

Université Bordeaux I

U.F.R. Mathématiques et Informatique

Master Recherche de Mathématiques Parcours Spécialisé

Programme des cours

Année 2009/10

Pour plus d'information, contacter le responsable
For more information, contact the coordinator
`yuri.bilu@math.u-bordeaux1.fr`

Pour l'inscription, contacter le secrétariat
For inscription, contact the secretary
`christine.parison@math.u-bordeaux1.fr`

Le site internet du Parcours Spécialisé se trouve à l'adresse
The internet site of the master programme is
`http://www.math.u-bordeaux1.fr/emi/Master/MM2S/MM2S.html`

Pour plus de renseignement concernant le Master ALGANT, dans le cadre duquel une partie des cours ont lieu, voir l'adresse
For the Master ALGANT program, sponsoring part of the courses, see
`http://www.algant.eu`

Premier Semestre

Théorie des nombres 1	Yuri Bilu	Number Theory 1
Théorie des nombres algorithmique	Jean-Paul Cerri	Algorithmic Number Theory
Courbes algébriques complexes	Alain Hénaut	Complex Algebraic Curves
Géométrie algébrique 1	Qing Liu	Algebraic Geometry 1
Analyse spectrale 1	El Maati Ouhabaz	Spectral analysis 1

Second Semestre

Empilements de sphères, symétries et optimisation combinatoire	Christine Bachoc	Sphere packing, symmetries and combinatorial optimization
Analyse spectral 2	Vincent Bruneau	Spectral analysis 2
Groupe fondamental étale	Anna Cadoret	Étale fundamental group
Formes automorphes de GL_3	Guillaume Ricotta	Automorphic forms on GL_3
Théorie de Galois différentielle et théorie de Lie	Ahmed Sebbar	Differential Galois theory and Lie theory
Courants, hauteurs, intersection	Alain Yger	Currents, heights and intersection

Résumé. Nous nous proposons d'introduire et de développer un certain nombre d'outils classiques mais cruciaux pour l'étude de la théorie des nombres, et montrer certaines de ces applications.

Plan :

- (1) nombres p -adiques
- (2) principes de Hasse
- (3) corps de nombres
- (4) fonctions ζ
- (5) ...

Abstract. The goal of this course is to introduce and develop various classical tools which play a crucial role in Number Theory, and show some of their applications.

Program:

- (1) p -adic numbers
- (2) Hasse principles
- (3) number fields
- (4) ζ -functions
- (5) ...

Références / Bibliography

Z.I. Borevich, I.R. Shafarevich: Number theory, AP, 1966

J.W.S. Cassels, A. Fröhlich (eds): *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967.

N. Koblitz: *p -adic Numbers, p -adic Analysis, and ζ -Functions*, Graduate Texts in Mathematics 58, Springer-Verlag, 1977; Second edition, 1984.

N. Koblitz: *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, Graduate Texts in Math. No. 97, Springer-Verlag, 1984. Second edition, 1993.

J.-P. Serre: *A course in Arithmetic*, Corrected fifth printing, Graduate Texts in Mathematics 7, Springer Verlag, 1996.

Résumé. Le cours utilisera comme fil rouge les algorithmes classiques et modernes de factorisation pour présenter des idées et techniques importantes en théorie algorithmique des nombres. On discutera de la réduction des \mathbb{Z} -modules et des réseaux, de la factorisation de polynômes en une variable sur un corps fini, sur les rationnels et sur un corps de nombres, puis on parlera de tests de primalité (jusqu'à l'algorithme de primalité basé sur les courbes elliptiques), et d'algorithmes de factorisation (jusqu'au crible algébrique). Pendant tout le cours, l'accent sera mis sur les idées importantes, par opposition aux détails techniques, nécessaires pour des implémentations efficaces.

