Analyse Numérique pour les Problèmes Industriels
Première partie : la méthode des éléments finis.

Rémi Abgrall
Mathématiques Appliquées, Université Bordeaux I
33 405 Talence cedex

15 octobre 2002

Ce cours est enseigné en deuxième année de MatMéca, Ecole d'Ingénieurs de Bordeaux I. J'ai beaucoup utilisé le cours que P. Charrier a enseigné à MatMéca pour rédiger ce document.

Les exercices ont été collectés par Ch. Berthon, M. Saad et M. Mézine. Je les en remercie. Les erreurs sont miennes, et d'avance je remercie les lecteurs de me les transmettre.

Table des matières

Chapitre 1

Classification des équations aux dérivées partielles (EDP)

1.1 Quelques rappels sur les formes quadratiques

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et ϕ l'application bilinéaire associée

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big).$$

On considère alors $\tilde{\phi}$ l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$y \in \mathbb{R}^n, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \widetilde{\phi}(y)(x) = \phi(x,y).$$

Définition 1.1.1. *On dit que la forme quadratique q est*

1. *non dégénérée si pour $y \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\phi}(x)(y) = \phi(x,y) = 0$ implique $x = 0$.*
2. *définie si $q(x) = 0$ implique $x = 0$*
3. *définie positive si $q(x) > 0$ si $x \neq 0$,*
4. *définie négative si $q(x) < 0$ si $x \neq 0$.*

A titre d'exemple, si $n = 2$, et $x = (x_1, x_2)$ désigne un élément générique de $\mathbb{R}^2$, on voit facilement que

- $q(x) = x_1^2 + x_2^2$ est définie,
- $q(x) = -\big(x_1^2 + x_2^2\big)$ est définie négative,
- $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ est non dégénérée, mais n'est pas définie,
- $q(x) = x_1^2$ ou $q(x) = \big(x_1 + x_2\big)^2$ sont dégénérées. Dans le premier cas, le noyau de $\widetilde{\phi}$ est $\{x = (0, x_2), x_2 \in \mathbb{R}\}$, dans le second cas, il s'agit de $\{x = (x_1, x_2), x_1 + x_2 = 0\}$.

1.2 Symbole d'une EDP

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, un multi indice. On définit la longueur de α par

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

On définit ensuite, pour $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, x^α par

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Enfin, D^α désigne l'opérateur différentiel

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère maintenant l'opérateur différentiel suivant

$$L(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \qquad a_\alpha \in \mathbb{R}.$$

Si on considère *formellement* la transformée de Fourier de $L(D)(u)$, pour u fonction suffisament régulière définie sur $\mathbb{R}^n$,

$$\hat{u}(p) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip \cdot x} u(x) dx$$

ainsi que celle de $D^\alpha u$, quelque soit α multi indice de longueur inférieure ou égale à m, soient définies, on voit que

$$\widehat{L(D)(u)}p = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \big(ip\big)^\alpha \Big) \hat{u}(p).$$

On introduit alors la définition suivante :

Définition 1.2.1. *Le symbole de l'opérateur $L(D)$ est donné par*

$$L(i\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \big(i\xi\big)^\alpha.$$

Le symbole principal de L est donné par

$$L^p(i\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \big(i\xi\big)^\alpha.$$

On a posé $\big(i\xi\big)^\alpha = i^{|\alpha|} \xi^\alpha$. Dans la définition suivante, on suppose que l'opérateur L est d'ordre m, c'est à dire qu'il existe au moins un α de longueur m tel que $a_\alpha \neq 0$. Autrement dit, le symbole principal n'est pas identiquement nul.

Exemples

– Pour l'opérateur de Laplace, $L(D) := \Delta_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i}$, on a

$$L(i\xi) = -\big(\sum_{i=1}^n x_i^2 \big).$$

Son symbole principal est

$$L_p(i\xi) = -\big(\sum_{i=1}^n x_i^2 \big) = L(i\xi).$$

– Pour l'opérateur de la chaleur, $L(D) := \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_n$, on a

$$L(i\tau, i\xi) = i\tau + \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Son symbole principal est

$$L_p(i\tau, i\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

– Pour l'opérateur des ondes, $L(D) = \dfrac{\partial^2}{\partial^2 t} - \Delta_n$, on a

$$L(i\tau, i\xi) = -\tau^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Son symbole principal est

$$L_p(i\tau, i\xi) = -\tau^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = L(i\tau, i\xi).$$

– Pour l'opérateur de transport $L(D) = \dfrac{\partial}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, le symbole est

$$L(i\tau, i\xi) = i\big(\tau + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i\big) \ ;$$

il est identique à son symbole principal.

