Exposés de Alain Yger
Bordeaux, Nov-Dec 1998

Théorie de l'intersection
d'après Piotr Tworzewski

Exposé 1

1. Cycles, multiplicités, nombres de Lelong.

1.a. Cycles analytiques, support, composantes, positivité.

On se donne une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension n. On appelle *cycle analytique* sur $\mathcal{X}$ une combinaison linéaire formelle

$$C = \sum_{j\in J} \alpha_j C_j \, ,$$

où J dénote un ensemble d'indices, $\alpha_j \in \mathbf{Z}^*$ pour $j \in J$, et $(C_j)_{j\in J}$ est une collection localement finie de sous ensembles analytiques irréductibles et distincts de $\mathcal{X}$; ici, *localement finie* signifie que toute partie compacte $K \subset \mathcal{X}$ intersecte seulement un nombre fini de sous ensembles C_j. Comme nous supposerons toujours que $\mathcal{X}$ est union dénombrable de compacts, l'ensemble J sera au plus dénombrable.

On appelle *support du cycle* C le sous ensemble analytique

$$|C| = \bigcup_{j\in J} C_j \, .$$

Les ensembles C_j, $j \in J$, sont appelés *composantes* du cycle et les α_j, $j \in J$, *multiplicités* attachées à ces composantes. Le cycle est dit *positif* (ou *effectif*) si $\alpha_j > 0$ pour tout $j \in J$. Si tous les C_j sont des ensembles analytiques de la même dimension $k \leq n$, on dit que C est un k-cycle.

1.b. Faisceau d'idéaux attaché à un cycle analytique positif.

Étant donné un cycle positif

$$C = \sum_{j\in J} \alpha_j C_j \, ,$$

on peut définir le faisceau cohérent d'idéaux correspondant à ce cycle; il s'agit du faisceau d'idéaux

$$\mathcal{I}(C) = \prod_{j\in J} \mathcal{I}(C_j)^{\alpha_j} \, .$$

Rappelons que, pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$$\mathcal{I}(C_j)_x = \{f \in \mathcal{O}_x(\mathcal{X}),\ f = 0 \text{ sur } C_j\} \subset \mathcal{O}_x(\mathcal{X})\, . \tag{1.1}$$

À cette correspondance *cycle analytique* $\mapsto$*faisceau d'idéaux*, répond une correspondance réciproque *faisceau cohérent d'idéaux* $\mapsto$ *cycle analytique.* Étant donné un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\mathcal{X})$, on note $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}$, $k = 0, \ldots, n$, le sous-faisceau des sections dont le support est un ensemble analytique de codimension au moins égale à k. On note C_{kj} les composantes irréductibles du support du faisceau $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1}$ et x_{kj} un point générique sur la composante C_{kj}. On définit le *cycle associé* au faisceau $\mathcal{F}$ comme le cycle

$$C(\mathcal{F}) := \sum_{k,j} \mathrm{length}_{x_{kj}} (\mathcal{F}_k)\ C_{kj}\,. \tag{1.2}$$

Notons que l'on a, pour tout $k = 1, \ldots, n$,

$$\mathcal{F}_k \prod_j I(C_{kj})^{\mathrm{length}_{x_{kj}}(\mathcal{F}_k)} \subset \mathcal{F}_{k-1}$$

et que par conséquent

$$\mathcal{I}(C(\mathcal{F})) \subset \mathrm{Ann}\,(\mathcal{F})\,. \tag{1.3}$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{F}$ est un faisceau quotient

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{O}(\mathcal{X})}{\mathcal{J}}\,,$$

où $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}(\mathcal{X})$ désigne un faisceau cohérent d'idéaux, on a donc

$$\mathcal{I}\left(C\Big(\frac{\mathcal{O}(\mathcal{X})}{\mathcal{J}}\Big)\right) \subset \mathcal{J}\,. \tag{1.4}$$

Notre correspondance entre cycles analytiques effectifs et faisceaux cohérents d'idéaux n'est donc pas aussi parfaite que la correspondance classique entre faisceaux cohérents et sous-schémas, qui à un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ associe le sous schéma de $(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\mathcal{X}))$ correspondant. Cependant, elle suffira à nos besoins ici, bien qu'il y ait bien d'autres manières d'attacher un faisceau d'idéaux à un cycle (et nous en verrons une plus tard).

1.c. Groupe additif des cycles analytiques, sous groupes des k-cycles.

L'ensemble $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ des cycles analytiques sur $\mathcal{X}$ est équipé d'une structure de groupe additif; on notera habituellement $\mathcal{Z}_k(\mathcal{X})$, $k = 0, \ldots, n$, le sous groupe des k-cycles.

Rappelons que le *groupe de Chow d'ordre k* de $\mathcal{X}$, dans la théorie de l'intersection classique, s'obtient en considérant le point de vue schématique: $\mathrm{CH}_k(\mathcal{X})$ est par définition le quotient du groupe abélien libre engendré par les sous-schémas de dimension k, quotienté par le sous groupe engendré par les sous-schémas $[\mathrm{div}(f)]$*, où f est une section du faisceau des fonctions méromorphes attaché à un sous-schéma de $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ de dimension $k+1$. Notre point de vue ici, consistant à adopter le point de vue de la théorie des cycles, et non des sous-schémas, est donc sensiblement plus naïf et différent.

1.d. Degré d'un cycle en un point, nombre de Lelong, multi-degré d'un cycle en un point.

Soit Z un sous ensemble analytique de $\mathcal{X}$ de dimension pure k. On sait associer à Z un courant positif fermé $[Z] \in {}'\mathcal{D}^{(n-k,n-k)}(\mathcal{X})$, unique, et tel que pour toute (k,k) forme φ, C^∞ et à support compact dans $\mathcal{X} \setminus \{\mathrm{Sing}(Z)\}$, on ait

$$< [Z], \varphi >= \int_Z \varphi\,,$$

l'intégrale ci dessus étant bien définie puisque le support de φ ne rencontre aucun point singulier de l'ensemble analytique Z. Le point crucial ici est que l'on peut prolonger cette action en celle d'un courant positif fermé sur $\mathcal{X}$.

Si maintenant z est un point de l'ensemble Z, on peut se placer dans une carte locale U (les coordonnées locales étant $\zeta_1, \dots, \zeta_n$) et calculer, si r est assez petit, la "masse" de $[Z]$ dans la boule de centre z et de rayon r, soit

$$\sigma_{[Z]}(z,r) = \frac{1}{k!} < [Z], (\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\|\zeta\|^2)^k \chi_{B(0,r)} >= \frac{1}{k!}\int_{Z\cap B(0,r)} (\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\|\zeta\|^2)^k\,.$$

On peut montrer que le quotient de cette masse avec le volume de la boule de centre z et de rayon r, soit

$$\frac{\sigma_{[Z]}(z,r)}{\pi^{2k} r^{2k}/k!}$$

tend (en décroissant) vers une limite lorsque r tend vers 0, et que cette limite est un nombre entier $\nu([Z];z) \geq 1$, ou encore $\nu(Z;z)$, dit *nombre de Lelong* du courant d'intégration $[Z]$ au point z. Cette limite est indépendante du choix des coordonnées locales, comme l'a démontré Siu (on pourra se reporter au papier de J.P. Demailly*).

Ce nombre de Lelong, objet analytique, correspond en fait (c'est le théorème de Thie, dont on trouve une preuve plus moderne dans l'article de Demailly mentionné plus haut) à la

---

* Si $(W, \mathcal{O}_W)$ est un sous-schéma de $(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\mathcal{X}))$ et f une section de $\mathcal{O}_W$, f détermine un diviseur de Cartier $\mathrm{div}(f)$ sur W, et l'on pose

$$[\mathrm{div}\, f] := \sum_{\substack{V\subset W\\ \mathrm{codim}_W V=1}} \mathrm{ord}_V(\mathrm{div}(f))V\,.$$

* Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégrabilité et d'analyticité, Acta Math. 159 (1987), 153-169.

multiplicité (au sens de Hilbert-Samuel) de Z au point z. Cette multiplicité s'interprète au moins des deux autres manières suivantes:

• C'est le nombre de points en lesquels un sous espace linéaire de dimension $n-k$, voisin de z, et parallèle à une direction transverse à Z au point z, coupe précisément l'ensemble Z.

• Si l'on considère des coordonnées locales $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ centrées au point z et que l'on définisse $\mathcal{I}_{Z,z}$ comme l'idéal (dans $\mathcal{O}_n$) des germes de fonctions s'annulant sur Z, alors la multiplicité de Z au point z est aussi la multiplicité dans $\mathcal{O}_n$ de l'idéal

$$\mathcal{I}_{Z,z} + (L_1, \ldots, L_k)\,,$$

où $L_1, \ldots, L_k$ sont des formes linéaires génériques.

Ce nombre $\nu(Z;z)$ est appelé aussi *degré* de Z au point z.

Si maintenant C est un cycle analytique

$$C = \sum_j \alpha_j C_j$$

et $z \in |C|$, on appelle *degré du cycle* C au point z le nombre entier relatif

$$\nu(C;z) = \sum_j \alpha_j \nu(C_j;z)$$

(notons qu'il n'y a qu'un nombre fini de α_j non nuls concernés puisque J est localement fini).

Remarque 1. *Si C est un k-cycle effectif*

$$C = \sum_j \alpha_j C_j$$

et

$$\mathcal{I}(C) = \prod_j \mathcal{I}(C_j)^{\alpha_j}$$

est le faisceau cohérent d'idéaux associé, le degré du cycle C en un point z de son support est aussi, une fois choisies des coordonnées locales sur $\mathcal{X}$ centrées en z, la multiplicité dans $\mathcal{O}_n$ de l'idéal

$$\mathcal{I}(C)_z + (L_1, \ldots, L_k)\,,$$

où les L_i sont des formes linéaires génériques et $\mathcal{I}(C)z$ désigne l'idéal engendré dans $\mathcal{O}_n$ par les germes en z des sections de $\mathcal{I}(C)$, exprimés dans les coordonnées locales. Comme dans $\mathcal{O}_n$, la multiplicité d'un idéal $\mathcal{M}$ primaire est aussi celle de sa clôture intégrale, la multiplicité en z du cycle C est la même que la multiplicité dans $\mathcal{O}_n$ de $\overline{\mathcal{I}(C)_z}+(L_1, \ldots, L_k)$, les formes L_i étant toujours génériques. Cette remarque sera importante par la suite.

Étant donné un cycle C, il admet une décomposition unique

$$C = \sum_{k=0}^{n} C_{(k)}$$

où $C_{(k)}$ est un k-cycle. On appelle <u>*multidegré*</u> du cycle analytique C au point z du support de C l'élément

$$\tilde{\nu}(C; z) = (\nu(C_{(n)}; z), \ldots, \nu(C_{(0)}; z)) \in \mathbf{Z}^{n+1} .$$

Si $\mathcal{X}$ est équipé de la topologie de Zariski et si C est un cycle analytique effectif, les applications

$$z \mapsto \nu(C; z)$$

et

$$z \mapsto \tilde{\nu}(C; z)$$

sont semi-continues supérieurement (c'est un théorème de Whitney); pour ce qui est de la semi-continuité supérieure de la seconde application, on doit équiper $\mathbf{N}^{n+1}$ de l'ordre lexicographique. On peut aussi, pour justifier ce fait, invoquer le théorème de Siu * : si T est un courant positif fermé sur $\mathcal{X}$, de type $(n-k, n-k)$, par exemple le courant d'intégration

$$\sum_j \alpha_j [C_j]$$

sur un cycle effectif, alors, pour tout $\gamma > 0$, l'ensemble de niveau

$$\{z \in \mathcal{X}\, \nu(T, z) \geq \gamma\}$$

est un sous ensemble analytique de $\mathcal{X}$ de dimension au plus k.

Lojasiewicz a introduit le concept d'<u>*ensemble analytiquement constructible*</u> sur une variété X. Un sous-ensemble A de $\mathcal{X}$ est dit *analytiquement constructible* si et seulement si, pour tout point z de A, il existe un voisinage V_z de a dans $\mathcal{X}$, et une collection finie f_{jl}, $j = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, p_j$, de fonctions holomorphes dans V_z tel que

$$A \cap V_z = \bigcup_{j=1}^{p} \bigcap_{l=1}^{p_j} A_{jl} ,$$

où A_{jl} est soit l'ensemble $\{z \in V_z,\ f_{jl} = 0\}$, soit l'ensemble $\{z \in V_z,\ f_{jl} \neq 0\}$. Notons que l'adhérence d'un ensemble analytiquement constructible est un sous ensemble analytique. Une fonction de $\mathcal{X}$ dans $\mathbf{C}$ est dite <u>*fonction analytiquement constructible*</u> si et seulement si son graphe est un sous ensemble analytiquement constructible de $\mathcal{X} \times \mathbf{C}$. Une fonction à

* Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, Invent. Math. 27 (1974), 53-156.

valeurs dans l'ensemble discret $\mathbf{Z}$ est analytiquement contructible si et seulement si toutes ses fibres le sont. Ainsi, si C est dans $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$, la fonction

$$\nu(C): \ z \mapsto \nu(C; z)$$

est une fonction analytiquement constructible et localement bornée (du fait de la semi-continuité supérieure de $\nu(A)$ lorsque A est un cycle effectif et $\mathcal{X}$ est équipé de la topologie de Zariski).

On a en fait le lemme qui sera crucial pour nous plus tard:

Lemme 0. *Soit f une application analytiquement constructible de $\mathcal{X}$ dans $\mathbf{C}$, à valeurs dans $\mathbf{Z}$; il existe un unique cycle dans $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ tel que $f(z) = \nu(C; z)$. Il y a donc une bijection entre le groupe des cycles sur $\mathcal{X}$ et l'ensemble $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ des applications analytiquement constructibles de $\mathcal{X}$ dans $\mathbf{C}$, à valeurs dans $\mathbf{Z}$.*

Preuve. Supposons que f soit dans $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ et que C soit irréductible. Comme on a

$$C = \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} \overline{C \cap f^{-1}(j)},$$

on a, par irréductibilité de C et puisque tous les ensembles $\overline{C \cap f^{-1}(j)}$ sont des sous ensembles analytiques (puisque f est analytiquement constructible)

$$C = \overline{C \cap f^{-1}(j_0)}$$

pour un certain $j_0 \in \mathbf{Z}$. Supposons que $f \in \mathcal{K}(\mathcal{X}) \setminus \nu(\mathcal{Z}(\mathcal{X}))$. On peut poser, pour tout $g \in \nu(\mathcal{Z}(\mathcal{X}))$,

$$Y(g) = \overline{\{z \in \mathcal{X}; f(z) \neq g(z)\}}\,.$$

Il s'agit d'un sous ensemble analytique de $\mathcal{X}$ (puisque f et g sont analytiquement constructibles) et il existe g_0 tel que la dimension de $Y(g_0)$ soit minimale parmi toutes les dimensions des $Y(g)$. On introduit la décomposition

$$Y(g_0) = \bigcup_j C_j$$

en composantes irréductibles. Puisque l'on a, pour chaque j,

$$C_j = \overline{C_j \cap f^{-1}(\alpha_j)} = \overline{C_j \cap g_0^{-1}(\beta_j)}$$

pour un certain choix de α_j et β_j dans $\mathbf{Z}$, on peut poser

$$g_1 = g_0 + \nu\Big(\sum_j (\alpha_j - \beta_j) C_j; \ \cdot\ \Big)$$

et remarquer que

$$\dim Y(g_1) < \dim Y(g_0)\,,$$

ce qui est contradictoire avec la définition de g_0. $\diamondsuit$

2. Intersection de deux cycles analytiques selon Tworzewski.

2.1. *Restriction d'un cycle analytique à une partie d'une variété analytique complexe.*

Soit $\mathcal{X}$ une variété analytique complexe de dimension n et $\mathcal{S}$ un sous ensemble de $\mathcal{X}$.

