

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels et compléments de calcul différentiel et intégral dans <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>1</b>
1.1	Différentiabilité en un point, régularité $C^r$ . . . . .	1
1.2	Difféomorphismes et inversion locale ; immersion et submersion . . . . .	5
1.3	Points critiques, valeurs critiques, lemme de Sard . . . . .	11
1.4	Lemme de Morse, singularités de Morse . . . . .	13
1.5	Espaces tangent et cotangent à $\mathbb{R}^n$ en un point . . . . .	17
1.5.1	Germe d'ensemble et de fonction différentiable en un point . . . . .	17
1.5.2	Trois descriptions de l'espace tangent à $\mathbb{R}^n$ en un point . . . . .	20
1.5.3	Application linéaire tangente à un germe d'application $C^\infty$ . . . . .	24
1.5.4	Espace cotangent à $\mathbb{R}^n$ en un point $a$ . . . . .	25
1.6	Espaces tangent et cotangent à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	27
1.7	Le calcul extérieur sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	29
1.8	Cohomologie de de Rham d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	31
1.9	Le calcul intégral dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	40
1.9.1	La notion de simplexe orienté de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	40
1.9.2	L'image réciproque des formes différentielles . . . . .	43
1.9.3	Intégration sur un $p$ -simplexe et image réciproque . . . . .	47
1.9.4	Chaînes singulières d'un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	47
1.9.5	Intégration d'une $p$ -forme sur une $p$ -chaîne . . . . .	49
<b>2</b>	<b>Les variétés différentielles et leurs morphismes</b>	<b>53</b>
2.1	Les concepts de variété de classe $C^r$ et d'atlas . . . . .	53
2.1.1	Cartographie sur un espace topologique . . . . .	53
2.1.2	Le concept de variété de classe $C^r$ . . . . .	57
2.1.3	Variétés analytiques réelles et analytiques complexes . . . . .	61
2.1.4	La construction d'une variété par recollement "forcé" de cartes . . . . .	65
2.1.5	Structure de variété restreinte ; structure produit . . . . .	66
2.1.6	Les espaces projectifs $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . . . . .	66
2.1.7	Morphismes entre variétés . . . . .	70
2.2	Le concept de "tangence" . . . . .	74
2.2.1	Espace tangent en un point à une variété différentielle . . . . .	76
2.2.2	Application linéaire tangente . . . . .	80
2.2.3	Rang, immersions, submersions, plongements . . . . .	82
2.2.4	Notion de sous-variété . . . . .	86
2.3	Revêtements, structure de variété quotient . . . . .	91
2.3.1	Notion topologique de revêtement, exemples . . . . .	91
2.3.2	Structure quotient sur une variété : la problématique générale . . . . .	95
2.3.3	Quotient par action d'un groupe de difféomorphismes . . . . .	96