Formellement, remarquons que résoudre

$$L(D)(u) = f \tag{1.1}$$

revient à résoudre

$$L(i\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

On se «doute» que résoudre (1.1) pour l'opérateur de la chaleur, l'opérateur de Laplace, l'opérateur des ondes et l'opérateur de transport sera différente. En effet, le symbole de l'opérateur de Laplace est nul uniquement si $\xi = 0$. Par contre le symbole de l'opérateur des ondes est nul sur l'hyperboloïde

$$\tau^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0.$$

De même, le symbole de l'opérateur de transport est nul sur l'hyperplan

$$\tau + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

qui est aussi un hyperbolïde dégénéré. Enfin, le cas de l'opérateur de la chaleur est un peu hybride. En effet, son symbole n'est jamais nul si $\tau \neq 0$ et $\xi \neq 0$. Par contre son symbole principal est dégénéré.

1.3 Cas des équations scalaires du second ordre à coefficients réels constants

On considère des symboles de la forme

$$\begin{aligned} L(D)(u) &= a_0 u_{tt} + a_1 u_{x_1x_1} + a_2 u_{x_2x_2} \\ &+ b_1 u_{tx_1} + b_2 u_{tx_2} + b_3 u_{x_1x_2} \\ &+ c_1 u_t + c_2 u_{x_1} + c_3 u_{x_3} \\ &+ du \end{aligned}$$

où les coefficients a_i, b_i, c_i, d sont supposés constants. Le symbole principal de L est défini par

$$L_p(i\tau, ix_1, ix_2) = -\Big(a_0\tau^2 + a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 + b_1\tau\xi_1 + b_2\tau\xi_2 + b_3\xi_1\xi_2\Big).$$

Les équations scalaires d'ordre deux sont classées suivant le type de la forme quadratique $q(\tau, \xi_1, \xi_2) := L_p(i\tau, ix_1, ix_2)$.

Définition 1.3.1. *On dit que le problème*

$$L(D)(u) = f$$

est

- ***elliptique*** *si q est définie,*
- ***hyperbolique*** *si q est définie non positive,*
- ***parabolique*** *si q est non définie.*

On dit que l'équation de transport est hyperbolique car la partie principale de son symbole est linéaire

Exemples. L'équation de Laplace

$$-\Delta_n u = f$$

est elliptique. L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \tau} - \Delta_n u = f$$

est hyperbolique. L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \Delta_n u = f$$

est parabolique. L'équation de transport $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \vec{\lambda} \cdot \nabla u = 0$ est de type hyperbolique.

1.4 Le cas de coefficients variables

Si l'opérateur différentiel dépend de l'espace

$$L(D,x)(u) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u,$$

ce qui précède s'étend immédiatement en figeant la coordonnée d'espace pour calculer le symbole. On définit donc

$$L(i\xi,x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) \big(i\xi\big)^\alpha.$$

Dans le cas d'opérateurs d'ordre deux, les notions d'équations elliptique, parabolique, hyperbolique s'étend immédiatement.

Il faut noter cependant qu'un opérateur peut changer de type. Considérons par exemple l'opérateur de Tricomi,

$$L(D)(u) = -\bigg(x_2 u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\bigg),$$

on a

$$L(\xi) = x_2\xi_1^2 + \xi_2^2.$$

On voit donc que

- si $x_2 > 0$, l'opérateur de Tricomi est elliptique,
- si $x_2 = 0$, l'opérateur de Tricomi est parabolique,
- si $x_2 < 0$, l'opérateur de Tricomi est hyperbolique.

Ce type de problème se rencontre dans des problème de mécanique des fluide dans un régime transonique (suivant le point considéré, le nombre de Mach de l'écoulement est inférieur à 1, égal à 1 ou supérieur à 1.)

Chapitre 2

Problèmes aux limites elliptiques et formulation variationnelle

2.1 Problèmes modèles

On considère un fil elastique attaché à ss deux extrémités. Au repos, le fil est horizontal. la position d'un point du fil est repéré par son abscisse $x \in [0, 1]$.