Étant donné un cycle

$$C = \sum_j \alpha_j C_j\,,$$

on peut définir le cycle $C^{\mathcal{S}}$ (dit encore *partie de C portée par $\mathcal{S}$*) comme étant par définition le cycle

$$C^{\mathcal{S}} = \sum_{j,\ C_j \subset S} \alpha_j C_j\,. \tag{2.1}$$

Notons que nous n'avons fait ici aucune hypothèse sur $\mathcal{S}$; lorsque aucune composante de C n'est incluse dans $\mathcal{S}$, on a $C^{\mathcal{S}} = 0$. Pour que la définition induise la construction d'objets non triviaux, il est bien sûr naturel d'enrichir les hypothèses sur $\mathcal{S}$ (ce que nous ferons plus loin en supposant par exemple que $\mathcal{S}$ est une sous-variété analytique fermée de $\mathcal{X}$).

En tout cas, nous pouvons ainsi réaliser un *scindage* du cycle C en

$$C = C^{\mathcal{S}} + (C - C^{\mathcal{S}})\,.$$

Ce scindage respecte bien sûr l'effectivité des cycles: si C est effectif, les deux cycles $C^{\mathcal{S}}$ et $C - C^{\mathcal{S}}$ le sont.

2.2. *Indice et multi-indice de contact en un point d'un ensemble analytique avec une sous-variété fermée.*

Considérons une sous-variété fermée $\mathcal{S}$ de dimension $0 \le s \le n-1$ de la variété analytique complexe $\mathcal{X}$ et un ensemble analytique Z de $\mathcal{X}$ de dimension pure $0 \le k \le n$ tel que $Z \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$.

Nous nous proposons de définir naturellement un *indice de contact* entre Z et $\mathcal{S}$ en un point z de $Z \cap \mathcal{S}$.

Soit z un tel point.

• On commence à définir un *multi-indice de contact $\tilde{\nu}_{U,\mathcal{H}}(C, \mathcal{S}; z)$ selon un ouvert U et un système ordonné $\mathcal{H} := (\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{n-s})$ d'hypersurfaces lisses d'approche dans U.*

Voici les trois contraintes concernant le choix de U et du système ordonné d'hypersurfaces d'approche; ces contraintes sont bien sûr subordonnées aux données $Z, \mathcal{S}, z$.

Contrainte 1 (relative à z). *L'ouvert est simplement un ouvert de $\mathcal{X}$ contenant le point z.*

Contrainte 2 (relative à $\mathcal{S}$). *Les hypersurfaces d'approche $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, n-s$, sont des hypersurfaces de U contenant $U \cap \mathcal{S}$ et telles que, si $T_x(\mathcal{H}_i)$ (resp. $T_x(\mathcal{S})$) désigne le sous-espace tangent complexe à $\mathcal{H}_i$ (resp. $\mathcal{S}$) au point $x \in U \cap \mathcal{S}$, on ait*

$$T_x(\mathcal{S}) = \bigcap_{i=1}^{n-s} T_x(\mathcal{H}_i)\,. \tag{2.2}$$

en tout point x de $U \cap \mathcal{S}$. Cela signifie que l'intersection $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{H}}$ de ces $n-s$ hypersurfaces dans U est une variété lisse de dimension s en tous les points de $U \cap \mathcal{S}$ et que les ensembles analytiques $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{H}}$ et $\mathcal{S}$ sont tangents en chacun de ces points.

Contrainte 3 (relative à Z). *On exige aussi du système ordonné d'hypersurfaces $\mathcal{H}$ de U qu'il intersecte proprement l'ensemble analytique Z dans la variété $U \setminus \mathcal{S}$. Cela signifie que l'on impose que pour tout i entre 1 et $n-s$*

$$\dim \Big((U \setminus \mathcal{S}) \cap Z \cap \mathcal{H}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{H}_i \Big) = k - i \text{ ou } (U \setminus \mathcal{S}) \cap Z \cap \mathcal{H}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{H}_i = \emptyset\,. \tag{2.3}$$

Par contre, sur $U \cap \mathcal{S}$, l'intersection de Z avec les hypersurfaces $\mathcal{H}_i$ successives peut être impropre (c'est d'ailleurs ce qui nous intéresse ici).

Remarque 2. *La construction de tels $\mathcal{H}_i$ ne pose pas de difficulté; on peut la faire en suivant le schéma algorithmique que nous décrivons ci dessous.*

Voici maintenant, une fois réalisé un choix de $(U, \mathcal{H})$ de manière à ce que nos trois contraintes soient respectées, comment l'on procède algorithmiquement pour définir notre multi-indice de contact $\tilde{\nu}_{U,\mathcal{H}}(C, \mathcal{S}; z)$:

→ On considère le cycle $Z_0 = Z \cap U$ et on le scinde (considéré comme cycle analytique de la variété U) selon le sous-ensemble $\mathcal{S} \cap U$ (qui est d'ailleurs lui même une variété analytique de dimension s) en

$$Z_0 = Z_0^{\mathcal{S}} + (Z_0 - Z_0^{\mathcal{S}})\,.$$

→ Soit

$$Z_0 - Z_0^{\mathcal{S}} = \sum_{j_0} \beta_{j_0} C_{j_0}\,,$$

où les C_{j_0} sont des sous ensembles analytiques irréductibles de U et non contenus dans $\mathcal{S}$, la décomposition de $Z_0 - Z_0^{\mathcal{S}}$ dans $\mathcal{Z}(U)$. Comme $\mathcal{H}_1$ est une hypersurface lisse, on peut considérer l'intersection avec $\mathcal{H}_1$ de ce cycle $Z_0 - Z_0^{\mathcal{S}}$ comme étant le cycle Z_1 de $\mathcal{Z}(U)$ défini ici correctement, soit en le considérant comme le cycle correspondant au courant d'intégration $[Z_0 - Z_0^{\mathcal{S}}] \wedge [\mathcal{H}_1]$ (l'intersection de $|Z|$ avec $\mathcal{H}_1$ étant propre hors de $\mathcal{S}$, ceci nous définir bien un cycle de dimension $k-1$; ici nous avons affaire à la théorie de l'intersection dans le cas propre). Ce cycle se scinde suivant $\mathcal{S} \cap U$ en

$$Z_1 = Z_1^{\mathcal{S}} + (Z_1 - Z_1^{\mathcal{S}})\,.$$

$\rightarrow$ On recommence l'opération à partir cette fois du cycle $Z_1 - Z_1^{\mathcal{S}}$ que l'on intersecte avec $\mathcal{H}_2$ pour obtenir un nouveau cycle analytique Z_2. On scinde selon $\mathcal{S} \cap U$ et l'on part de $Z_2^{\mathcal{S}}$ pour construire Z_3 en intersectant avec $\mathcal{H}_3$, etc...

Après $n - s$ opérations, on dispose d'un cycle effectif de $\mathcal{S} \cap U$, que nous noterons $Z.\mathcal{H}$ et qui est par définition

$$Z.\mathcal{H} = Z_0^{\mathcal{S}} + \cdots + Z_{n-s}^{\mathcal{S}} \,. \tag{2.4}$$

Notons au passage que, comme $\mathcal{S}$ est de dimension s et que l'on a fait chuter la dimension de toutes les composantes des cycles de 1 en passant de Z_k à Z_{k+1} (voir la contrainte 3), on a certainement $|Z_{n-s} - Z_{n-s}^{\mathcal{S}}| \cap \mathcal{S} = \emptyset$.

On pose maintenant, par définition

$$\tilde{\nu}_{U,\mathcal{H}}(Z, \mathcal{S}; z) := \tilde{\nu}(Z.\mathcal{H}; z) = (\tilde{\nu}_s(Z.\mathcal{H}; z), \ldots, \tilde{\nu}_0(Z.\mathcal{H}; z)) \in \mathbf{N}^{s+1} \,.$$

On pose aussi

$$\nu_{U,\mathcal{H}}(Z, \mathcal{S}; z) := \sum_{i=0}^{s} \tilde{\nu}_i(Z.\mathcal{H}; z) \in \mathbf{N} \,.$$

• Une fois tous ces multi-indices de contact relatifs à tous les choix possibles de U et de $\mathcal{H}$ assujettis aux trois contraintes, on peut définir les *multi-indices* et *indices de contact* de Z et $\mathcal{S}$ au point z respectivement par

$$\tilde{\nu}(Z, \mathcal{S}; z) := \min_{\text{lex}} \{\tilde{\nu}_{U,\mathcal{H}}(Z, \mathcal{S}; z);\ U,\ \mathcal{H}\} \tag{2.5}$$

et

$$\nu(Z, \mathcal{S}; z) := \min\{\nu_{U,\mathcal{H}}(Z, \mathcal{S}; z);\ U,\ \mathcal{H}\} \tag{2.6}$$

Remarque 3. *Dans le cas algébrique ($\mathcal{X} = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$), nous pouvons majorer très simplement l'indice de contact entre une sous variété algébrique de dimension pure égale à k et une sous variété analytique fermée $\mathcal{S}$ de $\mathcal{X}$; nous pouvons choisir les $\mathcal{H}_i$ comme étant des hyperplans projectifs (on prend ici $U = \mathbf{P}^n$); par le théorème de Bézout, on a, si $k = \dim Z$,*

$$\deg Z_{i+1} = \deg(Z_i - Z_i^{\mathcal{S}}).\mathcal{H}_i) = \deg(Z_i - Z_i^{\mathcal{S}}) = \deg(Z_{i+1} - Z_{i+1}^{\mathcal{S}}) + \deg(Z_{i+1}^{\mathcal{S}})$$

tant que la dimension de Z_i reste strictement positive. En itérant ce processus tout au long de notre algorithme précédent, on trouve

$$\deg Z = \deg Z_0^{\mathcal{S}} + \cdots + \deg Z_k^{\mathcal{S}} + \deg(Z_k - Z_k^{\mathcal{S}}) \,.$$

Il s'ensuit que l'on a toujours l'inégalité

$$\nu(Z, \mathcal{S}; z) \leq \deg Z$$

pour tout $z \in |Z| \cap \mathcal{S}$ dans ce cas.

2.3. Le théorème fondamental de P. Tworzewski et ses corollaires.

Nous pouvons énoncer maintenant le théorème fondamental de Tworzewski.

Théorème 1. *Soit $\mathcal{Y}$ une variété analytique complexe de dimension m et $\mathcal{S}$ une sous-variété fermée de dimension s de $\mathcal{Y}$. Soit Z un sous ensemble analytique de dimension pure de $\mathcal{Y}$. L'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathbf{N}^{s+1}$*

$$\tilde{g}: \ z \mapsto \tilde{\nu}(Z, \mathcal{S}; z)$$

est semi-continue supérieurement lorsque $\mathcal{S}$ est équipé de la topologie de Zariski, et $\mathbf{N}^{s+1}$ ordonné suivant l'ordre lexicographique.

Nous admettrons ici pour l'instant ce théorème, mais nous en déduirons deux corollaires majeurs.

Corollaire 1.1. *Soit $\mathcal{Y}$ une variété analytique complexe de dimension m et $\mathcal{S}$ une sous-variété fermée de dimension s de $\mathcal{Y}$. Soit Z un sous ensemble analytique de dimension pure de $\mathcal{Y}$. L'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathbf{N}$*

$$g: \ z \mapsto \nu(Z, \mathcal{S}; z)$$

est analytiquement constructible.

Preuve. Il suffit de montrer que les fibres de cette application g sont analytiquement constructibles. Or, par définition des fonctions g et $\tilde{g}$, on a, pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$g^{-1}(\{p\}) = \bigcap_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^{s+1} \\ \alpha_0 + \cdots + \alpha_s = p}} \tilde{g}^{-1}(\{\alpha\}) \, .$$

Comme $\tilde{g}$ est semi-continue supérieurement lorsque $\mathcal{S}$ est équipé de la topologie de Zariski et $\mathbf{N}^{s+1}$ de l'ordre lexicographique, tous les ensembles $g^{-1}(\{p\})$, $p \in \mathbf{N}$ sont analytiquement constructibles. $\diamondsuit$

Soit $\mathcal{X}$ une variété analytique complexe de dimension n et Δ la sous variété de dimension n de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ définie comme la diagonale de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, soit

$$\Delta := \{(z_1, z_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}, \ z_1 = z_2\} \, .$$

Cette variété est définie localement comme une intersection complète. C'est une sous-variété fermée de dimension n de la variété analytique complexe $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ (qui elle est de dimension $2n$).

Corollaire 1.2. *Soient C_1 et C_2 deux sous ensembles analytiques irréductibles de $\mathcal{X}$. La fonction de Δ dans $\mathbf{N}$*

$$z \mapsto \nu(C_1 \times C_2, \Delta; z)$$

est une fonction analytiquement constructible.

Preuve. C'est un cas particulier du corollaire précédent. $\diamondsuit$.