Abstract. The course uses classical and modern factorization algorithms to present important ideas and techniques in computational number theory. We will cover the reduction of \mathbb{Z} -modules and lattices, factorization of univariate polynomials over finite fields, the rationals and number fields, then primality testing (up to the Elliptic Curve Primality Proving algorithm) and integer factorization (up to the Number Field Sieve). The emphasis is on important ideas throughout, as opposed to technical details necessary for efficient implementation.

Prerequisites. In the last part, basic facts about elliptic curves (over \mathbb{C} and a finite field) and algebraic number theory (splitting of primes, class groups) will be sketched then assumed.

Références / Bibliography

J. von zur Gathen, J. Gerhard: *Modern computer algebra*, Cambridge University Press, New York, 1999.

H. Cohen: *A course in computational algebraic number theory*, Springer-Verlag, 1996.

R. Crandall, C. Pomerance: *Prime Numbers, a computational perspective*, Springer, 2005.

Course notes from the last year are available at

<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~cerri/articles/book.pdf>

Résumé. Afin de poursuivre l'apprentissage du langage géométrique, on présente deux objets essentiellement équivalents : les surfaces de Riemann compactes et les courbes algébriques complexes. Source de nombreux modèles ce sujet est central en géométrie. Des méthodes multiples seront utilisées, aussi bien topologiques que transcendantes reliées aux singularités et à l'algèbre commutative. Outre des compléments sur les courbes algébriques projectives complexes planes et la dualité, on présentera pour les surfaces de Riemann compactes quelques théorèmes classiques et leurs applications.

Abstract. With the purpose of mastering the geometric language, we study two essentially equivalent objects: compact Riemann surfaces and complex algebraic curves. As a source of many examples, this subject is central in geometry. We shall use various topological and transcendental methods, and the study of singularities would provide connection to commutative algebra. In addition to the study of plane complex projective algebraic curves and the duality, we shall learn several classical theorems on compact Riemann surfaces and their applications.

Références / Bibliography

- G. Fisher:** *Plane algebraic curves*, American Mathematical Society, Providence, 2001.
- P. A. Griffiths:** *Introduction to algebraic curves*, American Mathematical Society, Providence, 1989.
- A. Hénaut, A. Yger:** *Éléments de géométrie*, Ellipses, Paris, 2004.

Résumé. Il s'agit d'une introduction à la géométrie algébrique dans le langage des schémas.

Plan :

- (1) Algèbre commutative (produit tensoriel, localisation).
- (2) Notions d'algèbre homologique (langage des catégories, lemme de Yoneda, théorie de faisceaux, suites exactes).
- (3) Schémas, morphismes de schémas, sections.
- (4) Produit et changement de base.
- (5) Propriétés topologiques (irréductibilité, connexité, dimension).
- (6) Classes de schémas (schémas réduits, schémas intègres, schémas noethériens).
- (7) Classes de morphismes (morphisme de type fini, fini, propre, projectif).
- (8) Faisceaux cohérents et cohomologie.
- (9) Dualité de Serre et théorème de Riemann-Roch sur les courbes.

Abstract. This is an introduction to algebraic geometry in the language of schemes.

Program:

- (1) Commutative algebra (tensor products, localization).
- (2) Notions of homological algebra (category language, Yoneda lemma, sheaves, exact sequences).
- (3) Schemes, morphisms of schemes, sections.
- (4) Products and base change.
- (5) Topological properties (irreducibility, connectedness, dimension).
- (6) Classes of schemes (reduced, integral, Noetherian schemes).
- (7) Classes of morphisms (finite type, finite, proper, projective morphisms).
- (8) Coherent sheaves and cohomology.
- (9) Serre's duality and Riemann-Roch theorem on the curves.

Références / Bibliography

- S. Bosch, M. Raynaud et W. Lütkebohmert:** *Néron Models*, Springer-Verlag, 1990.
- R. Hartshorne:** *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, 1977.
- Q. Liu:** *Algebraic Geometry and Arithmetic curves*, Oxford Grad. Texts in Math., **6**, Oxford Univ. Press, 2006.
- I. Shafarevich:** *Basic algebraic geometry*, Volumes 1 & 2, second and expanded edition, Springer, 1994.