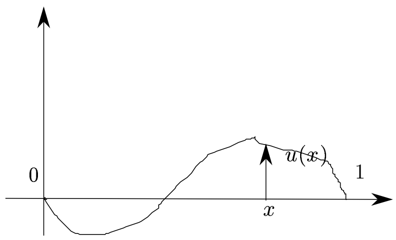


FIG. 2.1 – Configuration du problème modèle

On suppose que, sous l'infludence de forces extérieures et des tensions internes, le fil va se déformer dans un plan vertical. Après déformation, on note $u(x)$ la flèche repérée par rapport au point $x \in [0, 1]$. La valeur $u(x)$ de la fonction u mesure la *déformation* du fil au point x, x appartenant à la configuration de référence $[0, 1]$. On note $\epsilon = \epsilon(u) = u'(x)$ la *déformation* du fil. Dans la suite, on suppose ϵ petit. On note $\sigma = \sigma(u)$ la *contrainte* ou tension dans le fil. On peut la définir intuitivement de la manière suivante. Si on coupe le fil au point x, σ est la force qy'il faut appliquer en x pour maintenir la partie gauche du fil en l'état.

Pour un flil *élastique*, il existe une relation linéaire entre la contrainte et la déformation, la loi de Hooke. Il s'agit de

$$\sigma(u) = k\epsilon(u).$$

Si le fil est homogène, k est une constante. On s'intéressera cependant à des situations où k peut varier en fonction de x. C'est le cas par exemple quand un fil est composé de deux morceaux de nature physique différente.

On se pose le problème suivant : le fil élastique est soumis à une densité de force f, par exemple la pesanteur. Il se déforme sous l'effet de ce champ de force, et sa position d'équilibre est définie par le champ de déplacement u inconnu que l'on cherche à déterminer. Pour cela, on peut procéder de plusieurs manières différentes : en appliquant le principe fondamental de la dynamique, en appliquant le principe des travaux virtuels, ou encore en cherchant les extrémums (stables) de l'énergie mécanique du système.

2.1.1 Application du principe fondemental de la dynamique

Puisque $\sigma(x)$ est la force qu'il faudrait appliquer en x pour maintenir la forme du fil si celui–ci est coupé, le bilan des forces extérieures sur le segment $[x_0, x_0 + \Delta x]$ est à l'équilibre

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f dx + \sigma(x_0 + \Delta x) - \sigma(x_0) = 0.$$

En supposant que f et u sont suffisament régulier, on a, pour $\Delta x \to 0$,

$$\frac{d\sigma}{dx} + f = 0, \tag{2.1}$$

soit encore, puisque $\sigma = ku'$,

$$\big(k\ u'\big)' + f = 0. \tag{2.2}$$

Le fil étant fixé à ses deux extrémités, on a $u(0) = u(1) = 0$ (déplacement nul). On en déduit que, si u est suffisament régulière, u vérifie

$$\begin{aligned} &\big(k\ u'\big)' + f = 0 \quad \text{si } x \in]0, 1[, \\ &u(0) = u(1) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.1.2 Minimisation de l'énergie

On définit donc l'énergie potentielle du fil par

$$\mathcal{E}(u) = -\int_0^1 fudx + \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma\epsilon(u)dx.$$

soit

$$\mathcal{E}(u) = -\int_0^1 fudx + \frac{1}{2}\int_0^1 k\big(u'\big)^2 dx.$$

Le système au repos doit avoir une énergie extrémale parmi toutes les configurations possibles, c'est à dire les fonctions v définies sur $[0, 1]$ s'annulant aux deux extrèmités. On doit donc, puisque la fonctionnelle $\mathcal{E}$ est linéaire en u et convexe en u', minimiser $\mathcal{E}$, c'est à dire

$$\forall v, v(0) = v(1) = 0,\ \ \mathcal{E}(u) \leq \mathcal{E}(v). \tag{2.4}$$

Dans (2.4), on ne considèrera que les v pour lesquels $\mathcal{E}(v) < \infty$.

