigne la transformée de Fourier du signal digital que constitue la suite $(x_k)_k$, $k = 0, \dots, N-1$. Il est évidemment possible de choisir d'autres fenêtrages ou de coupler cette méthode avec une moyennisation (attachée à un fenêtrage glissant). C'est la *méthode de Welch* implémentée dans l'environnement **MATLAB** sous la commande **psd** (pour "power spectral density") ou **spectrum** (dont nous avons déjà parlé au chapitre 2, section 2.3.1).

Voici un synopsis de cette méthode : on divise dans un premier temps l'intervalle $\{0, \dots, N-1\}$ (intervalle sur lequel vit le signal digital) en q intervalles de longueur M (ce paramètre M représente la longueur de la fenêtre). On se fixe un fenêtrage $w = \text{window}$ de longueur M (qui sera le fenêtrage de Hamming si rien n'est précisé). Pour chaque position de la fenêtre. (disons initialement à k), on calcule (via une FFT)

$$S_{x,x;M}^{(k)}(\omega) = \frac{\left| \sum_{l=0}^{M-1} w(l)x_{k+l}e^{-il\omega} \right|^2}{\sum_{l=0}^{M-1} |w(l)|^2}.$$

On prend ensuite comme valeur de la densité spectrale de puissance la fonction

$$\omega \mapsto \frac{1}{q} \sum_{\iota=1}^q S_{x,x;M}^{(k_\iota)}(\omega)$$

si les k_ι , $\iota = 1, \dots, q$, sont les instants initiaux de la fenêtre (en général, ces positions sont consécutives, mais l'on peut tolérer que les fenêtres se chevauchent de *noverlap* points). Ce programme se réalise sous l'une des commandes

```
>>f=psd(x);
>>f=psd(x,nfft);
>>f=psd(x,nfft,Fs);
>>f=psd(x,nfft,Fs>window);
>>f=psd(x,nfft,Ts>window,noverlap);
```

dans l'environnement **MATLAB**; si la fréquence d'échantillonnage F_s n'est pas précisée, le calcul par défaut se fait avec $F_s=2$.

Il existe d'autres procédés de calcul de la densité spectrale de puissance d'un processus. Par exemple, *l'algorithme auto-régressif* présenté au chapitre 2, section 2.3.2, en est un qu'il est judicieux de reprendre ici à la lumière cette fois de tout le contenu de ce cours : si nous ajustons les paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ de manière à minimiser

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| x_k - E[X] - \sum_{l=1}^{m-1} \alpha_l (x_{k-l} - E[X]) \right|^2$$

et si nous faisons l'hypothèse que le processus ainsi "décorrélé"

$$X_k - E[X] - \sum_{l=1}^{m-1} \alpha_l (X_{k-l} - E[X])$$

est un bruit blanc de variance σ^2 , la densité spectrale de puissance du processus recentré $X - E[X] = X^{\text{rct}}$ est donnée par

$$S_{X^{\text{rct}}, X^{\text{rct}}}(\omega) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \sum_{l=1}^{m-1} \alpha_l e^{-ik\omega} \right|^2}.$$

Le programme

```
>>f=autoreg3(m,s);
```

calcule les paramètres d'auto-régressivité $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$, puis représente le graphe de la fonction sur $[0, \pi]$

$$\omega \mapsto \frac{1}{\left| 1 - \sum_{l=1}^{m-1} \alpha_l e^{-il\omega} \right|}.$$

L'interprétation de cette fonction en temps que racine carrée de la densité spectrale de puissance plausible (lorsque l'on suppose qu'il y a $m - 1$ paramètres d'autorégressivité) éclaire sous un jour stochastique les résultats obtenus sur les exemples précédemment traités. On pourra reprendre de tels exemples et les multiplier pour se familiariser avec ce regard stochastique (et non plus déterministe) sur le problème de la prédiction.