<u>*2.4. Intersection de deux cycles.*</u>

On commence à définir le cycle $Z_1 \bullet Z_2$ si Z_1 et Z_2 sont deux sous ensembles analytiques irréductibles de la variété analytique complexe $\mathcal{X}$. On applique le corollaire 1.2 ci dessus pour dire que la fonction

$$z \in \mathcal{X} \mapsto \nu(Z_1 \times Z_2, \Delta; (z, z))$$

est une fonction analytiquement constructible de $\mathcal{X}$ dans $\mathbf{N}$. On applique enfin le lemme 0 pour en conclure qu'il existe un unique élément de $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$, que l'on s'empressera de noter $Z_1 \bullet Z_2$ tel que

$$\forall z \in \mathcal{X},\ \nu(Z_1 \times Z_2, \Delta; (z, z)) = \nu(Z_1 \bullet Z_2; z)\,.$$

Si maintenant on considère deux cycles

$$C_1 := \sum_{j_1} \alpha_{j_1} C_{1,j_1}\ ,\ C_2 := \sum_{j_2} \beta_{j_2} C_{2,j_2}\ , \tag{2.7}$$

on définira naturellement

$$C_1 \bullet C_2 = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \alpha_{j_1} \beta_{j_2} C_{1,j_1} \bullet C_{2,j_2} \tag{2.8}$$

comme le <u>*produit d'intersection des deux cycles*</u>.

<u>*2.5. Le cas de l'intersection propre.*</u>

Il est naturel d'examiner ce qui se passe dans la définition de $Z_1 \bullet Z_2$ lorsque Z_1 et Z_2 sont deux sous-ensembles analytiques irréductibles de dimensions respectives k_1 et k_2 s'intersectant proprement, ce qui signifie que $Z_1 \cap Z_2$ est un sous-ensemble analytique de dimension pure, avec

$$\dim(Z_1 \cap Z_2) = k_1 + k_2 - \dim \mathcal{X} = k_1 + k_2 - n\,.$$

Si les Γ_j sont les composantes irréductibles de $Z_1 \cap Z_2$ la multiplicité γ_j de l'intersection propre le long de Γ_j est bien définie (par exemple) dans la théorie de l'intersection classique comme le nombre de Lelong $\gamma_j := \nu(\Gamma_j; z_j)$ au point générique z_j de Γ_j. On a alors le cycle $Z_1 \cdot Z_2$ défini comme

$$Z_1 \cdot Z_2 := \sum_j \gamma_j \Gamma_j\,.$$

Il est intéressant de confronter ce cycle au cycle $Z_1 \bullet Z_2$ que nous venons de construire, ce que nous allons faire.

Comme $Z_1 \times Z_2$ et Δ s'intersectent aussi proprement dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ et que les composantes irréductibles de $(Z_1 \times Z_2) \cap \Delta$ sont les $\Delta_{\Gamma_j} := \{(z, z),\ z \in \Gamma_j\}$, on a aussi

$$(Z_1 \times Z_2) \cdot \Delta = \sum_j \gamma_j \Delta_{\Gamma_j}\,.$$

En effet, si en un point (z_j, z_j), où z_j désigne un point générique de Γ_j, on intersecte $(\Gamma_j \times \Gamma_j) \cap \Delta$ avec $n - (k_1 + k_2)$ hypersurfaces lisses de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ en position générale, on retrouve bien comme "nombre d'intersection" le nombre γ_j.

Essayons de calculer en un point (z, z) de $\Delta \cap (Z_1 \times Z_2)$ le multi-indice de contact de $Z_1 \times Z_2$ avec Δ au point (z, z). Prenons un voisinage U de (z, z) dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ et n hypersurfaces $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ satisfaisant à nos contraintes (relativement à $Z_1 \times Z_2$). Comme on peut supposer que $\Delta \cap U = \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{H}_j$, on a

$$\mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}_2 \cdots \mathcal{H}_n = \Delta \cap U$$

(c'est une égalité de cycles). Mais l'opération d'intersection entre cycles dont les supports s'intersectent proprement est une opération associative (c'est un résultat classique que l'on trouve par exemple dans [Dr]*, théorème 5.1, mais que l'on peut aussi comprendre du point de vue analytique comme la règle d'associativité dans ce cadre de l'opération de multiplication entre courants d'intégration, on y reviendra). On a donc, en suivant dans ce cas l'algorithme à partir de $Z_0 = (Z_1 \times Z_2) \cap U$,

$$Z_0^{\Delta} = \cdots = Z_{n-1}^{\Delta} = 0$$

(car tous ces cycles sont nuls puisque pour raison de dimension, aucune composante de l'un des Z_i, $i = 0, \ldots, n-1$, ne peut être incluse dans Δ) et, précisément avec cette règle d'associativité

$$(Z_1 \times Z_2).\mathcal{H} = Z_n^{\Delta} = (Z_1 \times Z_2) \cdot (\mathcal{H}_1 \cdots \mathcal{H}_n) = (Z_1 \times Z_2) \cdot (\Delta \cap U)\,.$$

Cela suffit donc à prouver que l'indice de contact de $Z_1 \times Z_2$ avec la diagonale Δ au point (z, z) vaut $\nu((Z_1 \times Z_2) \cdot \Delta; (z, z))$. On en déduit donc

$$Z_1 \bullet Z_2 = Z_1 \cdot Z_2$$

dans ce cadre (intersection propre).

2.6. Le cas de l'intersection discrète.

Signalons encore que si Z_1 et Z_2 sont deux sous-ensembles analytiques de $\mathcal{X}$ de dimensions respectives k_1 et k_2 tels que $\dim(Z_1 \cap Z_2) = 0$, on trouve naturellement

$$Z_1 \bullet Z_2 = \sum_{a \in Z_1 \cap Z_2} \sigma(a) a\,,$$

où $\sigma(a)$ est défini de l'une des deux manières suivantes:

• *suivant un point de vue géométrique.*

* R. Draper, Intersection theory in analytic geometry, Math. Ann. 180 (1969), 175-204.

On a

$$\sigma(a) = \min_{V \in \mathcal{F}_{(a,a)}(Z_1 \times Z_2, \Delta)} i((Z_1 \times Z_2) \cdot \Delta; (a,a))\,,$$

où $\mathcal{F}_{(a,a)}(Z_1 \times Z_2, \Delta)$ décrit la famille des sous- ensembles analytiques de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ de dimension $2n - k_1 - k_2$ (donc juste ce qu'il faut pour intersecter $Z_1 \times Z_2$ de manière propre au point (a,a)), intersectant précisément $Z_1 \times Z_2$ au point (a,a) et "collant" à la diagonale Δ en (a,a), ce qui signifie que le germe de Δ en (a,a) est inclus dans le germe de V en (a,a). L'indice d'intersection $i((Z_1 \times Z_2) \cdot \Delta; (a,a))$ de $Z_1 \times Z_2$ et V en (a,a) est alors calculé suivant la théorie classique de l'intersection propre.

En fait, on peut préciser où ce minimum est atteint. On a, selon le théorème 4.4 dans le papier de R. Achilles, P. Tworzewski, T. Winiarski*,

$$\sigma(a) = i((Z_1 \times Z_2).W; (a,a))$$

lorsque W est un sous-ensemble analytique de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ de dimension $2n - k_1 - k_2$ tel que $\dim((Z_1 \times Z_2) \cap W) = \{(a,a)\}$, que W soit un germe de variété au point (a,a) tel que l'on ait

$$T_{(a,a)}(\Delta) = T_{(a,a)}(W) \cap C_{(a,a)}(Z_1 \times Z_2, \Delta)\,,$$

où

$$C_{(a,a)}(Z_1 \times Z_2, \Delta)$$

désigne le cône tangent relatif* des ensembles $Z_1 \times Z_2$ et Δ au point (a,a).

C'est ce point de vue que l'on adopte pour montrer que cette définition cadre avec la construction plus générale de Tworsewski. En effet, si l'on considère un système $(U, \mathcal{H})$ obéissant aux trois contraintes exigées pour le calcul du multi-indice de contact de $Z_1 \times Z_2$ et Δ en (a,a), on peut supposer (sans perdre en généralité) que

$$\dim(\mathcal{H}_1 \cap \cdots \mathcal{H}_{k_1+k_2}) = 2n - (k_1 + k_2)\,,$$

ce qui donne, toujours avec l'associativité du produit d'intersection dans le cas propre

$$(Z_1 \times Z_2).\mathcal{H} = Z^{\Delta}_{k_1+k_2} = i((Z_1 \times Z_2).W; (a,a))\,(a,a)\,,$$

où

$$W := \mathcal{H}_1 \cap \cdots \mathcal{H}_{k_1+k_2}\,.$$

* On improper isolated intersection in complex analytic geometry, Ann. Polon. Math. 51 (1990), 21-36.

* On rappelle que le cône tangent relatif de deux sous-ensembles analytiques A et B d'un ouvert de $\mathbf{C}^m$ qui s'intersectent en un point isolé z est défini comme l'ensemble des vecteurs v de $\mathbf{C}^m$ tels qu'il existe une suite $(a_l)_l$ de points de A convergent vers z, une suite $(b_l)_l$ de points de B convergent aussi vers z, et une suite $(\lambda_l)_l$ de nombres complexes, telles que $\lambda_l(a_l - b_l) \mapsto v$ lorsque l tend vers l'infini.

On a aussi $Z_j^{\Delta} = 0$ pour $j \neq k_1 + k_2$ et

$$\tilde{\nu}((Z_1 \times Z_2).\mathcal{H}, \Delta; (a,a)) = (0, \ldots, 0, \sigma(a))\,.$$

La fonction g correspondant au cycle $Z_1 \bullet Z_2$ est donc exactement la fonction

$$a \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } a \notin Z_1 \cap Z_2 \\ \sigma(a) \text{ si } a \in Z_1 \cap Z_2 \end{cases}$$

Ceci montre bien que les deux approches se recollent.

Ce point de vue respecte donc l'additivité: par exemple si Z_1 est union des cycles Z_{1j}, $j = 1, \ldots, N$, alors

$$\sigma(a) = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j(a)\,,$$

où $\sigma_j(a)$ désigne l'indice de multiplicité en a de Z_{1j} avec Z_2.

• *suivant un point de vue plus algébrique.*

Suivant Achilles, Tworzewski et Winiarski (Proposition 6.3 du papier précédemment mentionné), on a aussi, si $I_{\Delta,(a,a)}$ l'idéal du germe de la diagonale Δ au point (a,a) dans le produit tensoriel analytique

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X},a} \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{\mathcal{X},a}\,,$$

$$\sigma(a) = e\Big(I_{\Delta,(a,a)} \mathcal{O}_{Z_1,a} \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{Z_2,a}\Big)\,,$$

où e désigne la multiplicité prise au sens de Hilbert-Samuel (pour un idéal $\mathcal{M}$-primaire dans un anneau local). Remarquons, sur un exemple (dans $\mathbf{C}^3$) que cette multiplicité d'intersection n'est pas

$$e(I_{Z_2,a} \mathcal{O}_{Z_1,a})\,.$$

Par exemple, si $Z_1 := \{0\}$ et Z_2 est l'union des deux droites $\{x_1 = x_2 = 0\}$ et $\{x_1 = x_3 = 0\}$, on a $e(I_{Z_2,a} \mathcal{O}_{Z_1,a}) = 1$ tandis que $e\Big(I_{\Delta,(a,a)} \mathcal{O}_{Z_1,a} \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{Z_2,a}\Big) = 2$.

Références.

R. Achilles, W. Vogel, On multiplicities for improper intersections, Journal of Algebra, 168 (1994), 123-142.

R. Achilles, P. Tworzewski, T. Winiarski, On improper isolated intersection in complex analytic geometry, Ann. Polon. Math. 51 (1990), 21-36.

E. Cygan, T. Krásiński, P. Tworsewski, Separation at infinity and the Lojasiewicz exponent of polynomials mappings, IMUJ Preprint, 1997/22, Krakow.

J. P. Demailly, Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégrabilité et d'analyticité, Acta Math. 159 (1987), 153-169.

R. Draper, Intersection theory in analytic geometry, Math. Annalen 180 (1989), 173-204.

J. Kollár, Effective Nullstellensatz for arbitrary ideals, e-preprint: **math.ag/9805091**.

P. Tworzewski, Intersection theory in complex analytic geometry, Ann. Olon. Math. 62 (1995), 177-191.

Théorie de l'intersection
d'après Piotr Tworzewski

Exposé 2

3. Convergence de suites de p-cycles.

1.a. L'approche analytique.*

Étant donnée une suite de p cycles effectifs $(C_k)_{k\in\mathbf{N}}$, nous pouvons, comme nous l'avons vu dans la section 1, lui associer une suite de courants $(n-p, n-p)$ positifs $([C_k])_{k\in\mathbf{N}}$.

Définition 1. *Étant donnée une suite de p cycles effectifs $(C_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et un p-cycle positif C_∞, nous dirons que cette suite converge vers le cycle C_∞ si et seulement si la suite des courants $([C_k])_{k\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers le courant C_∞, c'est à dire: pour toute forme test φ de type (p,p), de classe C^∞ et à support compact dans $\mathcal{X}$,*

$$< [C_k], \varphi > \longrightarrow < [C_\infty], \varphi > \ .$$

La convergence de la suite de cycles $([C_k])_k$ vers le cycle C_∞ implique la convergence des sous-ensembles fermés $F_k = |C_k|$ vers le sous-ensemble fermé $F_\infty = |C_\infty|$ au sens suivant:

Définition 2. *Une suite $(F_k)_k$ de fermés de $\mathcal{X}$ converge vers un fermé F_∞ si et seulement si*
- *pour tout $z \in F_\infty$, pour tout voisinage V de z, tous les F_k, sauf éventuellement un nombre fini, intersectent V.*
- *pour tout $z \notin F_\infty$, il existe un voisinage V_z de z tel que au plus un nombre fini de F_k intersectent V_z.*

Étant donnée une suite de fermés $(F_k)_k$ (non nécessairement convergente), nous noterons plus généralement $\mathrm{Ls}[(F_k)_k$ l'ensemble des points adhérents au sens précédent à la suite de fermés, soit le fermé F constitué des points x tels que tout voisinage de x rencontre une infinité de fermés F_k. *Étant donné une suite de fermés $(F_k)_k$, on peut toujours en extraire une sous suite qui converge vers le fermé* $\mathrm{Ls}[(F_k)_k$.

Étant donné un p-cycle positif C et une sous-variété analytique $\mathcal{S}$ de $\mathcal{X}$ de dimension s (avec $p+s \geq n$) nous pouvons associer au cycle son courant d'intégration (c'est une forme différentielle à coefficients mesures puisqu'il s'agit d'un courant positif) et définir un courant (noté $[C] \wedge [\mathcal{S}]$) de type $(2n-p-s, 2n-p-s)$ de la manière suivante: si φ est une forme différentielle de type $(p+s-n, p+s-n)$, alors

$$< [C] \wedge [\mathcal{S}], \varphi > = < [C], \varphi_{|\mathcal{S}} >$$

* Pour plus de compléments sur cette section, voir aussi le survey de J.P. Demailly, L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory, Lecture Notes 1646, Springer (1996), section 2, ou aussi son article dans la Gazette Mathématique de France, 53 (1992), 131-159.