<b>3</b>	<b>Sur quelques objets globaux associés à une variété différentielle</b>	<b>109</b>
3.1	Un premier modèle de fibré : le fibré tangent . . . . .	109
3.2	Le concept de fibré vectoriel . . . . .	112
3.3	Le fibré cotangent, ses puissances extérieures . . . . .	117
3.4	Partitionnement de l'unité . . . . .	122
3.5	Le calcul extérieur et la cohomologie . . . . .	124
3.5.1	Le calcul extérieur et la cohomologie de de Rham . . . . .	124
3.5.2	Le calcul de $H^0(X)$ . . . . .	125
3.5.3	La longue suite exacte de Mayer-Vietoris . . . . .	126
3.5.4	Quelques exemples significatifs . . . . .	129
3.5.5	Formes volume, variétés orientables ; orientation . . . . .	132
3.5.6	Intégration sur une variété différentielle orientable . . . . .	137
3.5.7	La notion de variété à bord et l'énoncé du théorème de Stokes . . . . .	139
3.6	Variétés orientables compactes et théorie du degré . . . . .	143
3.6.1	Le groupe de cohomologie $H^{\dim X}(X)$ et les nombres de Betti . . . . .	143
3.6.2	Degré d'un morphisme ; théorème du degré ; exemples . . . . .	148
3.6.3	La notion d'homotopie ; degré et homotopie . . . . .	152
3.6.4	Indice local d'un champ de vecteur en un point singulier isolé . . . . .	155
3.6.5	Quelques exercices autour de l'invariance du degré par homotopie . . . . .	156
3.7	Homologie singulière et théorème de de Rham . . . . .	157
<b>4</b>	<b>Propriétés topologiques et différentielles des courbes et des surfaces</b>	<b>161</b>
4.1	Classification des courbes différentielles . . . . .	161
4.2	Sur l'aspect local des courbes du plan ou de l'espace . . . . .	163
4.2.1	Abscisse curviligne le long d'une courbe ; courbure, centre de courbure . . . . .	163
4.2.2	Repère de Frenet attaché à une courbe gauche ; torsion . . . . .	167
4.2.3	Classification locale des courbes de $\mathbb{R}^3$ <i>via</i> les invariants locaux . . . . .	169
4.3	Surfaces sous l'angle topologique . . . . .	171
4.3.1	Surfaces topologiques et somme connexe . . . . .	171
4.3.2	Les surfaces topologiques sous l'angle de la combinatoire . . . . .	174
4.3.3	Triangulation d'une surface . . . . .	179
4.3.4	Classification des surfaces compactes connexes . . . . .	185
4.3.5	Orientabilité topologique d'une surface connexe compacte . . . . .	186
4.3.6	Homologie singulière d'une surface connexe compacte . . . . .	187
4.4	Les premiers concepts de la géométrie riemannienne . . . . .	191
4.4.1	Notion de métrique sur une variété différentielle . . . . .	191
4.4.2	Notion de repère mobile . . . . .	193
4.4.3	Notion de connexion sur le fibré tangent ; connexion duale . . . . .	194
4.4.4	Connexion associée à une métrique riemannienne . . . . .	197
4.4.5	Courbure d'une connexion . . . . .	205
4.4.6	De l'utilisation du repère mobile à l'application de Gauss attachée à une surface immergée dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	209
4.4.7	Les deux formes fondamentales associées à une surface immergée dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	214
4.4.8	Un formulaire pour les calculs de courbure de surfaces paramétrées . . . . .	216
4.5	Aire, courbure, indices de champs de vecteurs . . . . .	221
4.5.1	Forme d'aire sur une surface riemannienne connexe compacte orientée . . . . .	221

<b>5</b>	<b>Des surfaces de Riemann aux courbes algébriques planes</b>	<b>233</b>
5.1	La géométrie algébrique analytique . . . . .	233
5.1.1	Surfaces de Riemann ; exemples . . . . .	233
5.1.2	Morphismes entre surfaces de Riemann . . . . .	235
5.1.3	Le principe G.A.G.A et le théorème de Liouville . . . . .	241
5.1.4	Formes holomorphes ou méromorphes sur une surface de Riemann	242
5.1.5	Groupe des diviseurs ; notions de degré . . . . .	248
5.2	Initiation à la géométrie algébrique . . . . .	252
5.2.1	L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ revisité . . . . .	252
5.2.2	Ensembles algébriques affines et projectifs . . . . .	254
5.2.3	Décomposition des sous-ensembles algébriques affines de $\mathbb{C}^n$ . . . . .	257
5.2.4	Élimination et théorème des zéros de Hilbert . . . . .	259
5.2.5	Sur la surface de Riemann d'une fonction algébrique . . . . .	269
5.3	Sur la géométrie des courbes projectives planes . . . . .	274
5.3.1	Courbes et 1-cycles algébriques dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . . . . .	274
5.3.2	Points réguliers et singuliers ; tangentes, cône tangent . . . . .	276
5.3.3	Retour au concepts de normalisation et de désingularisation . . . . .	282
5.4	Intersection de courbes projectives planes . . . . .	282
5.4.1	Multiplicité locale d'intersection (vision analytique) . . . . .	282
5.4.2	Le théorème de Bézout, approche "analytique" . . . . .	286
5.4.3	Le théorème de Bézout, vision "algébro-géométrique" . . . . .	288
5.4.4	Quelques conséquences du théorème de Bézout . . . . .	292
5.5	Sur les espaces $\mathbb{P}(S_d)$ de courbes algébriques projectives planes . . . . .	297
5.5.1	Les espaces $S_d$ et $\mathbb{P}(S_d)$ . . . . .	297
5.5.2	Sur les coniques . . . . .	299
5.5.3	Courbe hessienne ; inflexions d'une courbe projective plane . . . . .	301
5.5.4	Sur les cubiques . . . . .	303
<b>6</b>	<b>Annexe : solutions des exercices</b>	<b>313</b>
6.1	Solutions des exercices du chapitre 1 . . . . .	313
6.2	Solutions des exercices du chapitre 2 . . . . .	323
6.3	Solutions des exercices du chapitre 3 . . . . .	332
6.4	Solutions des exercices du chapitre 4 . . . . .	345
6.5	Solutions des exercices du chapitre 5 . . . . .	355
	<b>Repères bibliographiques</b>	<b>363</b>
	<b>Index</b>	<b>365</b>