7.4 Filtrage de Wiener et déconvolution

7.4.1 Le filtrage de Wiener des processus discrets

Notre objectif dans cette section est, entre autres choses, la réalisation d'un filtre stable optimum (en un sens à préciser) qui permette la détection d'un processus L^2 -discret X (dont l'autocorrélation est supposée connue) lorsque ce dernier se trouve perturbé par un bruit blanc de variance σ^2 qui lui est indépendant. Toutes les idées soutenant de telles propositions sont dues à Norbert Wiener.

Proposition 7.2 *Soit X et B deux processus L^2 -discrets stationnaires tels que la fonction*

$$k \mapsto \mathcal{R}_{X+B, X+B}(k)$$

soit une fonction bornée sur \mathbb{Z} et que

$$S_{X, X+B}(\omega) = F(\omega) S_{X+B, X+B}(\omega),$$

où F est le spectre d'un filtre digital stable. Alors un filtre stable \mathcal{L} tel que

$$E\left[\left|\mathcal{L}[X+B]_k - X_k\right|^2\right]$$

(qui ne dépend pas de k) soit minimale parmi tous les filtres stables possibles est le filtre \mathcal{L} dont F est le spectre.

Preuve. Elle repose sur le principe des moindres carrés. Si \mathcal{L} est un filtre stable quelconque, on sait que le processus $\mathcal{L}[X+B]$ est encore un processus L^2 -discret, stationnaire au sens faible, ce qui permet d'affirmer que les nombres

$$E\left[\left|\mathcal{L}[X+B]_k - X_k\right|^2\right], \quad k \in \mathbb{Z},$$

sont finis et tous égaux à une "erreur" $e_{\mathcal{L}}$. On a, pour tout k dans \mathbb{Z} ,

$$\mathcal{L}[X+B]_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h(l) X_{k-l}.$$

Un filtre \mathcal{L}_{opt} tel que cette erreur $e_{\mathcal{L}}$ soit minimale serait (si toutefois il s'agit bien un filtre stable) le filtre dont la suite des coefficients $(h_{\text{opt}}(l))_l$ satisfasse les conditions qui assurent que pour un entier k arbitraire dans \mathbb{Z} , l'aléa

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{\text{opt}}(l)(X_{k-l} + B_{k-l})$$

représente (dans $L^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$) la projection orthogonale de X_k sur le sous espace engendré par les $X_\nu + B_\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$. Ceci revient donc à écrire les conditions d'orthogonalité

$$E \left[\left(X_k - \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(l) X_{k-l} \right) \left(\overline{X_\nu} + \overline{B_\nu} \right) \right] = 0, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Une fois éliminée la redondance de cette liste de conditions (résultant de la stationnarité au sens faible des processus), il reste que ce système se réduit à la liste de conditions

$$\mathcal{R}_{X, X+B}(k) := \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(l) \mathcal{R}_{X+B, X+B}(k-l), \quad k \in \mathbb{Z},$$

où $\mathcal{R}_{X, X+B}(k) = R_{X, X+B}(k, 0)$ et $\mathcal{R}_{X+B, X+B}(k) = R_{X+B, X+B}(k, 0)$, les fonctions $R_{X, X+B}$ et $R_{X+B, X+B}$ désignant respectivement les fonctions d'intercorrélation de X avec $X+B$ et d'autocorrélation de $X+B$. Si l'on écrit que l'égalité entre deux suites (ici d'ailleurs toutes les deux bornées) équivaut à l'égalité de leurs spectres, on voit que le choix de h_{opt} est celui pour lequel

$$S_{X, X+B}(\omega) = \widehat{h_{\text{opt}}}(\omega) S_{X+B, X+B}(\omega).$$

Le choix de \mathcal{L}_{opt} comme le filtre de réponse impulsionnelle la transformée de Fourier inverse de F est donc bien un choix optimum ; ce n'est d'ailleurs pas nécessairement le seul possible, mais la proposition est de toutes façons ainsi démontrée. \diamond