(la restriction d'une forme différentielle à une sous-variété de $\mathcal{X}$ ne pose pas de problèmes). Dans le cas où $\mathcal{S}$ est une hypersurface analytique lisse $\mathcal{H}$ intersectant proprement C, ce courant positif fermé est le courant d'intégration correspondant au cycle que nous avons dénoté $C.\mathcal{H}$ dans notre premier exposé. Dans le cas où $\mathcal{S}$ est une sous-variété de $\mathcal{S}$ de dimension $n-p$ intersectant proprement C (l'intersection est donc de dimension 0), alors ce courant correspond à un 0-cycle de $\mathcal{S}$ que nous noterons $C.\mathcal{S}$. Notons que si $\mathcal{S} \cap |C| = \{z\}$, le nombre de Lelong $\nu(C;z)$ coïncide avec $\nu(C.\mathcal{S};z)$ si et seulement si $T_z(\mathcal{S})$ satisfait

$$T_z(\mathcal{S}) \cap \mathcal{C}(|C|, z) = \emptyset \,,$$

où $\mathcal{C}(|C|, z)$ est le *cône tangent** à l'ensemble analytique $|C|$ au point z. Sinon, le nombre de Lelong est inférieur $\nu(C;z)$ au nombre $\nu(C.\mathcal{S};z)$.

Nous avons alors la

Proposition 1. *Soit une suite de p-cycles positifs $(C_k)_k$ qui converge (au sens de la définition 1) vers un cycle C_∞ et un point z du support de C_∞. Soit $\mathcal{Y}$ une sous variété lisse de dimension $n-p$ relativement compacte dans $\mathcal{X}$ telle que*

$$\overline{\mathcal{Y}} \cap |C_\infty| = \{z\} \,. \tag{3.1}$$

Alors, pour k assez grand, $\partial\mathcal{Y} \cap |C_k| = \emptyset$,

$$\#\Big(\overline{\mathcal{Y}} \cap |C_k|\Big) < \infty \tag{3.2}$$

et l'on a

$$\nu(C_\infty.\mathcal{Y}; a) = \sum_{\alpha_k \in |C_k| \cap \mathcal{Y}} \nu(C_k.\mathcal{Y}; \alpha_k) \,. \tag{3.3}$$

Esquisse de preuve. Remarquons que l'hypothèse (3.1) implique nécessairement que pour k assez grand

$$\#\Big(\overline{\mathcal{Y}} \cap |C_k|\Big) < \infty \,.$$

En effet, si $|C_k| \cap \mathcal{Y}$ était de dimension positive, l'intersection $|C_k| \cap \partial\mathcal{Y}$ devrait être non vide (car un sous-ensemble analytique de $\mathcal{X}$ de dimension strictement positive ne saurait rester piégé dans un compact de $\mathcal{X}$); si cela était vrai pour une infinité de valeurs de k, on construirait une suite de points z_k, avec $z_k \in |C_k| \cap \partial\mathcal{Y}$ et l'on pourrait en extraire une sous suite convergent vers un point de $|C_\infty| \cap \mathcal{Y}$ forcément distinct de a, ce qui est contraire à l'hypothèse (3.1). Par conséquent, $|C_k| \cap \mathcal{Y}$ est de dimension 0; le même argument que ci-dessus montre aussi que, pour k suffisamment grand $\partial\mathcal{Y} \cap |C_k| = \emptyset$.

* Le cône tangent en z à un ensemble analytique Z contenant z est par définition le cône tangent relatif de Z et $\{z\}$ au point z, comme il a été défini dans la section 2.6, c'est à dire, la situation étant ramenée à une carte locale autour de z, l'ensemble des vecteurs v de $\mathbf{C}^n$ tels qu'il existe une suite (z_n) de points de Z convergent vers z et une suite de nombres complexes $(\lambda_n)_n$ tels que $\lambda_n(z_n - z) \to v$.

Si l'on se place en coordonnées locales au voisinage de z (ce qui est licite car nous pouvons localiser le problème, vu que, pour k assez grand, tous les points de $\mathcal{Y}\cap|C_k|$ sont arbitrairement voisins de z), on peut, modulo un changement de coordonnées effectué de manière à "redresser" $\mathcal{Y}$, supposer que l'on travaille dans le polydisque $B_p(0,r')\times B_{n-p}(0,r'')$ (les variables seront notées ζ) de centre 0 et de rayon r et que $\mathcal{Y}=\{0\}\times B_{n-p}(0,r'')$; on notera $\zeta':=(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)$, $\zeta'':=(\zeta_{p+1},\ldots,\zeta_n)$. On peut aussi supposer que, pour k assez grand, tous les ensembles $|C_k|\cap V$ sont inclus dans $B_p(0,r')\times B_{n-p}(0,\rho'')$, avec $\rho''<\rho$ et que, si π désigne la projection sur l'espace des p premières coordonnées, que $\pi\big|_{|C_\infty|\cap V}$ réalise un revêtement de $B_p(0,r')$. Tous les raisonnements ultérieurs dans cette section 3 seront basés sur cette présentation des objets. Il s'agit là de la présentation classique des ensembles analytiques (voir par exemple le livre de M. Hervé).

On a alors, pour toute fonction test φ à support compact dans V, identiquement égale à 1 sur un voisinage de $\{0\}\times\overline{B_{n-p}(0,\rho'')}$, pour tout $\epsilon>0$,

$$\begin{aligned}
&< [C_k],\varphi(dd^c\log(\|\zeta'\|^2+\epsilon))^p >=\int_{C_k}\varphi(dd^c\log(\|\zeta'\|^2+\epsilon))^p\\
&\longrightarrow < [C_\infty],\varphi(dd^c\log(\|\zeta'\|^2+\epsilon))^p >=\int_{C_\infty}\varphi(dd^c\log(\|\zeta'\|^2+\epsilon))^p\,.
\end{aligned}$$

Si maintenant ϵ tend vers 0, on peut montrer que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\mapsto 0} < [C_k],\varphi(dd^c\log(\|\zeta'\|^2+\epsilon))^p >=\\
&=\lim_{r\mapsto 0}\frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}(p-1)!}{(2i\pi r)^p}\int_{C_k\cap\{\|\zeta'\|^2=r\}}\varphi\Big(\sum_{l=1}^p(-1)^{l-1}\overline{\zeta'_l}\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^p d\overline{\zeta'_j}\Big)\wedge\bigwedge_{j=1}^p d\zeta'_j\\
&=\lim_{r\mapsto 0}\frac{p!}{(2i\pi r)^p}\int_{C_k\cap\{\|\zeta'\|^2\le r\}}\bigwedge_{j=1}^p(d\overline{\zeta}'_j\wedge d\zeta_j)\\
&=\sum_{\xi_k\in|C_k|\cap\mathcal{Y}}\nu(C_k.\mathcal{Y};\xi_k)
\end{aligned}$$

(les multiplicités lors de l'intégration sur $|C_k|\cap\mathcal{Y}$ étant cette fois prises en compte), tandis que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\mapsto 0} < [C_\infty],\varphi(dd^c\log(\|\zeta'\|^2+\epsilon))^p >=\\
&=\lim_{r\mapsto 0}\frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}(p-1)!}{(2i\pi r)^p}\int_{C_\infty\cap\{\|\zeta'\|^2=r\}}\varphi\Big(\sum_{l=1}^p(-1)^{l-1}\overline{\zeta'_l}\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^p d\overline{\zeta'_j}\Big)\wedge\bigwedge_{j=1}^p d\zeta'_j\\
&=\lim_{r\mapsto 0}\frac{p!}{(2i\pi r)^p}\int_{C_\infty\cap\{\|\zeta'\|^2\le r\}}\bigwedge_{j=1}^p(d\overline{\zeta}'_j\wedge d\zeta_j)\\
&=\nu(C_\infty.\mathcal{Y};z)\,.
\end{aligned}$$

Si l'on fait tendre ensuite k vers l'infini, on admettra que l'intervertion de limite est licite et que

$$\nu(C_\infty.\mathcal{Y};z) = \sum_{\alpha_k \in |C_k| \cap \mathcal{Y}} \nu(C_k.\mathcal{Y};\xi_k)\,. \tag{3.3}$$

Ceci achève la preuve de la proposition. $\diamondsuit$

<u>*3.2. L'approche géométrique.*</u>

Au lieu de l'approche analytique que nous venons de proposer, on pourrait convenir que la suite de p-cycles positifs $(C_k)_k$ converge vers un cycle positif C_∞ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(**a**) *D'une part les supports $|C_k|$ convergent vers $|C_\infty|$ au sens de la définition 2.*

(**b**) *D'autre part, pour tout $z \in |C_\infty|$, pour toute sous variété $\mathcal{Y}$ de dimension $n-p$ relativement compacte et telle que $\overline{\mathcal{Y}} \cap |C_\infty| = \{z\}$, on a*

$$\nu(C_\infty.\mathcal{Y};z) = \sum_{\xi_k \in |C_k| \cap \mathcal{Y}} \nu(C_k.\mathcal{Y};\xi_k)\,.$$

Il se trouve que cette définition de la notion de convergence d'une suite de k-cycles coïncide avec la définition 1 proposée plus haut, comme la proposition 1 le suggère. Nous n'avons ici prouvé l'implication que dans un sens, mais dans l'autre sens, on se doute qu'une condition locale en tout point sur les masses des mesures positives en jeu suffira à impliquer la convergence faible de ces mesures. Les mesures concernées sont les mesures positives associées aux courants d'intégration sur les cycles C_k et sur le cycle C_∞, et l'on se placera toujours dans une situation semi-locale "préparée" comme ci-dessus.

On peut aussi affaiblir les contraintes en remplacant le second point (**b**) par (**bb**):

(**bb**) *Pour tout a <u>régulier</u> z de $|C_\infty|$, pour toute sous variété $\mathcal{Y}$ de dimension $n-p$ relativement compacte et telle que $\overline{\mathcal{Y}} \cap |C_\infty| = \{z\}$, on a*

$$\nu(C_\infty.\mathcal{Y};z) = \sum_{\xi_k \in |C_k| \cap \mathcal{Y}} \nu(C_k.\mathcal{Y};\xi_k)\,.$$

Remarque. On peut même se contenter de supposer que $\mathcal{Y}$ est transverse en z à $|C_\infty|$, ce qui signifie que $T_z\mathcal{Y}$ intersecte proprement $T_z(|C_\infty|)$, auquel cas $\nu(C_\infty.\mathcal{Y};z) = \nu(C_\infty;z)$.

Pour montrer que **(a)** et (**bb**) impliquent (**a**) et (**b**), on choisit un système de coordonnées (ζ',ζ'') dans un voisinage V_z de z, de manière à ce que $V_z = B_p(0,r') \times B_{n-p}(0,r'')$, $\mathcal{Y} = \{\zeta' = 0\} \times B_{n-p}(0,r'')$, $(B_p(0,r') \times \{|z|'' = r''\}) \cap |C_\infty| = \emptyset$, de manière à ce que

$$\pi:\ (B_p(0,r') \times B_{n-p}(0,r'')) \cap |C_\infty| \longrightarrow B_p(0,r')$$

soit un recouvrement en feuillets au dessus de $B_p(0,r')$. On peut même assurer que, pour k assez grand,

$$(B_p(0,r') \times \{|\zeta''| = r''\}) \cap |C_k| = \emptyset\,.$$

Si l'on choisit z_0' tel que $\{z_0'\} \times B_{n-p}(0, r'')$ et $|C_\infty|$ s'intersectent en des points réguliers, $x_1, \ldots, x_q$, on a

$$\nu(C_\infty.\mathcal{Y}; z) = \sum_{j=1}^{q} \nu(C_\infty.\mathcal{Y}; x_j) \tag{3.4}$$

(aucun feuillet n'est autorisé à s'échapper de la boite $B_p(0, r') \times B_{n-p}(0, r'')$ "par le haut ou le bas"). Pour k assez grand, on a de même

$$\sum_{\xi_k \in |C_k| \cap \mathcal{Y}} \nu(C_k.\mathcal{Y}; \xi_k) = \sum_{\tilde{\xi}_k \in |C_k| \cap (\{z_0'\} \times B_{n-p}(0, r''))} \nu(C_k.\mathcal{Y}; \tilde{\xi}_k)\,. \tag{3.5}$$

Lorsque k tend vers l'infini, les points $\tilde{\xi}_k$ s'organisent en paquets autour des points x_j. Le fait que (**bb**) soit valable lorsque z est remplacé par chacun des x_j, plus les identités (3.4) et (3.5), implique bien que (**b**) est satisfaite au point z.

On peut même aller plus loin: en fait les conditions (**a**) et (**bb**) sont équivalentes aux conditions (**a**) et (**bbb**) où:

(**bbb**) *Pour tout z <u>dans une partie dense de l'ensemble des points réguliers</u> de $|C_\infty|$, il existe (au lieu de "pour toute...") une sous-variété $\mathcal{Y}$ de dimension $n-p$ relativement compacte (que l'on peut supposer transverse en z à $|C_\infty|$) et telle que $\overline{\mathcal{Y}} \cap |C_\infty| = \{z\}$ et que*

$$\nu(C_\infty.\mathcal{Y}; z) = \sum_{\xi_k \in |C_k| \cap \mathcal{Y}} \nu(C_k.\mathcal{Y}; \xi_k)\,.$$

On vérifie en effet immédiatement (en redressant la situation comme ci dessus de manière à ce que $V_z = B_p(0, r') \times B_{n-p}(0, r'')$, $|C_\infty| \cap V_z = B_p(0, r') \times \{0\}$, $\mathcal{Y} = \{0\} \times B_{n-p}(0, r'')$) que les deux conditions (**a**) et (**bbb**) impliquent que dans un voisinage de z, on a, pour toute forme test (p, p),

$$< [C_k], \varphi > \longrightarrow < [C_\infty], \varphi >$$

lorsque k tend vers l'infini (il suffit de comparer la somme des "poids" qui pondèrent l'intégration sur les branches de $|C_k|$ et le poids pondérant l'intégration sur $|C_\infty|$ au voisinage de z).

En résumé, nous avons la définition suivante:

Définition 3. *Une suite $(C_k)_k$ de p-cycles positifs converge vers un p-cycle positif C_∞ si et seulement si les conditions* (**a**) *et* (**bbb**) *sont remplies. Cette définition géométrique correspond à la définition analytique formulée en termes de courants (Définition 1).*

<u>*3.3. Quelques propriétés importantes.*</u>

En nous aidant, soit de l'approche analytique, soit de l'approche géométrique de la notion de convergence, nous dégagerons les propriétés suivantes.