2.1.3 Le principe des travaux virtuels

On part encore une fois de (2.3). Soit u le déplacement recherché, solution de (2.3), et v un déplacement virtuel, c'est à dire un déplacement d'énergie finie vérifiant les conditions aux limites $v(0) = v(1) = 0$ comme dans §2.1.2 Etant à l'équilibre, le travail «virtuel» effectué par la contrainte σ doit équilibrer le travail des forces extérieures au fil. La solution u doit donc vérifier simultanément les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = 0$$

et

$$\forall v, \quad v(0) = v(1) = 0, \quad \int_0^1 \sigma(u) v dx - \int_0^1 f v dx = 0.$$

Intégrant par partie cette relation, on aboutit à

$$\forall v, \quad v(0) = v(1) = 0, \quad \int_0^1 k u' v' dx - \int_0^1 f v dx = 0. \tag{2.5}$$

La seconde relation est plus intéressante que la première car les fonctions u et v, du moins dans sa partie quadratique, jouent un rôle symétrique.

Si on note $a(u,v) = \displaystyle\int_0^1 k u' v'$ et $\ell(v) = \displaystyle\int_0^1 f v dx$, le problème revient à trouver u tel que $u(0) = u(1) = 0$ et

$$\forall v, v(0) = v(1) = 0, a(u,v) = \ell(v).$$

On parle de la *formulation variationnelle* du problème, a est une forme bilinéaire et ℓ une forme linéaire. Bien évidemment, pour que le problème soit correctement posé, il faut préciser les espaces dans lesquels sont définis la forme quadratique a et la forme linéaire ℓ.

2.1.4 Equivalence formelle des trois formulations

Remarquons que si u et les déplacements virtuels sont assez réguliers, les formulations (2.5), (2.4) et (2.3) sont *équivalentes* si k est strictement positive.

Il suffit de montrer que (2.5) implique (2.4) et (2.3), du moins formellement.

Considérons w un déplacement virtuel. Si u est solution du problème, $u + w$ en est déplacement virtuel. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u+w) &= \left(\frac{1}{2} \int_0^1 k \left(u'\right)^2 dx - \int_0^1 f u dx \right) \\
&+ \int_0^1 k(x) u' w' dx + \int_0^1 f(x) w dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 k(x) \left(w'\right)^2 dx
\end{aligned}$$

Etant donné (2.5) et $k > 0$, on a donc

$$\mathcal{E}(u+w) = \mathcal{E}(u) + \frac{1}{2} \int_0^1 k(x) \left(w'\right)^2 dx \leq \mathcal{E}(u).$$

On retrouve donc (2.4).

De même, en intégrant (2.5) «à l'envers», on a, utilisant une fois de plus les conditions aux limites,

$$\forall v,\ \ v(0)=v(1)=0,\ \ \int_0^1 \big(\sigma(u)+f\big)v dx = 0.$$

Comme u, k, f et v sont assez régulière, un résultat classique d'analyse montre que

$$\forall x \in]0,1[, \sigma' + f = 0.$$

On voit qu'on ne récupère pas directement les conditions aux limites. Ceci s'effectue parce qu'on cherche *a priori* u les vérifiant.

Enfin (2.4) implique (2.5) comme on le voit par simple intégration par partie et emploi des conditions aux limites.

2.1.5 Un autre exemple

On considère un fil élastique fixé en une de ses extrémités. En reprenant les notations du paragraphe précédent, le déplacement u vérifie dans ce cas les conditions aux limites suivantes

$$u(0)=0, \sigma(1)=\alpha$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est donné.

Par le principe fondemental de la dynamique, on voit que les équations de l'équilibre sont

$$\begin{array}{ll} \sigma' + f = 0 & \text{si } x \in]0,1[\\ u(0) = 0 & \sigma(1) = \alpha \end{array} \tag{2.6}$$

Le principe des travaux virtuel s'exprime (après intégration par partie) par

$$\forall v, v(0)=0, \int_0^1 ku'v' - \int_0^1 fv - \alpha v(1) = 0 \tag{2.7}$$

Enfin, le calcul de l'énergie mécanique montre que l'énergie potentielle

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 k\big(u'\big)^2 dx - \int_0^1 fv dx - \alpha v(1)$$

doit être minimum,

$$\forall v, v(0)=0,\ \ \mathcal{E}(u) \le \mathcal{E}(v). \tag{2.8}$$

Enfin, formellement, montrons que les trois formulations sont équivalentes. Cela se fait de la même manière que dans le paragraphe précédent. Il est cependant instructif de regarder comment et pourquoi (2.7) entraine (2.6).