Exemple. Si X est un processus L^2 -discret stationnaire au sens faible (d'autocorrélation bornée) et B est un bruit blanc de variance σ^2 indépendant de X , l'autocorrélation de $X+B$ est aussi bornée et l'on a

$$S_{X, B}(\omega) = S_{X, X}(\omega)$$

ainsi que

$$S_{X+B, X+B}(\omega) = S_{X, X}(\omega) + \sigma^2.$$

Alors

$$\frac{S_{X, X}}{S_{X, X} + \sigma^2}$$

est le spectre du filtre de Wiener correspondant au processus $(X_k)_k$.

7.4.2 La déconvolution des processus stationnaires discrets

Dans cette section, nous nous donnons un espace probabilisé $L^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et un processus discret $X = (X_k)_k$, stationnaire à l'ordre 2, de fonction d'autocorrélation $\mathcal{R}_{X, X}$, de densité spectrale de puissance une fonction $S_{X, X}$ que l'on supposera bornée.

Nous supposons que notre processus (supposé *a priori* inconnu passe simultanément à l'intérieur de plusieurs filtres digitaux $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_N$, dits *filtres convoluteurs* (déterministes), dont nous supposons ici que les réponses impulsionnelles de ces filtres sont les suites $(h_1(k))_k, \dots, (h_N(k))_k$. Les réponses de ces systèmes à l'entrée X sont les N processus discrets mesurables $Y^{(1)}, \dots, Y^{(N)}$, où

$$Y^{(p)}(k) = [h_k * X](k) = [\mathcal{L}_k[X]](k), p = 1, \dots, N, k \in \mathbb{Z}.$$

Ces processus sont encore des processus discrets stationnaires à l'ordre 2, tels que

$$S_{Y^{(p)}, Y^{(p)}}(\omega) = |\widehat{h_p}(\omega)|^2 S_{X, X}(\omega), p = 1, \dots, N$$

où $\widehat{h_p}$ désigne la transformée de Fourier du filtre \mathcal{L}_p .

Nous noterons $\vec{\mathcal{L}}$ la matrice colonne d'opérateurs dont les composantes sont les opérateurs $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_N$.

On suppose enfin que le vecteur colonne \vec{Y} constitué des processus $Y^{(p)}$ est enregistré entaché d'un bruit \vec{B} (environnement, appareillage de mesure), vecteur colonne de processus $B^{(p)}$, $p = 1, \dots, N$, tous indépendants de X , tous de moyenne nulle, et tels que la matrice de mesures

$$(k_1, k_2) \mapsto R_{B, B}[k_1, k_2] = \left(E \left[B_{k_1}^{(p)} \overline{B_{k_2}^{(q)}} \right] \right)_{1 \leq p, q \leq N}$$

soit la matrice $\delta(k_1 - k_2) \sigma^2 I_N$, où I_N est la matrice identité $N \times N$.

Le problème de la déconvolution (à instrumentation $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_N$ connue) consiste en la conception de N appareils $D^{(1)}, \dots, D^{(N)}$ (dits filtres *deconvoluteurs*) que l'on supposera correspondre à N filtres digitaux, tels que l'erreur

$$E \left[\left| X_k - \sum_{l=1}^N [D^{(l)} * (Y^{(l)} + B^{(l)})]_k \right|^2 \right]$$

(erreur qui est égale presque partout à une constante indépendante de k du fait de la stationnarité de X , des $Y^{(p)}$ et des $B^{(p)}$) soit minimale parmi toutes les erreurs générées par tous les choix de systèmes de déconvoluteurs stationnaires donnés.