Propriété A (convergence et produit). *Soit $\mathcal{S}$ est une sous variété fermée de $\mathcal{X}$ de dimension s intersectant proprement tous les p-cycles positifs d'une suite $(C_k)_k$ convergent vers un cycle C_∞, ainsi que leur limite C_∞. Alors on a, au sens des courants d'intégration*

$$[C_\infty] \wedge [\mathcal{S}] = \lim_{k \mapsto \infty} ([C_k] \wedge [\mathcal{S}]) \,,$$

le courant d'intégration $[\mathcal{S}]$ étant considéré sans multiplicités (la variété est lisse).

Preuve. Elle est immédiate si l'on utilise l'approche analytique. Le fait que les intersections soient propres est essentiel car cette égalité n'a de sens qu'entre courants de type $(2n-p-s, 2n-p-s)$. Il est donc important que les ensembles $C_k \cap \mathcal{S}$, $k \in \mathbf{N}$, ainsi que $C_\infty \cap \mathcal{S}$, soient de dimension pure égale à $2n-p-s$.

La propriété **A**, exprimée en termes de cycles, se lit encore

$$C_k.\mathcal{S} \longrightarrow C_\infty.\mathcal{S} \,. \tag{3.7}$$

Ici le cycle $C_k.\mathcal{S}$ (resp. $C_\infty.\mathcal{S}$) est par définition celui qui correspond au courant positif $[C_k] \wedge [\mathcal{S}]$ (resp. $[C_k] \wedge [\mathcal{S}]$) parfaitement défini puisque $\mathcal{S}$ est une variété lisse.

Il résulte de cette propriété que si $(C_k^{(1)})_k$ et $(C_k^{(2)})_k$ sont respectivement deux suites de p_1-cycles positifs (resp. p_2 cycles positifs) convergent vers les p_1 (resp. p_2) cycles positifs $C_\infty^{(1)}$ (resp. $C_\infty^{(2)}$) et si Δ est la diagonale de $\mathcal{X}$, on a, pourvu que pour chaque $k \in \mathbf{N} \cap \{\infty\}$, l'intersection $|C_k^{(1)}| \cap |C_k^{(2)}|$ soit propre (c'est à dire de dimension pure $p_1 + p_2 - n$), que la suite $(C_k^{(1)} \times C_k^{(2)})_k$ est une suite de $p_1 + p_2$ cycles positifs de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ intersectant proprement la diagonale et convergent naturellement vers le $p_1 + p_2$ cycle $C_\infty^{(1)} \times C_\infty^{(2)}$. Donc, en vertu de la Propriété **A**,

$$(C_k^{(1)} \times C_k^{(2)}).\Delta \longrightarrow (C_\infty^{(1)} \times C_\infty^{(2)}).\Delta \,.$$

En termes de théorie de l'intersection classique, on a dans ce cas

$$C_k^{(1)}.C_k^{(2)} \longrightarrow C_\infty^{(1)}.C_\infty^{(2)} \,. \tag{3.8}$$

Propriété B (convergence et scindage). *Soit $(C_k)_k$ une suite de p-cycles positifs convergent vers un p-cycle C_∞, $\mathcal{S}$ une sous-variété fermée de $\mathcal{X}$ de dimension s et z un point de $\mathcal{S}$ tel que*

$$\nu(C_\infty^{\mathcal{S}}; z) \leq \nu(C_k^{\mathcal{S}}; z), \;\; k \in \mathbf{N} \,. \tag{3.9}$$

Alors, il existe un voisinage V de z tel que

$$C_k^{\mathcal{S}} \cap V \longrightarrow C_\infty^{\mathcal{S}} \cap V \tag{3.10}$$

et

$$(C_k - C_k^{\mathcal{S}}) \cap V \longrightarrow (C_\infty - C_\infty^{\mathcal{S}}) \cap V \tag{3.11}$$

lorsque k tend vers $+\infty$.

Preuve. Bien sûr, seul le cas $s \geq p$ est intéressant à étudier (autrement il n'y a rien à faire). On fera donc cette hypothèse. On note $X_k = C_k^{\mathcal{S}}$, $Y_k = C_k - C_k^{\mathcal{S}}$ pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. On redresse la situation de manière à ce que, si V est un voisinage de z, on ait $z = 0$,

$$\mathcal{X} \cap V = B_p(0, r') \times B_{s-p}(0, r'') \times B_{n-s}(0, r''') ,$$

(les coordonnées locales sont $\zeta = (\zeta', \zeta'', \zeta''')$), que $\mathcal{S}$ soit telle que

$$\mathcal{S} \cap V = B_p(0, r') \times B_{s-p}(0, r'') \times \{0\}$$

et que, si π désigne la projection sur l'espace des p premières coordonnées, les paires $(\pi_{\big| |C_k|}, B_p(0, r'))$, $k \in \mathbf{N}$, et $(\pi_{\big| |C_\infty|}, B_p(0, r'))$ soient des revêtements de $B_p(0, r')$. On suppose aussi que $\{\zeta'' = \zeta''' = 0\}$ est tranverse à $|C_\infty|$ en 0. On note G le sous ensemble dense de $B_p(0, r')$ constitué des points dont les antécédents par chacun des revêtements $\pi_{\big| |C_k|}$, $k \in \mathbf{N}$ (resp. $\pi_{\big| |C_\infty|}$) sont des points réguliers de $|C_k|$ (resp. de $|C_\infty|$). Il est suffisant de prouver la convergence des cycles (3.10) et (3.11) aux points de G. On notera π' la projection de $\mathcal{X}$ sur l'espace des $n - p$ autres coordonnées.

Soit x un tel point de G; on suppose que les points du revêtement $(\pi_{\big| |C_\infty|}, B_p(0, r'))$ au dessus de x ont pour images par la projection π' les points $x_1, \ldots, x_q$ de $B_{s-p}(0, r'') \times B_{n-s}(0, r''')$. Trions ces points en deux familles: ceux ($j \in J$) tels que $(x, y_j) \in \mathcal{S}$ et ceux ($j \notin J$) tels que $(x, y_j) \notin \mathcal{S}$.

Choisissons ϵ assez petit pour que les boules fermées (dans $\mathcal{X}$) $\overline{B(y_j, \epsilon)}$ de centres les x_j et de rayon ϵ soit disjointes et que, pour $j \notin J$, les ensembles $\{x\} \times \overline{B(y_j, \epsilon)}$ n'intersectent pas $\mathcal{S}$ (on peut trouver un tel ϵ car $\mathcal{S}$ est fermé). Pour k assez grand, on a

$$\pi' \Big[|C_k| \cap \big(\{x\} \times B_{s-p}(0, r'') \times B_{n-s}(0, r''') \big) \Big] \subset \bigcup_{j=1}^{q} \overline{B(x_j, \epsilon)}$$

(c'est une conséquence de la convergence des supports).

La convergence des cycles C_k vers C_∞ implique en outre que pour k assez grand, on a pour tout $j = 1, \ldots, q$,

$$\deg \big((\{x\} \times B(y_j, \epsilon)).C_k \big) = \deg \big((\{x\} \times B(y_j, \epsilon)).C_\infty \big)$$

(il s'agit d'une égalité entre degrés de cycles compacts de dimension zéro, donc finis)*. Si maintenant on particularise $j \notin J$, on en déduit, puisque les ensembles $\{x\} \times \overline{B(y_j, \epsilon)}$ correspondants n'intersectent pas $\mathcal{S}$, que

$$\deg \big((\{x\} \times B(y_j, \epsilon)).Y_k \big) = \deg \big((\{x\} \times B(y_j, \epsilon)).Y_\infty \big) \tag{3.12}$$

* Le degré d'un cycle fini $\sum_j \alpha_j \{a_j\}$ est par définition la somme des α_j.

pour k assez grand. On a donc

$$(\{x\} \times \mathbf{C}^{n-p}).Y_k \longrightarrow (\{x\} \times \mathbf{C}^{n-p}).Y_\infty$$

lorsque k tend vers l'infini. Mais le fait que l'on ait aussi $\mathrm{Ls}[(Y_k)_k] \subset |C_\infty|$ suffit à impliquer, puisque la projection π restreinte à chaque Y_k ainsi qu'à C_∞ est propre et que G est dense, que $|Y_k|$ converge vers Y_∞ (on montre que toute sous-suite converge vers $\mathrm{Ls}[(Y_k)_k]$ et que $\mathrm{Ls}[(Y_k)_k] = |Y_\infty|$ à cause de la condition (3.12)).

Pour l'autre limite, il faut prendre garde au fait que tous nos raisonnements ci dessus étaient basés sur des manipulations portant sur des cycles positifs. Nous ne sommes donc pas autorisés à affirmer que les règles de convergence respectent l'opération de *différence* entre cycles positifs. Il faut refaire une preuve pour étudier la suite des X_k. Comme

$$\nu(X_\infty; 0) \leq \nu(X_k; 0), \ \ k \in \mathbf{N}$$

et que $\{\zeta'' = \zeta''' = 0\}$ est transverse à $|C_\infty|$ en 0, on a

$$\begin{aligned} \nu(X_\infty; 0) &= \sum_{j \in J} \deg\big((\{x\} \times B(y_j, \epsilon)).X_\infty\big) \\ &\leq \sum_{j \in J} \deg\big((\{x\} \times B(y_j, \epsilon)).X_k\big)\,. \end{aligned}$$

D'autre part, pour k cette fois assez grand

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \deg\big((\{x\} \times B(y_j, \epsilon)).X_\infty\big) &= \sum_{j \in J} \deg\big((\{x\} \times B(y_j, \epsilon)).C_\infty\big) \\ &= \sum_{j \in J} \deg\big((\{x\} \times B(y_j, \epsilon)).C_k\big)\,. \end{aligned}$$

On a donc l'inégalité (valable pour k assez grand)

$$\sum_{j \in J} \deg\big((\{x\} \times B(y_j, \epsilon)).C_k\big) \leq \sum_{j \in J} \deg\big((\{x\} \times B(y_j, \epsilon)).X_k\big)\,.$$

Ceci implique

$$|Y_k| \cap \big(\{x\} \times \bigcup_{j \in J} B(y_j, \epsilon)\big) = \emptyset$$

et donc, pour tout k assez grand

$$\deg\big((\{x\} \times B(y_j, \epsilon)).X_k\big) = \deg((\{x\} \times B(y_j, \epsilon)).X_\infty\big)\,.$$

On conclut alors comme précédemment. $\diamondsuit$

4. Étude de la fonction multi-indice de contact.

Nous allons démontrer la proposition suivante, qui impliquera immédiatement le théorème 1 du premier exposé.

Proposition 2. *Soit Z un sous-ensemble analytique de dimension pure égale à p de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{S}$ une sous variété fermée de dimension s de $\mathcal{X}$. Étant donné un point z de $\mathcal{S}$, il existe un voisinage W_z de ce point dans $\mathcal{S}$ tel que, pour tout $x \in W_z$, on puisse trouver un système $(U, \mathcal{H})$, avec $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{n-s})$ obéissant aux trois contraintes de la section (2.2) relatives aux données $(x, \mathcal{S}, Z)$, tel que*

$$W_z = U \cap \mathcal{S}$$

et

$$\tilde{\nu}(Z, \mathcal{S}; x) = \tilde{\nu}_{U,\mathcal{H}}(Z, \mathcal{S}; x)$$

(le minimum dans (2.5) est bien atteint).

La clause essentielle ici est que pour tout x dans W_z, la trace de U sur $\mathcal{S}$ ne change pas et reste égale à $U \cap \mathcal{S}$. Il résulte de cette proposition que la fonction

$$z \in \mathcal{S} \mapsto \tilde{\nu}(Z, \mathcal{S}; z)$$

s'écrit dans W_z

$$\tilde{\nu}(Z, \mathcal{S}; z) = \min_{\text{lex}} \{\tilde{\nu}_{U,\mathcal{H}}(Z, \mathcal{S}; z)\,, U \cap \mathcal{S} = W_z,\ (U, \mathcal{H}) \text{ se pliant aux trois contraintes}\}\,.$$

Cette fonction est donc semi-continue supérieurement dans W_z (pour la topologie de Zariski sur $\mathcal{S}$ et l'ordre lexicographique sur $\mathbf{N}^{s+1}$) comme minimum (au sens précisément de l'ordre lexicographique) d'une famille de fonctions semi continues supérieurement. La fonction

$$z \in \mathcal{S} \mapsto \tilde{\nu}(Z, \mathcal{S}; z)$$

est donc semi-continue supérieurement dans $\mathcal{S}$ (pour la topologie de Zariski sur $\mathcal{S}$ et l'ordre lexicographique sur $\mathbf{N}^{s+1}$). Cette fonction est donc analytiquement constructible et le théorème 1 est démontré (seules les notations ont changé: on avait énoncé ce théorème initialement avec une variété $\mathcal{Y}$ dont le prototype sera $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$).

Preuve de la proposition 2. On ramène comme d'habitude la situation au cas où $z = 0$, $W_z = B_s(0, r') \times B_{n-s}(0, r'')$ et $\mathcal{S} \cap W_z = B_s(0, r') \times \{0\}$.

Prenons $x \in W_z$. Il existe une boule $B_x = B(x, r_x)$ de centre x et de rayon r_x, incluse dans le polydisque W_z, ainsi que des hypersurfaces $H_{x,1}, \dots H_{x,n-s}$ de $B(x, r_x)$ telles que le système (B_x, H_x) obéisse aux trois contraintes et que

$$\tilde{\nu}(Z, \mathcal{S}; x) = \tilde{\nu}_{B_x, H_x}(Z, \mathcal{S}; x)\,.$$

Nous commencons par démontrer que nous pouvons prolonger ces hypersurfaces, au sens suivant: il existe $\rho_x < r_x$, il existe une suite d'ouverts $(U_k)_k$ de $\mathbf{C}^n$ contenant $\mathcal{S} \cup B(x, \rho_x)$ et pour chacun d'eux, une collection $(\mathcal{H}^{(k)}_{x,1}, \dots, \mathcal{H}^{(k)}_{x,n-s}) = \mathcal{H}^{(k)}_x$ d'hypersurfaces de U_i

telles que les paires $(U_k, \mathcal{H}_x^{(k)})$ obéissent aux trois contraintes (relativement aux données $(x, \mathcal{S}, Z)$) et que

$$\mathcal{H}_{x,j}^{(k)} \cap B(x, \rho_x) \longrightarrow H_{x,j} \cap B(x, \rho_x)\,. \tag{3.13}$$

lorsque k tend vers l'infini.