Résumé. L'objectif de ce cours est d'introduire les outils de base de la théorie spectrale des opérateurs non-bornés. On y étudiera entre-autre :

- Rappels sur les opérateurs bornés : théorème du graphe fermé, norme, spectre, résolvante, rayon spectral,...
- Opérateurs compacts : définition, propriétés.
- Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts.
- Calcul fonctionnel : formule de Cauchy, cas des opérateurs auto-adjoints ; mesure spectrales, similarité a un opérateur de multiplication.
- Étude des opérateurs non-bornés : spectre, résolvante et calcul fonctionnel, spectre essentiel, ponctuel, théorème de Weyl. . .
- Équations d'évolution : une introduction.
- Formulation variationnelle, espaces de Sobolev, Laplacien de Dirichlet, de Neumann.

Abstract. The objective of this course is to introduce basic tools of the spectral theory of unbounded operators. The program includes, among other things:

- Revision of main facts about bounded operators: the closed graph theorem, norm, spectrum, resolvent, spectral radius, . . .
- Compact operators: definition, properties.
- Spectral decomposition of self-adjoint compact operators.
- Functional calculus: Cauchy formula, the case of self-adjoint operators; spectral measures, similarity to a multiplication operator.
- Study of unbounded operators, resolvent and functional calculus, essential spectrum, point spectrum, Theorem of Weyl. . .
- Evolution equations: an introduction.
- Variational formulation, Sobolev spaces, Laplacian of Dirichlet and of Neumann.

Références / Bibliography

H. Brezis: *Analyse fonctionnelle*, Masson.

Hirsh, Lacombe: *Analyse fonctionnelle*.

Reed, Simon: *Methods of modern mathematical physics*, tome 1.

E.M. Ouhabaz: *Analysis of heat equations on domains*.

Résumé. L'objectif de ce cours est de présenter des résultats récents obtenus sur des problèmes d'extrémalité en combinatoire et/ou en géométrie discrète par des méthodes associant certaines outils algorithmiques d'optimisation convexe (plus précisément la programmation conique) et l'analyse harmonique. Parmi les problèmes concernés on peut citer : le nombre de stabilité d'un graphe, le problème du « kissing number », le nombre chromatique de l'espace euclidien, les invariants d'un code correcteur d'erreurs binaire, les designs combinatoires, les empilements de sphères.

On s'attachera d'une part à développer un cadre général pour ces méthodes, d'autre part à développer pour eux-mêmes les outils requis d'intérêt général (représentations des groupes, programmation conique).

Abstract. The purpose of this course is to introduce recent results on the extremal problems in combinatorics and/or discrete geometry, obtained by combination of algorithmic methods of convex optimization, (specifically, the conic programming), and of harmonic analysis. Among these problems one can mention: the stability number of a graph, the “kissing number” problem, the chromatic number of the Euclidean space, invariants of binary error-correcting codes, combinatorial designs, sphere packings.

We shall also study the general tools required for these methods, like group representations and conic programming.

Résumé. L'objectif est d'introduire les outils du calcul pseudo-différentiel et de donner des applications pour l'étude spectrale d'opérateurs différentiels elliptiques. Nous nous intéresserons en particulier à l'opérateur de Schrödinger et à la notion de déterminant relatif régularisé défini via une fonction Zêta.

Plan :

- Rappels sur la transformée de Fourier.
- Introduction aux opérateurs pseudo-différentiels.
- Calcul fonctionnel et trace. Application à l'opérateur de la chaleur.
- Fonction Zêta relative : définition et prolongement méromorphe.
- Déterminant relatif régularisé.
- Spectre de l'opérateur de Schrödinger.

Abstract. The principal objective is to introduce the methods of pseudo-differential calculus, and give applications for the spectral study of elliptic differential operators. In particular, we will be interested in the Schrödinger operator and in the notion of regularized relative determinant defined via ζ -function.