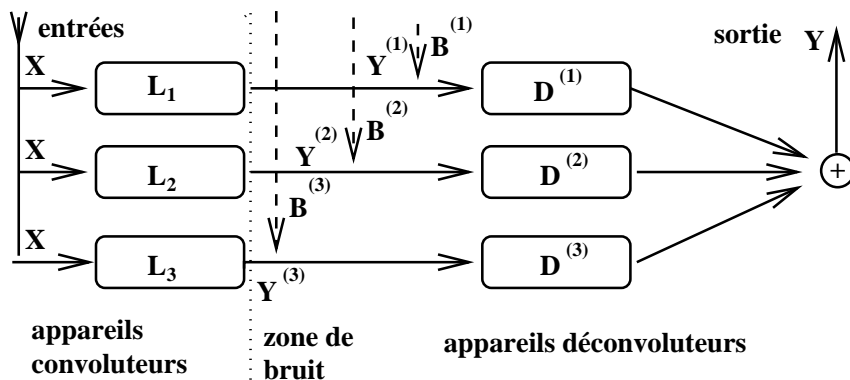


FIG. 7.1 – Appareillage convolution / déconvolution

Ce mécanisme, que nous avons illustré sur la figure ci-dessus, est tout à fait inspiré des développements de la section précédente et l'on a la

Proposition 7.3 *Sous toutes les hypothèses faites ci-dessus, le choix optimum de filtres analogiques stationnaires déconvoluteurs pour le problème de déconvolution correspondant aux appareils $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_N$, est donné par*

$$\widehat{D}^{(k)} = \frac{\widehat{h_k} S_{X,X}}{\left(\sum_{l=1}^N |\widehat{h_l}|^2 \right) S_{X,X} + \sigma^2}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (7.4)$$

Ce résultat est une nouvelle fois une conséquence du principe des moindres carrés.

Remarque Si l'on fait l'hypothèse selon laquelle les variables X_k sont peu corrélées, on prendra comme filtres approximant les filtres convoluteurs optimaux les filtres $D^{(k)}$, $k = 1, \dots, N$, dont le spectre est donné par

$$\widehat{D}^{(k)} = \frac{\widehat{h_k}}{\left(\sum_{l=1}^N |\widehat{h_l}|^2 \right) + \epsilon^2}, \quad k = 1, \dots, N,$$

où $\epsilon^2 = \sigma^2/S_{X,X}(0)$ désigne ce que l'on peut qualifier de rapport bruit sur signal. De tels filtres déconvoluteurs sont appelés *pseudo-filtres de Wiener* et couramment utilisés par exemple dans les techniques d'imagerie médicale (il est en effet évident que tout ce que nous venons de faire en 1D se transporte mot pour mot à la situation 2D).

7.4.3 Le filtrage de Wiener-Hopf

Cette section plus délicate du cours se doit d'être plutôt pensée comme un thème d'exercice.

Nous y reprenons la construction du filtre de Wiener, mais en en restreignant sensiblement les hypothèses.

Les données de départ sont toujours un processus L^2 -discret stationnaire à l'ordre 2 X , un bruit L^2 -discret stationnaire B , tel que les fonctions

$$\begin{aligned} k &\mapsto \mathcal{R}_{X,X}(k) := R_{X,X}(k, 0) \\ k &\mapsto \mathcal{R}_{B,B}(k) := R_{B,B}(k, 0) \\ k &\mapsto \mathcal{R}_{X,B}(k) := R_{X,B}(k, 0) \end{aligned}$$

correspondent à des signaux discrets intégrables sur \mathbb{Z} et que de plus on ait la *condition d'entropie* suivante

$$\int_0^{2\pi} |\log(S_{X+B,X+B}(\omega))| d\omega < \infty, \quad (*)$$

condition portant sur la densité spectrale de puissance $S_{X+B,X+B}$ de $X + B$ (cette densité est un signal continu sur l'axe des fréquences, puisque spectre d'un signal discret intégrable).