La réalisation de systèmes $(U_k, \widetilde{\mathcal{H}}_x^{(k)})$ réalisant les deux premières contraintes ne pose pas de difficultés: il s'agit uniquement d'approximer les hypersurfaces $H_{x,j}$, $j = 1, \ldots, n-s$, dans $B(x, \rho_x)$ (avec $\rho_x < r_x$ convenable) par des hypersurfaces définies dans un ouvert contenant $\mathcal{S}$. On voit bien que ceci ne pose pas de problèmes majeurs. C'est un lemme technique qui fait le travail (lemme 5.1 dans l'article de Tworzewski). L'idée consiste à introduire des équations

$$\{h_{x,j}(\zeta', \zeta'') = 0\}\,, j = 1, \ldots, n-s$$

pour les hypersurfaces $H_{x,j}$ au voisinage de $x = (x', 0)$. On écrit ensuite

$$h_{x,j}(\zeta', \zeta'') = \sum_{l=1}^{n-s} \zeta_l'' h_{x,j,l}(\zeta', \zeta''),\ \zeta = (\zeta', \zeta'') \in B(x, r_x)\,.$$

Par hypothèses, on a

$$\det[h_{x,j,l}(\zeta', 0)]_{j,l} \neq 0,\ (\zeta', 0) \in B(x, r_x)\,.$$

et l'on peut aussi supposer, quitte à restreindre r_x, que

$$\det[h_{x,j,l}(\zeta)]_{j,l} \neq 0,\ \zeta \in B(x, r_x)\,.$$

On approche ensuite les $h_{x,j,l}$ uniformément sur $B(x, \rho_x)$ (si $\rho_x < r_x/2$ est assez petit) par des fonctions holomorphes dans W_z, les $h_{x,j,l}^{(k)}$, $k \in \mathbf{N}$, de manière à ce que les conditions suivantes soient réalisées:

$$\det[\frac{\partial \tilde{h}_{x,j}^{(k)}}{\partial \zeta_l''}(\zeta)]_{j,l} \neq 0\,, \zeta \in B(x, \rho_x)\,,$$

et

$$\det[h_{x,j,l}^{(k)}(\zeta', 0)] \neq 0,\ \|\zeta'\| < \rho_x\,,$$

où

$$\tilde{h}_{x,j}^{(k)}(\zeta) := \sum_{l=1}^{n-s} \zeta_l'' h_{x,j,l}^{(k)}(\zeta)\,.$$

Ensuite, il suffit de définir les $\widetilde{\mathcal{H}}_x^k$ par les équations

$$\tilde{h}_{x,j}^{(k)}(\zeta) = 0$$

et les ouverts U_k comme les complémentaires dans W_z des hypersurfaces

$$\det[\frac{\partial \tilde{h}_{x,j}^{(k)}}{\partial \zeta_l''}]_{j,l} = 0\,.$$

Une fois cela fait, la réalisation de la troisième contrainte est elle un tout petit peu plus coûteuse. On approche chaque système d'hypersurfaces $\widetilde{\mathcal{H}}_x^{(k)}$ préalablement fabriqué dans un ouvert du type $B_s(0,r') \times B_{n-s}(0,\eta_k)$ en le perturbant avec une transformation linéaire générique du type

$$\mathrm{Id}_{B_s(0,r')} \otimes L_k\,,$$

où L_k est une isométrie de l'espace $\mathbf{C}^{n-s}$. Cela nous fournit le système $(U_k, \mathcal{H}_x^{(k)})$ obéissant aux trois contraintes et réalisant (3.13).

Pour prouver la proposition, il suffit de montrer que pour k assez grand, on a

$$\tilde{\nu}_{B_x,H_x}(Z,\mathcal{S};x) = \tilde{\nu}_{U_k,\mathcal{H}_x^{(k)}}(Z,\mathcal{S};x)\,. \tag{3.14}$$

Il suffit pour cela de suivre à la trace l'algorithme de la section 2.2 qui conduit au calcul du $s{+}1$-uplet de nombres $\tilde{\nu}_{B_x,H_x}(Z,\mathcal{S};x)$ en utilisant les deux propriétés **A** et **B** du paragraphe 3.3, qui précisément nous assurent que le passage à la limite dans les suites de cycles se comportent bien relativement aux deux opérations entrant en jeu dans l'algorithme développé dans la section 2.2, à savoir le produit *cycles- sous variétés fermées* (en fait seulement ici pour ce qui nous intéresse *cycles-hypersurfaces lisses*) et le scindage. On conclut ainsi à ce que (3.14) est vraie pour k assez grand, d'où la conclusion de la proposition, et finalement, la fin de la preuve du théorème 1. $\diamondsuit$

Exposé 3
Séparation à l'infini
d'après E. Cygan, T. Krasiński, P. Tworzewski

5. Séparation régulière.

On considère un $\mathbf{C}$-espace vectoriel normé $\mathcal{E}$ et deux sous ensembles fermés X et Y de $\mathcal{E}$ d'un ouvert U de $\mathcal{E}$.

Définition 4. *Étant donné $p \in [0, \infty[$, on dit que X et Y sont p-régulièrement séparés au point $a \in X \cap Y$ s'il existe $c > 0$ et $r > 0$ tels que*

$$\|z - a\| < r \Longrightarrow d(z, X) + d(z, Y) \geq c\, d(z, X \cap Y)^p \,, \tag{5.1}$$

où d est la distance sur $\mathcal{E}$.

Tout biholomorphisme local au voisinage de a (laissant a inchangé) respecte cette propriété de p-régulière séparation, et l'on peut donc transposer cette notion au cadre des variétés analytiques complexes.

Soit $\mathcal{X}$ une telle variété (de dimension n), a un point de $\mathcal{X}$, X et Y deux fermés d'un ouvert U de $\mathcal{X}$ contenant a et

$$\varphi : \ B_n(0, \rho) \mapsto \mathcal{X}$$

une carte locale au voisinage de a (telle que l'image de φ soit incluse dans U et que $\varphi(0) = a$). Si $p \geq 0$, les ensembles X et Y sont dits *p-régulièrement séparés* en a si et seulement si $\varphi^{-1}(X \cap \varphi(B_n(0, \rho)))$ et $\varphi^{-1}(Y \cap \varphi(B_n(0, \rho))$ sont p- régulièrement séparés en 0 (comme fermés de $B_n(0, \rho)$).

Revenons maintenant au cadre des $\mathbf{C}$-espaces normés.

Définition 5. *Soient X et Y deux fermés non vides d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel normé $\mathcal{E}$ de dimension finie n et $q \in]-\infty, 1]$. On dit que X et Y sont q-séparés à l'infini si et seulement si il existe $R > 0$ et $c > 0$ tels que*

$$\|z\| > R \Longrightarrow d(z, X) + d(z, Y) \geq c\|z\|^q \,, \tag{5.2}$$

Les isomorphismes linéaires de $\mathcal{E}$ respectent cette propriété.

Lemme 1. *Deux sous ensembles fermés de $\mathcal{E}$, X et Y, sont q-séparés à l'infini si et seulement si il existe $c > 0$, $R > 0$, tels que, pour tout x de X tel que $\|x\| > R$, on a*

$$d(x, Y) \geq c\|x\|^q \,. \tag{5.3}$$

Preuve. L'implication directe est immédiate. Supposons donc (5.3) remplie mais que (5.2) soit en défaut. On trouve donc une suite de points, $(z_n)_n$, telle que $\|z_n\| \longrightarrow +\infty$ et que

$$d(z_n, X) + d(z_n, Y) < \frac{\|z_n\|^q}{n}$$

pour tout $n \geq 1$. Soit $x_n \in X$ tel que $d(z_n, X) = \|x_n - z_n\|$ et $y_n \in Y$ tel que $d(z_n, Y) = \|y_n - z_n\|$. Comme $q \leq 1$, on a, pour n assez grand,

$$\|z_n - x_n\| + \|z_n - y_n\| < \frac{\|z_n\|^q}{n} \leq \frac{\|z_n\|}{n} \tag{5.4}$$

pour n assez grand. On a donc

$$\frac{\|z_n - x_n\|}{\|z_n\|} \longrightarrow 0$$

d'où

$$\frac{\|x_n\|}{\|z_n\|} \mapsto 1 \tag{5.5}$$

lorsque n tend vers l'infini (en particulier $\|x_n\|$ tend vers $+\infty$). Mais on a aussi, avec (5.4) et l'inégalité triangulaire

$$\|x_n - y_n\| < \frac{\|z_n\|^q}{n}$$

pour $n \geq 1$. Si (5.3) est remplie, on a, pour n assez grand

$$c\|x_n\|^q \leq d(x_n, Y) \leq \|x_n - y_n\| < \frac{\|z_n\|^q}{n}$$

et donc

$$c\Big(\frac{\|x_n\|}{\|z_n\|}\Big)^q < \frac{1}{n}$$

pour n assez grand. Ceci est en contradiction avec (5.5). D'où la conclusion. $\diamondsuit$

Dire que X et Y sont q-séparés à l'infini équivaut à dire que $X \times Y$ est q-séparé à l'infini de la diagonale Δ de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ (on peut par exemple travailler avec comme norme sur cet espace la norme $|||(x, y)||| = \|x\| + \|y\|$).

6. Projectivisation de la situation.

On peut maintenant *projectiviser* la situation et considérer l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathbf{C} \times \mathcal{E})$ que l'on équipe naturellement d'une distance. Rappelons que cet espace est obtenu comme le quotient de l'espace métrique $(\mathbf{C} \times \mathcal{E})^*$ par la relation d'équivalence, dite de *colinéarité*:

$$(\lambda, x)\mathcal{R}(\mu, y) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbf{C}^*,\ (\lambda, x) = t(\mu, y)\,.$$

On notera habituellement $[\lambda : x]$ la classe de $(\lambda, x) \in (\mathbf{C} \times \mathcal{E})^*$. La norme $\|\cdot\|$ dans $\mathcal{E}$ induit une norme sur $\mathbf{C} \times \mathcal{E}$, à savoir la norme

$$\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + \|x\|\,,$$

ainsi qu'une distance dans $\mathbf{P}(\mathbf{C} \times \mathcal{E})$, à savoir

$$\tilde{d}([\lambda : x], [\mu : y]) := \frac{\|(\lambda, x) \wedge (\mu, y)\|}{\|(\lambda, x)\|\,\|(\mu, y)\|}\,. \tag{6.1}$$

Cette distance induit une topologie d'espace métrique, qui est d'ailleurs la topologie quotient de la topologie d'espace métrique dont héritait l'ouvert $(\mathbf{C}\times\mathcal{E})^*$ de $\mathbf{C}\times\mathcal{E}$. On peut donc parler de séparation en un point de deux fermés.

Un fermé particulièrement intéressant est *l'hyperplan à l'infini*, donné par

$$H_\infty = \pi(\{0\}\times\mathcal{E})\,,$$

où π est la projection canonique de passage au quotient pour la relation de colinéarité.

La proposition suivante est élémentaire, mais importante.

Proposition 3. *Soit Z un sous ensemble fermé du $\mathbf{C}$-espace normé $\mathcal{E}$ (toujours de dimension finie) et L un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$. On note $\overline{Z}$ et $\overline{L}$ les adhérences des ensembles $\pi(\{1\}\times Z)$ et $\pi(\{1\}\times L)$ dans $\mathbf{P}(\mathbf{C}\times\mathcal{E})$. Supposons que $Z\cap L$ soit borné et qu'il existe $p\geq 0$ tel que $\overline{Z}$ et $\overline{L}$ soient p-régulièrement séparés dans la variété analytique complexe $\mathbf{P}(\mathbf{C}\times\mathcal{E})$ en tout point z de $(\overline{Z}\cap\overline{L})\cap H_\infty$ (tout point à l'infini de $Z\cap L$). Alors Z et L sont $(1-p)$-séparés à l'infini.*

Preuve. On suppose $\mathcal{E}=\mathbf{C}^n$, $L=\{0\}\times\mathbf{C}^k$. Comme le problème se situe à l'infini et non à distance finie et que $Z\cap L$ est supposé borné, on peut se restreindre au cas où $Z\cap L=\emptyset$. On veut démontrer que, sous nos hypothèses, il existe $c>0$, $R>0$, tels que

$$\|z\|\geq R \Longrightarrow d(z,L)\geq c\|z\|^{1-p}\,. \tag{6.2}$$

Si a est un point de $(\overline{Z}\cap H_\infty)\setminus\overline{L}$, il existe un voisinage $\widetilde{U}(a)$ de a dans $\mathbf{P}(\mathbf{C}\times\mathcal{E})$ qui ne rencontre pas $\overline{L}$. Donc, pour tout z dans $\mathcal{E}$ tel que $[1:z]$ soit dans ce voisinage, on a $\tilde{d}([1:z],\overline{L})\geq c(a)>0$, ce qui donne donc, en réinterprétant cette information en affine, que si z est dans Z et est tel que $[1:z]$ est dans ce voisinage, avec $\|z\|\geq 1$, alors

$$d(z,L)\geq c(a)\|z\|\geq c(a)\|z\|^q\,.$$

Si maintenant $a=[0:1:a_2:\cdots:a_n]$ est un point de $\overline{Z}\cap\overline{L}\cap H_\infty$, nous pouvons utiliser les coordonnées homogènes $(z_0,\ldots,z_n)$ et la carte locale

$$\varphi:\ \{[z_0:\cdots:z_n],\ z_1\neq 0\}\mapsto\mathbf{C}^n,\ [z_0:\cdots z_n]\mapsto(\frac{z_0}{z_1},\frac{z_2}{z_1},\ldots,\frac{z_n}{z_1})=(t_1,t_2,\ldots,t_n)\,.$$

Prenons un voisinage $U(a)$ de a dans lequel on puisse exprimer de manière quantitative la régulière séparation de $\overline{Z}$ et de $\overline{L}$, soit

$$\tilde{d}(\tilde{z},\overline{Z})+\tilde{d}(\tilde{z},\overline{L})\geq c(a)\,\tilde{d}(z,\overline{Z}\cap\overline{L}),\ \tilde{z}\in U(a)\,.$$

On a alors, pour tout $\tilde{z}$ dans $\overline{Z}\cap U(a)$,

$$\tilde{d}(\tilde{z},\overline{L})\geq c(a)\,\tilde{d}(z,\overline{Z}\cap\overline{L})\,.$$

Mais en revenant à nos coordonnées locales $(t_1, \ldots, t_n)$, nous voyons, puisque $\overline{Z} \cap \overline{L} \subset H_\infty$ (Z et L ne se coupant pas dans $\mathcal{E}$), que l'on a, dans $U(a)$ (ramené aux coordonnées homogènes via la carte locale ci dessus),

$$\frac{|z_{k+1}|}{|z_1|} + \cdots + \frac{|z_n|}{|z_1|} \geq c(a)\Big(\frac{|z_0|}{|z_1|}\Big)^p .$$

Cela nous dit que si z est dans Z et $[1 : z]$ dans $U(a)$, alors

$$\|z\|^{p-1}(|z_{k+1}| + \cdots + |z_n|) \geq c(a)\,,$$

soit

$$d(z, L) \geq c(a)\|z\|^{1-p} .$$

Il ne reste plus qu'à recouvrir $\overline{Z} \cap H_\infty$ par un nombre fini de voisinages du type $U(a)$ (ce qui est possible par compacité) et à prendre pour c le minimum des $c(a)$. L'inégalité (6.2) voulue est alors remplie (lorsque $z \in Z$) pourvu que $[1 : z]$ soit assez près de $\overline{Z} \cap H_\infty$, soit pour $\|z\|$ assez grand. $\diamondsuit$

7. Séparation régulière et indice de contact.

Nous admettrons ici pour l'instant le résultat suivant, dû à Ewa Cygan *.