Program:

- Review of Fourier transform.
- Introduction to pseudo-differential operators.
- Functional calculus and trace. Application to the heat operator.
- Relative ζ -function: definition and meromorphic continuation.
- Regularized relative determinant.
- Spectrum of the Schrödinger operator.

Références / Bibliography

- M. Dimassi, J. Sjöstrand:** *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*, LMS Lecture Note Series **268**, Cambridge University Press Cambridge, 1999.
- P.D. Hislop, I.M. Sigal:** *Introduction to spectral theory, with applications to Schrödinger operators*, Applied Mathematical Sciences **113**, Springer-Verlag, New York, 1996.

Plan :

- (1) Catégories galoisiennes.
- (2) La catégorie galoisienne des revêtements étales.
 - (a) Morphismes plats, non ramifiés, étales, lisses.
 - (b) La catégorie galoisienne des revêtements étales.
- (3) Exemples de calcul de groupes fondamentaux.
 - (a) Spectre d'un corps.
 - (b) Schéma normal.
 - (c) Variété géométriquement connexe.
 - (d) Variété abélienne.
 - (e) Théorème d'existence de Riemann.
- (4) Théorème de spécialisation.

Program:

- (1) Galois categories.
- (2) Galois category of étale covers.
 - (a) Flat, unramified, étale, smooth morphisms.
 - (b) Galois category of étale covers.
- (3) Examples of computation of fundamental groups.
 - (a) Spectrum of a field.
 - (b) Normal scheme.
 - (c) Geometrically connected variety.
 - (d) Abelian variety.
 - (e) Riemann existence theorem.
- (4) Specialization theorem.

Résumé. L'objectif principal du cours est d'introduire les représentations automorphes de $G = GL_3$ ainsi que leurs fonctions L associées. Précisons qu'aucun pré-requis concernant GL_2 n'est exigé. Présenter la théorie en rang 3 est préférable car les techniques ad hoc au rang 2 ne se généralisent pas. Présenter la théorie en rang 3 est suffisant car les techniques développées se généralisent en rang $n \geq 4$. Les points suivants seront abordés :

- Espaces de réseaux en tant qu'espaces homogènes : définition de topologies convenables, mesures de Haar, volumes.
- L'algèbre de Lie de G : réalisation de l'algèbre universelle enveloppante de G comme une algèbre d'opérateurs différentiels puis étude de son centre (opérateurs de Casimir).
- Modèle de Whittaker d'après Piatetski-Shapiro, Shalika et Jacquet : preuve de la propriété de multiplicité 1.
- Formes de Maaß de G : mise en place de l'analogie des coefficients de Fourier.
- L'algèbre de Hecke de G .
- Fonctions L associées aux formes de Maaß de G .

Certains des points suivants seront abordés en fonction notamment du temps disponible et du goût des étudiants.

- Le théorème réciproque de Weil pour G .
- Séries d'Eisenstein en rang 3 : décomposition spectrale.
- Séries de Poincaré en rang 3 : sommes de Kloosterman et formule de Kuznetsov.

Abstract. The main purpose is to describe the automorphic representations of $G = GL_3$ and their L -functions. Note that absolutely no background on GL_2 is required. It is better to deal with the theory in rank 3 since ad hoc methods of rank 2 do not generalize. It is enough to master the theory in rank 3 since the techniques do generalize in higher rank. The following notions will be introduced.

- Lattices spaces as homogeneous spaces: definition of suitable topologies, Haar measures, volumes.
- The Lie algebra of G : the universal enveloping algebra of G as an algebra of differential operators then detailed study of its center (Casimir operators).
- Whittaker models after Piatetski-Shapiro, Shalika and Jacquet: proof of the multiplicity 1 property.
- Maaß forms on G : the analog of Fourier coefficients.
- The Hecke algebra of G .
- L -functions associated to Maaß forms of G .