La raison majeure pour laquelle nous renforçons ainsi les hypothèses nous ayant permis de construire le filtre de Wiener est que nous souhaitons cette fois réaliser (parmi tous les filtres \mathcal{L} à la fois stables et causaux possibles) un filtre stable causal \mathcal{L}_{opt} optimum, au sens où l'erreur

$$E \left[\left| \mathcal{L}_{\text{opt}}[X + B]_k - X_k \right|^2 \right], \quad k \in \mathbb{Z},$$

(qui ne dépend pas de k du fait de la stationnarité au sens faible des processus en jeu) soit minimale. Un tel filtre sera en un certain sens le meilleur filtre causal et stable qui permette d'identifier la présence de X (et même de reproduire X en en gommant le bruit) lorsque l'on fait agir le filtre sur le processus bruité $X + B$. La contrainte additionnelle que l'on impose au filtre (si l'on compare aux objectifs du filtrage de Wiener), contrainte qui est tout à fait naturelle si l'on a en tête sa réalisation du point de vue pratique, est donc la causalité.

Pour mener la construction du filtre \mathcal{L}_{opt} , il est important d'utiliser (on l'admettra) que la condition d'entropie (*) implique l'existence d'un signal

$$\omega \mapsto A(e^{i\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\omega}$$

borné et 2π -périodique (c'est le spectre d'énergie d'un filtre discret stationnaire causal) tel que

$$S_{X+B, X+B}(\omega) = \left| \sum_{k=0}^N a_k e^{-ik\omega} \right|^2$$

et que la fonction

$$z \mapsto A^+(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$$

soit holomorphe et sans zéros dans $\{|z| > 1\}$, tandis que la fonction

$$z \mapsto A^-(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} z^k$$

est, elle, holomorphe et sans zéros dans $\{|z| < 1\}$. La fonction A^+ est la z -transformée du filtre stationnaire causal dont la suite $(a_k)_k$ est la réponse impulsionnelle. La fonction $1/A^-$, qui est holomorphe dans le disque ouvert $\{|z| < 1\}$ se développe en série de Taylor dans ce disque

$$\frac{1}{A^-(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^- z^k, \quad |z| < 1.$$

De même la fonction $1/A^+$, qui est elle holomorphe dans le domaine $\{|z| > 1\}$ du champ complexe, se développe en série dans ce domaine

$$\frac{1}{A^+(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^+ z^{-k}, \quad |z| > 1.$$

Nous ferons aussi l'hypothèse additionnelle suivante : les suites $(\eta_k^-)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\eta_k^{(+)})_k$ sont dans $l^1(\mathbb{N})$ (les sommes des modules des coefficients sont bornées) ; on peut alors définir la convolution des deux suites $\eta^- = (\eta_k^-)_k$ et $(\mathcal{R}_{X, X+B}(-k))_k$ par

$$[\eta^- * \mathcal{R}_{X, X+B}(-\cdot)]_k = \sum_{l=0}^{\infty} \eta_l^- \mathcal{R}_{X, X+B}(l-k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

ainsi que le produit des deux séries formelles (en $z, 1/z$)

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} \eta_l^- z^k \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_{X, X+B}(l) z^{-l} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\eta^- * \mathcal{R}_{X, X+B}(-\cdot)]_k z^k,$$

produit que l'on peut décomposer en

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} \eta_l^- z^l\right) \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_{X,X+B}(l) z^{-l}\right) = \Sigma_{X,X+B}^-(z) + \Sigma_{X,X+B}^+(z),$$

où

$$\begin{aligned} \Sigma_{X,X+B}^- &:= \sum_{l=1}^{\infty} [\eta^- * \mathcal{R}_{X,X+B}(-\cdot)]_k z^k \\ \Sigma_{X,X+B}^+ &:= \sum_{l=0}^{\infty} [\eta^- * \mathcal{R}_{X,X+B}(-\cdot)]_{-k} z^{-k}. \end{aligned}$$

Les développements ci-dessus définissent des fonctions holomorphes respectivement dans $\{|z| < 1\}$ et dans $\{|z| > 1\}$.