Theorème 2. *Soit $\mathcal{X}$ une variété analytique complexe de dimension n, Z un sous-ensemble analytique de dimension k, $\mathcal{S}$ une sous-variété fermée de dimension s et z un point de $Z \cap \mathcal{S}$. Alors Z et $\mathcal{S}$ sont p-régulièrement séparés au point z pour $p = \nu(Z, \mathcal{S}; z)$.*

Remarque. Il ne s'agit pas d'une estimation du plus petit p positif possible. L'exposant de régulière séparation optimum peut, lui, être plus petit que cet indice de contact $\nu(Z, \mathcal{S}; z)$. Par exemple, si $\mathcal{X} = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et $\mathcal{S}$ est l'hyperplan à l'infini, une estimation plus fine de l'exposant de séparation régulière exige une étude plus approfondie de l'éclatement normalisé de $\mathbf{P}^n$ le long de Z au voisinage de z. Pour ces notions, nous renvoyons par exemple à la conclusion du papier de J. Kollár * ainsi qu'au mémoire très riche de M. Lejeune et B. Teissier *.

Ce théorème de E. Cygan peut se lire en termes de faisceaux d'idéaux sur la variété $\mathcal{X}$. Pour l'illustrer, nous nous limiterons au cas de $\mathcal{X} = \mathbf{A}^n$. Considérons m idéaux de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_m]$, tous "unmixed" (c'est à dire tels que les composantes primaires de chacun aient toutes la même dimension). À chacun de ces idéaux, on peut associer un cycle C_j de dimension pure de $\mathbf{A}^n$. Si

$$C_j = \sum \alpha_{jk} C_{jk},\ j = 1, \ldots, m,$$

---

* E. Cygan, Intersection Theory and Separation Exponent in Complex Analytic Geometry, Preprint IMUJ, Krakow, 1996/17.

* J. Kollár, Sharp effective Nullstellensatz, J.A.M.S. 1(1988), 963-975.

* M. Lejeune et B. Teissier, Clôture intégrale des idéaux et équisingularité, Publications de l'Institut Fourier, 1975.

on définit le degré arithmétique de I comme le degré du cycle C_j. Dans ce cas, le résultat de E. Cygan (appliqué de manière répétitive) nous montre que localement, au voisinage de tout point de $|C_1| \cap \cdots \cap |C_m|$, nous avons l'inégalité de régulière séparation

$$d(x, |C_1|) + \cdots + d(x, |C_m|) \geq c d(x, |C_1| \cap \cdots \cap |C_m|)^{\deg(C_1 \bullet \cdots \bullet C_m)} .$$

Si les P_{j,l_j} sont des générateurs de l'idéal I_j, on en déduit donc l'inégalité de Lojasiewicz

$$\max_j \max_{l_j} |P_{j,l_j}(x)| \geq c d(x, V(I_1) \cap \cdots V(I_m))^{\deg I_1 \cdots \deg I_m}$$

(on majore le degré du cycle intersection par le produit des degrés, ce qui est licite comme on l'a vu avec la remarque 3 de l'exposé 1); ici $V(I_k)$, $k = 1, \ldots, m$, désigne la variété des zéros de l'idéal I_k. Nous reviendrons sur ce théorème dans le dernier exposé.

Admettons pour l'instant ce résultat et donnons en l'application importante suivante:

Corollaire 2.1. *Soient X et Y deux sous ensembles algébriques non vides (et de dimension pure) de l'espace affine $\mathbf{A}^n$, tels que $\dim(X \cap Y) = 0$. Alors, X et Y sont q-séparés à l'infini pour*

$$q = 1 - \deg X \, \deg Y + \deg(X \bullet Y) .$$

Preuve. Il suffit de montrer que $X \times Y$ et Δ (où Δ désigne la diagonale de $\mathbf{A}_n$) sont q séparés à l'infini pour cette valeur de q dans $\mathbf{A}^{2n}$. Comme $X \cap Y$ est de dimension 0, l'ensemble $(X \times Y) \cap \Delta$ est fini, donc borné dans $\mathbf{A}^{2n}$. On peut appliquer la proposition 3. Si $\overline{Z}$ et $\overline{\Delta}$ sont les adhérences respectives de $Z = X \times Y$ et de Δ dans $\mathbf{P}^{2n}$, il suffit de démontrer que, pour tout point a de $(\overline{Z} \cap \overline{\Delta}) \cap H_\infty$ (H_∞ est l'hyperplan à l'infini dans $\mathbf{P}^{2n}$), les ensembles $\overline{\Delta}$ et $\overline{Z}$ sont p-régulièrement séparés en a, pour

$$p = \deg X \, \deg Y - \deg(X \bullet Y) .$$

Or le degré de $\overline{Z}$ est

$$\deg \overline{Z} = \deg X \, \deg Y .$$

Si l'on utilise l'algorithme conduisant au calcul de l'indice de contact entre $\overline{Z}$ et $\overline{\Delta}$ au point a, on voit, en utilisant le théorème de Bézout, que, pour tout système $(U, \mathcal{H})$ compatible aux données a, $\overline{Z}$, $\overline{\Delta}$, on a

$$\deg(\overline{Z}.\mathcal{H}) \leq \deg \overline{Z} .$$

On en déduit donc, puisque $\overline{Z} \cap \Delta$ est un ensemble de dimension 0, donc fini, que

$$\nu(\overline{Z}, \overline{\Delta}; z) + \deg(X \bullet Y) \leq \deg \overline{Z} = \deg X \, \deg Y .$$

En effet, on peut choisir les hypersurfaces d'approche de manière à ce qu'elles obéissent aux contraintes relativement aux données $\alpha, \overline{Z}, \overline{\Delta}$, où α est un point quelconque (il n'y en a qu'un nombre fini) de $Z \cap \Delta$.

On conclut alors en utilisant le théorème 2. $\diamondsuit$

8. Application à la minoration de l'exposant de Lojasiewicz à l'infini.

On considère ici une application polynomiale F de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^m$ telle que $F^{-1}(0)$ soit un sous-ensemble algébrique de dimension 0 (donc un ensemble fini).

On considère dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ les deux sous-ensembles algébriques

$$\Gamma(F) := \{(x, F(x)),\ x \in \mathbf{C}^n\}$$

(le *graphe* de F) et

$$L := \mathbf{C}^n \times \{0\}\,.$$

Le cycle effectif $\Gamma(F) \bullet L$ (dans l'espace affine $\mathbf{A}^{n+m}$) est donc un 0-cycle qui s'écrit

$$\Gamma(F) \bullet L = \sum_{\alpha \in F^{-1}(0)} \mu_\alpha(F)\{\alpha\}\,,$$

où, pour chaque $\alpha \in F^{-1}(0)$, le nombre $\mu_\alpha(F)$ est appelée *multiplicité* de F au point α. On a

$$\deg(\Gamma(F) \bullet L) = \sum_{\alpha \in F^{-1}(0)} \mu_\alpha(F)\,.$$

On appelle enfin *exposant de Lojasiewicz à l'infini* de l'application F le nombre

$$\mathcal{L}_\infty(F) := \sup\{\rho \in \mathbf{R};\ \exists c, R > 0,\ \|z\| \geq R \Longrightarrow \|F(z)\| \geq c\|z\|^\rho\}\,.$$

On a alors le*

Théorème 3. *Sous les hypothèses ci-dessus, et si de plus* $\deg F_1 = d_1 \geq \cdots \geq \deg F_m = d_m$, *on a*

$$\mathcal{L}_\infty(F) \geq d_m - \prod_{j=1}^m d_j + \sum_{\alpha \in F^{-1}(0)} \mu_\alpha(F)\,.$$

Preuve. On sait d'après le corollaire 2.1 que $\Gamma(F)$ et L sont q-séparés à l'infini avec

$$q = 1 - \deg(\Gamma(F)) + \sum_{\alpha \in F^{-1}(0)} \mu_\alpha(F)\,,$$

(puisque $\deg L = 1$) d'où l'on déduit

$$\mathcal{L}_\infty(F) \geq 1 - \deg(\Gamma(F)) + \sum_{\alpha \in F^{-1}(0)} \mu_\alpha(F)\,, \tag{8.1}$$

* E. Cygan, T. Krasiński, P. Tworzewski, Separation at infinity and the Lojasiewicz exponent of polynomial mappings, IMUJ preprint, Krakow, 1997/22.

ce qui est une première minoration. Pour avoir la minoration du théorème, on travaille un peu plus. On introduit une forme linéaire l de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}$, telle que

$$F^{-1}(0) \cap \operatorname{Ker} l = \emptyset$$

et l'on considère le sous-ensemble algébrique X_l de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ défini (en les coordonnées (x, y)) par

$$F_j(x) = l^{d_m - 1}(x) y_j \,, \ j = 1, \ldots, m \,.$$

Il s'agit d'un sous-ensemble algébrique de dimension n (en fait le graphe de $G = F/l^{d_m-1}$) et de degré (par le théorème de Bézout) au plus

$$\deg X_l \leq d_1 \cdots d_m \,.$$

D'autre part F et G ont les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités. Les ensembles X_l et L sont q'-séparés à l'infini, avec

$$q' = 1 - d_1 \cdots d_m + \sum_{\alpha \in G^{-1}(0)} \mu_\alpha(G) = 1 - d_1 \cdots d_m + \sum_{\alpha \in F^{-1}(0)} \mu_\alpha(F) \,.$$

On a donc

$$\|F(x)\| \geq A_l |l(x)|^{d_m - 1} \|x\|^{q'} \tag{8.2}$$

pour $\|x\|$ assez grand. On choisit ensuite n formes linéaires indépendantes $l_1, \ldots, l_n$ telles que

$$F^{-1}(0) \cap \operatorname{Ker} l_i = \emptyset, \ i = 1, \ldots, n,$$

et l'on fait ce travail pour chaque l_i. En additionnant les inégalités (8.2), on conclut à la minoration de l'exposant de Lojasiewicz de F à l'infini en $d_m - 1 + q'$, ce qui donne notre résultat. $\diamondsuit$

Exposé 4
À propos du théorème de E. Cygan

9. Idéal de Chow d'un cycle.

a. Situation analytique locale.

Considérons un k-cycle C effectif de dimension pure dans un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n$, tel que $0 \in |C|$ et

$$C = \sum_j \alpha_j C_j \,.$$

Soit π une application linéaire surjective $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{k+1}$ (une *projection*), telle que 0 soit un point isolé de $\operatorname{Ker} \pi \cap |C|$; il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbf{C}^n$ tel que la restriction de π à $U \cap |C|$ soit une application *propre* de $U \cap |C|$ sur $\pi(U)$. À chaque composante irréductible C_j du cycle contenant 0, correspond un nombre μ_{π, C_j} qui est le nombre de feuillets du revêtement

$$\pi\big|_{C_j \cap U} : \; C_j \cap U \mapsto \pi(U) \,.$$

Alors, la projection $\pi(C \cap U)$ est un sous ensemble analytique de dimension k de $\pi(U)$, c'est à dire une hypersurface, que l'on peut donc définir par une équation $f_{\pi,j}$ dans $\pi(U)$ (au voisinage de 0). On peut relever cette équation et définir une fonction analytique dans U (éventuellement restreint) par

$$F(\pi, z) : \; z \mapsto \prod_j f_{\pi,j}(\pi(z))^{\alpha_j \mu_{\pi, C_j}} \,.$$

Une telle projection π est dite *admissible.* En considérant *toutes les projections admissibles possibles*, on construit un idéal dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en z, que l'on appelle *idéal de Chow* associé au cycle C à l'origine, comme

$$I^{\mathrm{ch}}(C)_0 = (F(\pi, \cdot), \; \pi \text{ admissible}) \,.$$

b. Situation algébrique globale.

Soit C un cycle algébrique

$$C = \sum_j \alpha_j C_j$$

de dimension pure k dans l'espace affine $\mathbf{C}^n$ (où, si l'on préfère, le schéma $\mathbf{A}^n$). On dit qu'une projection π surjective de $\mathbf{A}^n$ dans $\mathbf{A}^{k+1}$ est admissible si et seulement si sa restriction à chaque composante C_j est propre. Le centre X_π de cette projection est un sous espace linéaire de dimension $n - k - 2$ de $\mathbf{P}^n \setminus \mathbf{A}^n$, et dire que la projection est admissible revient simplement à dire que

$$X_\pi \cap \bigcup_j \overline{C_j} = \emptyset$$

(les adhérences sont prises bien sûr dans $\mathbf{P}^n$). L'image $\pi_* C_j$ est une hypersurface de l'espace affine $\mathbf{A}^{k+1}$, et l'on peut se donner une équation minimale pour cette hypersurface,

$$\pi_* C_j = \{P_{\pi,j} = 0\}\,.$$

On peut ainsi associer à π le polynôme

$$P(\pi, X) := \prod_j P_{\pi,j}(\pi(X))^{\alpha_j \mu_{\pi,C_j}}\ ,$$

où le nombre μ_{π,C_j} représente le nombre de feuillets du revêtement

$$\pi\big|_{C_j \cap D} :\ C_j \mapsto \mathbf{A}^{k+1}\,.$$

L'idéal engendré par tous les polynômes $P(\pi,\cdot)$ pour *toutes* les projections admissibles possibles est appelé *idéal de Chow* associé au cycle C (et noté $I^{\mathrm{ch}}(C)$ comme dans le cas local).

Si C n'est pas de dimension pure mais est se présente comme la somme

$$C = \sum_{k=0}^{n} C^{(k)}$$

de cycles de diverses dimensions, on peut définir

$$I^{\mathrm{ch}}(C) = \prod_k I^{\mathrm{ch}}(C^{(k)})\,.$$

Cette remarque est aussi valable dans le cas local.

10. Fonction distance d'un point au support d'un cycle et idéal de Chow.

a. Point de vue analytique local.

Nous allons dans cette section travailler dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$ mais tout ce que l'on fera peut bien sûr se transporter sur une variété analytique, il faut simplement remplacer la distance usuelle dans $\mathbf{C}^n$ que l'on va utiliser par la distance sur la variété; le prototype de variété est toujours $\mathbf{P}^n$ avec sa distance projective.