Some of the following topics will be treated depending on the available time and the students' taste.

- The converse theorem for G .
- Eisenstein series in rank 3: spectral decomposition.
- Poincaré series in rank 3: Kloosterman sums and Kuznetsov's formula.

Références / Bibliography.

- D. Bump:** *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **55**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- D. Bump:** *Automorphic forms on $GL(3, R)$* , Lecture Notes in Mathematics **1083**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- J. Faraut:** *Analyse sur les groupes de Lie, une introduction*, Mathématiques en devenir, calvage et Mounet, Paris 2006.
- D. Goldfeld:** *Automorphic forms and L -functions for the group $GL(n, \mathbb{R})$* , with an appendix by K. A. Broughan, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **99**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

Résumé. On aborde les fondements de la théorie de Galois différentielle et ensuite la théorie de Lie pour les équations différentielles. On étudie les relations entre les deux approches et des applications géométriques (Méthode du repère mobile, polynômes de Darboux, différentielles de Khaler), algébriques (Opérateurs de Cayley en théorie des Invariants, opérateurs de Bol) et arithmétiques (équations différentielles satisfaites par des formes modulaires, crochets de Rankin-Cohen).

Abstract. We study the fundamentals of the differential Galois theory and of the Lie theory for differential equations. We compare the two approaches and apply them in geometry (the moving frame method, Darboux polynomials, Khaler differentials), algebra (Cayley operators in the Invariants theory, Bol operators) and arithmetic (differential equations satisfied by modular forms, Rankin-Cohen brackets).

Résumé. On présente les résultats récents impliquant des méthodes d'analyse ou de géométrie pluricomplexe (courants résiduels, courants d'intégration, formules de Koppelman à poids et fibrés hermitiens) en théorie de l'intersection géométrique et arithmétique (point de vue *arakélovien*). L'accent est mis sur les questions relatives aux expressions explicites (formules closes) de la hauteur, concernant les contributions aux places archimédiennes (masses totales de courants de Green). On s'intéresse en particulier à la *mesure de Mahler* et à la *fonction de Ronkin* dont cette mesure se trouve être une valeur particulière, au concepts encore tout récents d'*amibe* et de *coamibe*, aux *opérateurs de Green* et de *Monge-Ampère* (réel et complexe). L'effectivité de problèmes de division du point de vue arithmétique, en particulier de ceux où les méthodes basées sur la dualité semblent incontournables (comme *Briançon-Skoda* effectif) est envisagée, soit dans le contexte projectif, soit dans le contexte torique.

Abstract. We present the recent results based on pluricomplex analysis methods (residual or integration currents, Koppelman's weighted formulae, hermitian bundles) in geometric intersection theory as well as in its arithmetic counterpart (*arakelovian* point of view). We focus on explicit closed expression for the projective or toric local heights at archimedean places: in particular the *Mahler measure*, the *Ronkin function* (of which this measure is a particular value), the quite recent and promising concepts of *amæba* and *coamæba*, and the Green and Monge-Ampère operators (either real or complex). Effectivity of division problems from the arithmetic point of view, especially those where duality methods look unavoidable (as effective *Briançon-Skoda's* theorems) is also treated, either within the projective or toric context.

Références / Bibliography.

- C.A. Berenstein, A. Vidras, A. Yger:** *Multidimensional residue theory and its applications*, AMS Surveys and Monographs, *in preparation*. *
- J.-B. Bost, H. Gillet, C. Soulé:** Heights of projective varieties and positive Green forms, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), pp. 903–1027.
- J. P. Demailly:** Courants positifs et théorie de l'intersection, *Gaz. Math.* **53** (1992), pp. 131–159.
- M. Passare, H. Rullgard:** Amœbas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope, *Duke Math. J.* **121** (2004), no. 3, 481–507.
- A. Tsikh, A. Yger:** Residue currents, complex analysis, *J. Math. Sci. (N. Y.)* **120** (2004), no. 6, 1916–1971.