Remarque. Notons qu'un cas particulier très important du point de vue pratique où toutes les hypothèses sont remplies est celui où l'on peut écrire la fonction $S_{X,X+B}$ sous la forme

$$S_{X,X+B}(\omega) = F(e^{i\omega}),$$

où F est une fraction rationnelle sans zéro ni pôle sur le cercle unité $\{|z| = 1\}$.

Sous toutes ces hypothèses, nous avons la

Proposition 7.4 *Le filtre causal et stable de réponse impulsionnelle $(h_{\text{opt}}(k))_{k \in \mathbb{N}}$ donnée par le développement*

$$\frac{\Sigma_{X,X+B}^+(z)}{A^+(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} h_{\text{opt}}(k) z^{-k}$$

réalise un filtre causal stable \mathcal{L}_{opt} tel que l'erreur stochastique

$$E\left[\left|\mathcal{L}_{\text{opt}}[X+B]_k - X_k\right|^2\right]$$

soit minimale parmi toutes les erreurs générées par tous les choix de filtres stables et causaux possible. Ce filtre est appelé filtre de Wiener-Hopf pour le processus X en présence du bruit B .

On esquisse ici la preuve de ce résultat (qui donne de fait l'algorithme de construction du filtre de Wiener-Hopf adapté au processus X).

Puisque la suite $(\eta_k^+)_{k \in \mathbb{N}}$ est supposée dans $l^1(\mathbb{N})$ et qu'il en est de même de la suite des coefficients du développement de la fonction $z \mapsto \Sigma_{X,X+B}^+(z)$ au voisinage de l'infini, le filtre causal de réponse impulsionnelle $(h_{\text{opt}}(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est stable. D'autre part, il est possible de donner un sens au produit

$$\Theta(z) := \left(\sum_{l=0}^{\infty} h_{\text{opt}}(l) z^{-l}\right) \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_{X+B,X+B}(l) z^{-l}\right)$$

comme série formelle en $z, 1/z$. On a, si l'on récapitule les diverses définitions et si l'on s'en tient aux écritures formelles,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_{X,X+B}(k) z^{-k} - \Theta(z) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\mathcal{R}_{X,X+B}(k) - \sum_{l=0}^{\infty} h_{\text{opt}}(l) \mathcal{R}_{X+B,X+B}(k-l) \right) z^{-k} \\ &= \left(\Sigma_{X,X+B}^-(z) + \Sigma_{X,X+B}^+(z) \right) A^-(z) \\ &\quad - \Sigma_{X,X+B}^+(z) A^-(z) \\ &= \Sigma_{X,X+B}^-(z) A^-(z). \end{aligned}$$

On remarque que l'expression finale ci-dessus est une série formelle en les puissances des z (sans d'ailleurs de terme constant) ; l'identité finale ci-dessus est donc équivalente au système d'équations

$$\mathcal{R}_{X,X+B}(k) - \sum_{l=0}^{\infty} h_{\text{opt}}(l) \mathcal{R}_{X+B,X+B}(k-l) = 0, \quad k \geq 0.$$

Or cette liste de conditions correspond exactement à la liste des conditions à imposer à une suite $(h(l))_{l \in \mathbb{N}}$ de $l^1(\mathbb{N})$ pour que l'expression indépendante de k

$$E \left[\left| \left(\sum_{l=0}^{\infty} h(l) (X_{k-l} + B_{k-l}) \right) - X_k \right|^2 \right]$$

soit minimale. \diamond

Nous n'avons pas pu évoquer dans ce chapitre très incomplet nombre d'aspects essentiels du filtrage stochastique, et parmi eux, un concept important, celui de filtre de Kalman. Nous avons préféré mettre l'accent sur le filtrage de Wiener, celui de Wiener-Hopf et la réalisation de filtres déconvoluteurs (et de pseudo-filtres de Wiener, idée souvent utilisée par exemple en imagerie médicale).

FIN DU COURS