Soit C un k-cycle effectif dans un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n$,

$$C = \sum_j \alpha_j C_j\ ,$$

tel que $0 \in C_j$ pour tout j.

Si l'on se donne un sous-espace vectoriel l de dimension $n-k$ qui intersecte $|C|$ en un point isolé à l'origine, on a vu que l'on pouvait considérer que la projection

$$\pi_l :\ |C| \mapsto l^{\perp}$$

se présentait au voisinage de l'origine comme un revêtement à p_l feuillets, où

$$p_l = \nu(C.l;0) \leq \nu(C;0)\,,$$

l'égalité ayant lieu si l ne rencontre qu'en l'origine le cône tangent au support de C en 0 (la collection de tels l est dense dans la grassmanienne $G^{n-k}(\mathbf{C}^n)$).

On définit au voisinage de 0 une fonction *distance au cycle suivant la direction* l par

$$d_{l,C}(z) = \prod_j \Big[\prod_{q=1}^{\nu(C_j.l;0)} d(z, \xi_{j,q}(z)) \Big]^{\alpha_j}\,,$$

où les points $\xi_{j,q}(z)$, $q = 1, \ldots, \nu(C_j.l;0)$, sont les points (comptés éventuellement avec multiplicités car ils peuvent être répétés) tels que

$$\pi_l\big|_{C_j}(\pi_l(z)) = \{\xi_{j,1}(z), \ldots, \xi_{j,\nu(C_j.l;0)}(z)\}\,.$$

Cette fonction distance est immédiatement liée à l'idéal de Chow associé au cycle dans la section précédente. On a le

Lemme 2. *Si π est une projection admissible et l un sous espace de dimension $n-k$ tel que* $\operatorname{Ker}\pi \subset l$, *alors*

$$|F(\pi, z)| \leq c\, d_{l,C}(z) \tag{10.1}$$

au voisinage de l'origine. De plus, si l est un sous espace de dimension $n-k$ intersectant $|C|$ à l'origine (comme point isolé) et si les g_ι sont des générateurs de l'idéal $I^{\mathrm{ch}}(C)_0$, on a

$$d_{l,C}(z) \leq c \max_\iota |g_\iota(z)|\,. \tag{10.2}$$

On trouvera la preuve de ce lemme dans le preprint de E. Cygan * (lemme 3.2). En ce qui concerne le second point, c'est un lemme dont la preuve repose sur le principe des tiroirs de Dirichlet (si on a M boites et $Mm+1$ alumettes à ranger, il y en aura au moins m dans l'une des boites!). On retrouvera ce principe un peu plus loin et on dt́aillera un peu plus la méthode alors.

L'autre point important concernant cette fonction *distance au cycle suivant une direction* est que l'on peut la contrôler en ne prenant que des directions privilégiées. Plus précisément, on a le

Lemme 3. *Étant donné un sous espace l de dimension $n-k$ intersectant $|C|$ en un point isolé à l'origine, il existe toujours des sous espaces $l_1, \ldots, l_m$ avec les mêmes propriétés, mais vérifiant de plus $l_i \cap \mathcal{C}(|C|, 0) = \{0\}$ pour tout i (plus généralement, on peut prendre les l_i dans un ouvert de la Grassmanienne $G^{n_k}(\mathbf{C}^n)$), tels que*

$$d_{l,C}(z) \leq c \max_i d_{l_i,C}(z) \tag{10.3}$$

* Ewa Cygan, Intersection Theory and Separation Exponent in Complex Analytic Geometry, *preprint* IMUJ 1997/17.

au voisinage de l'origine.

On admettra ici ce lemme (voir la Proposition 3.3 dans le papier de E. Cygan). Regardons maintenant comment se comporte cette fonction distance par rapport à l'opération d'intersection propre avec une sous variété fermée (les sous variétés que nous utiliserons plus tard seront les H_j qui interviennent dans le calcul de l'indice de contact entre un k-cycle et une sous variété fermée $\mathcal{S}$ de dimension s). Nous avons le

Lemme 4. *Soit Z un sous ensemble analytique de dimension pure k dans un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n$, H un sous espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ de dimension m supérieure ou égale à $n-k$ tel que l'intersection $H \cap Z$ soit propre, $l \subset H$ un sous-espace vectoriel de dimension $n-k$ tel que $l \cap Z = \{0\}$ et $l \cap \mathcal{C}(|C|, 0) = \{0\}$. Alors, on a, au voisinage de* 0,

$$z \in H \Longrightarrow d(z, Z) \geq \ cd_{l,Z.H}(z)\,. \tag{10.4}$$

Preuve (esquisse). Il suffit de construire une fonction holomorphe F à valeurs dans $\mathbf{C}^r$ (pour un judicieux de r) analytique au voisinage de l'origine, telle que $F^{-1}(0) = |Z|$,

$$\|F(z)\| \geq cd_{l,Z}(z) \tag{10.5}$$

et remarquer que, pour $z \in H$,

$$d_{l,Z.H}(z) = d_{l,Z}(z)\,. \tag{10.6}$$

Admettons que cette construction ait été faite. Grâce à l'inégalité des accroissements finis, on aura alors

$$\|F(z') - F(z'')\| \leq K|z' - z''|$$

au voisinage de l'origine. Donc, si $z \in H$,

$$d(z, Z) \geq \frac{1}{K}\|F(z) - F(w_z)\|$$

si w_z réalise la distance de z à Z. Comme $F(w_z) = 0$, on aura donc

$$d(z, Z) \geq \frac{c}{K} d_{l,Z}(z) = \frac{c}{K} d_{l,Z.H}(z)$$

où c est la constante dans (10.5).

Pour construire F, voici comment on fait; en fait, on va même le faire dans une situation un peu plus générale, où Z est un k-cycle effectif

$$Z = \sum \alpha_j C_j\,.$$

On redresse dans un premier temps la situation en supposant que l'on travaille dans un polydisque U et que les coordonnées sont

$$\zeta = (\zeta', \zeta'', \zeta'''),$$

où ζ' est dans $B_{m-(n-k)}(r')$, ζ'' dans $B_{n-m}(r'')$ et $\zeta''' \in B_{n-k}(r''')$, que

$$H = B_{m-(n-k)}(r') \times \{0\} \times B_{n-k}$$

et

$$l = \{0\} \times \{0\} \times B_{n-k}(r''') .$$

On note aussi $V = B_{m-(n-k)}(r') \times B_{n-m}(r'')$ et $x = (\zeta', \zeta'')$, $y = \zeta'''$ les coordonnées.
La projection de $|Z|$ sur $V = B_{m-(n-k)}(r') \times B_{n-m}(r'')$ est supposée être un revêtement à $\nu(Z.H, 0)$ feuillets.
Si $r = (n-k-1)\nu(Z.H, 0) + 1$, on choisit r formes linéaires $l_1, \dots, l_r$ sur $\mathbf{C}^{n-k}$ telles que, prises par paquets de $n-k$, elles soient indépendantes. Pour chaque s entre 1 et r, on note L_s l'application de $V \times B_{n-k}(r''')$ dans $V \times \mathbf{C}$ définie par

$$L_s(x, y) = (x, l_s(y)) .$$

On définit aussi, si

$$C_{j,l_s} := L_s(C_j) .$$

Notre application L_s n'est rien d'autre qu'une projection admissible. On fabrique une équation minimale de C_{j,l_s},

$$f_{C_{j,l_s}}(x, t) = 0 .$$

Cette équation est un polynôme en t à coefficients fonctions analytiques en x, que l'on peut, quitte à choisir génériquement l_s, supposer de degré en t $\nu(C_j.H, 0)$. On pose alors

$$F_{l_s}(x, y) = \prod_j [f_{C_{j,l_s}}(x, l_s(y))]^{\alpha_j}$$

(c'est à dire que l'on relève les équations comme dans la section **9a** pour fabriquer des fonctions dans l'idéal de Chow). On pose enfin

$$F(x, y) = (F_{l_1}(x, y), \dots, F_{l_r}(x, y)) .$$

On a, pour chaque s entre 1 et r,

$$F_{l_s}(x, y) = \prod_j \prod_{i=1}^{\nu(C_j.H,0)} l_s(y - y_{j,i})^{\alpha_j} ,$$

où les points $y_{j,i}$ sont les $\nu(C_j.H, 0)$ antécédents de x pour la projection de C_j sur le polydisque $B_{m-(n-k)}(r') \times B_{n-m}(r'')$. Le principe des tiroirs invoqué plus haut nous dit que

$$\|F(x, y)\| \geq c \prod_j \prod_{i=1}^{\nu(C_j.H,0)} |y - y_{j,i}|^{\alpha_j} = c \prod_j d_{l,C_j}(x, y)^{\alpha_j} = c\, d_{l,Z}(x, y) .$$

Pour prouver que $d_{l,Z}(z) = d_{l,Z.H}(z)$ pour tout point de H, on peut se contenter de le vérifier en remplacant Z par une des composantes irréductibles de la décomposition, soit par exemple $C = C_j$. Si $C.H$ est décomposé

$$C.H = \sum i(C.H, \gamma)\gamma\,,$$

où les $i(C.H, \gamma)$ sont les multiplicités d'intersection (propre!) de $|C|$ et H le long de la composante γ de leur intersection, et si $(x, y) \in H$, on a

$$d_{l,C}(x, y) = \prod_{\gamma}(|y - y_{\gamma,1}| \cdots |y - y_{\gamma,\nu(\gamma,0)}|)^{i(C.H,\gamma)} = d_{l,C.H}(x, y)$$

(c'est ici que sert le fait que l ne rencontre le cône tangent à $|Z|$ qu'en l'origine). Ceci achève notre preuve car nous avons construit la fonction F voulue. $\diamondsuit$

Ces lemmes, tous ensemble, combinés avec l'algorithme qui conduit à la construction de l'indice de contact, nous conduisent à la preuve (géométrique) du théorème 2 d'E. Cygan. Plutôt que de donner cette preuve technique ici, nous allons adopter un point de vue plus algébrique et interpréter le résultat différemment suivant J. Kollár.

b. Point de vue algébrique (toujours local)

Considérons m ensembles analytiques, tous de dimension pure, $Z_1, \ldots, Z_m$, dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$ (par exemple $m = 2$, $Z_1 = Z$ et $Z_2 = \mathcal{S}$, sous-variété fermée, comme dans le théorème de E. Cygan). On peut considérer les Z_j comme des cycles, et définir le cycle

$$Z_1 \bullet Z_2 \cdots \bullet Z_m = \sum_l a_l \Gamma_l$$

en suivant la théorie de l'intersection développée par Tworzewski (ce cycle n'est plus de dimension pure!).

On peut aussi (et c'est la démarche algébrique), considérer les idéaux $I_1, \ldots, I_m$ dans l'anneau des germes à l'origine, qui sont définis comme les idéaux $I_k = I(Z_k)$, $k = 1, \ldots, m$, associés aux cycles $Z_1, \ldots, Z_m$.

Prenons un point z au voisinage de 0. On a, si le degré d'un cycle est défini ici comme le degré à l'origine

$$\begin{aligned} d(z, |Z_1| \cap \ldots \cap |Z_m|)^{\deg(Z_1 \bullet Z_2 \cdots \bullet Z_m)} &= d(z, |Z_1| \cap \ldots \cap |Z_m|)^{\sum_l a_l \deg \Gamma_l} \\ &\leq \prod_l d(z, \Gamma_l)^{a_l \deg \Gamma_l}\,. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Considérons maintenant des générateurs pour l'idéal de Chow $I^{\mathrm{ch}}(\Gamma_l)$ de Γ_l, à savoir les f_{l,ι_l}. D'après ce que l'on a vu dans la section **10a** ci dessus, on a

$$d(\Gamma_l, z)^{\nu(\Gamma_l,0)} \leq C \max_{\iota_l} |f_{l,\iota_l}(z)|\,.$$

On a donc, si les $\tilde{f}_{l,\iota_l}$ sont des générateurs de l'idéal $[I^{\mathrm{ch}}(\Gamma_l)]^{a_l}$,

$$d(z,\Gamma_l)^{a_l \deg \Gamma_l} \leq C \max_{\iota_l} |\tilde{f}_{l,\iota_l}(z)| \,.$$

La clef algébrique de tout se lit alors suivant le résultat suivant, dû à Kollár *

Proposition 4. *Si $Z_1, \ldots, Z_m$ sont m cycles*

$$I^{\mathrm{ch}}(Z_1 \bullet \cdots \bullet Z_m) \subset \overline{I(Z_1), \ldots, I(Z_m)} \,,$$

où la barre est la prise de clôture intégrale.

Ce résultat est le pendant algébrique du théorème de E. Cygan. Sa preuve est plus élémentaire et on la trouve dans le préprint de J. Kollár (théorème 5.5 dans le preprint de Kollár). Nous allons l'admettre et l'utiliser ici pour en déduire le résultat de E. Cygan.

Reprenons notre chaine d'inégalités (10.7). On a

$$\prod_l [I^{\mathrm{ch}}(\Gamma_l)]^{a_l} \subset \overline{\prod_l [I^{\mathrm{ch}}(\Gamma_l)]^{a_l}} = \overline{I^{\mathrm{ch}}(\sum_l a_l \Gamma_l)} \,.$$

La première inclusion est évidente, la seconde est une conséquence du critère valuatif utilisé comme test pour l'appartenance à la clôture intégrale. Si l'on termine maintenant en appliquant la proposition 4, on voit que

$$\prod_l [I^{\mathrm{ch}}(\Gamma_l)]^{a_l} \subset \overline{I(Z_1), \ldots, I(Z_m)} \,,$$

d'où l'on déduit, si les g_{k,i_k} sont des générateurs de $I_k = I(Z_k)$,

$$d(z, |Z_1| \cap \ldots \cap |Z_m|)^{\deg(Z_1 \bullet Z_2 \cdots \bullet Z_m)} \leq C \max_k \max_{i_k} |g_{k,i_k}(z)| \,. \tag{10.8}$$

Cette inégalité (10.8) nous donne à la fois le théorème de E. Cygan et les inégalités de Lojasiewicz précises.

On peut transporter ce point de vue du cadre local au cadre global, en considérant des cycles dans $\mathbf{A}^n$ et des générateurs des idéaux associés. Cette fois, le degré est le degré algébrique et l'on a l'estimation

$$\deg(Z_1 \bullet \cdots \bullet Z_m) \leq \deg Z_1 \cdots \deg Z_m$$

par le théorème de Bézout. On retrouve la remarque de la section 7.

* J. Kollár, Effective Nullstellensatz for arbitrary ideals, preprint **math.ag/9805091**.