Par hypothèse, on a

$$\forall v, v(0)=0, \int_0^1 ku'v' - \int_0^1 fv - \alpha v(1) = 0.$$

Considérons pour commencer v un déplacement virtuel vérifiant aussi $v(1) = 0$. En intégrant par partie «à l'envers», on obtient

$$\int_0^1 v\Big(\sigma' + f\Big)dx = 0$$

car précisément $v(1) = 0$. Utilisant les même arguments que dans le paragraphe précédent, on en déduit, si u, k et f sont assez régulière, que

$$\forall x \in]0,1[, \sigma' + f = 0.$$

On n'a donc, pour le moment, aucune information sur les conditions aux limites.

Cependant, considérons maintenant v telle que $v(0) = 0$ et $v(1)$ arbitraire. On a, après intégration par parties,

$$0 = \int_0^1 ku'v' - \int_0^1 fv - \alpha v(1) = \int_0^1 \big(\sigma' + f\big)v dx + \sigma(1)v(1) - \alpha v(1).$$

Comme on sait que $\sigma' + f = 0$ presque partout, on en déduit

$$\big(\sigma(1) - \alpha\big)v(1) = 0.$$

$v(1)$ étant arbitraire, on voit que $\sigma(1) = \alpha$. Ainsi, on récupère l'ensemble des conditions aux limites.

Ici, la formulation variationnelle du problème est : triuver u, $u(0) = 0$ et

$$\forall v, v(0) = 0, a(u,v) = \ell(v).$$

Ici, la forme quadratique a est définie par

$$a(u,v) = \int_0^1 k(x)u'(x)v'(x)dx$$

et la forme linéaire

$$\ell(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \alpha v(1).$$

2.1.6 Qu'a t–on fait ?

Ces deux problèmes ont été formulés de trois manières distinctes : le principe fondemental de la dynamique, le principe variationnel, la minimisation d'une fonctionnelle quadratique.

La première approche a l'avantage d'être plus classique. Par contre, la solution doit être au moins deux fois différentiable, k doit être une fois différentiable, et la densité de force doit être définie partout. Ceci n'est pas très réaliste. On aimerait bien, par exemple, être capable de traiter un problème où le fil est pincé en un seul point, i.e. la densité de force est nulle partout sauf en un point. Dans ce cas, il n'y a aucune que la solution soit régulière. De même le cas d'un fil formé de deux matériaux distincts homogènes, c'est à dire k discontinu, n'entre pas dans la classe de problème abordable de cette manière.

La seconde et la troisième approche sont beaucoup plus souples. Tout d'abord, seul des dérivées premières de u interviennent. Ensuite, ces fonctions n'interviennent que par des intégrale, ce qui a l'avantage énorme de pouvoir traiter des singularités. Ceci est aussi vrai pour k

Dans ces approches, la formulation des conditions aux limites est un peu subtile. Comme on l'a vu plus haut, on recherche la solution *a priori* dans un ensemble, $\{u$ tels que $u(0) = 0, u(1) = 0\}$ dans le premier cas, et $\{u$ tels que $u(0) = 0\}$ dans le second cas. Ensuite, l'ensemble des fonctions tests (les déplacements virtuels) appartiennent à ces ensembles, et enfin, la formulation des conditions aux limites apparaît aussi dans la formulation variationnelle du problème dans le second exemple, elle apparaît par l'intermédiaire de la fonctionnelle

$$\ell(v) = -\int_0^1 fv + \alpha v(1).$$

Pour le moment, ces calculs ne sont justifiés quand toutes les fonctions sont suffisament régulières. Dans la suite de ce chapitre, on introduit le cadre fonctionnel adapté à l'étude mathématique de ces problèmes.

On étend bien sûr cette démarche à des problèmes plus généraux du type

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div}\big(\vec{V}u\big) - \operatorname{div}\big(K\nabla u\big) = f & x \in \Omega \\ u = g(x) & x \in \Gamma_1 \\ \big(K\nabla u\big)\cdot\vec{n} = h(x) & x \in \Gamma_2 \end{array} \tag{2.9}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\vec{V}$ un champ de vitesse défini sur Ω, K une application définie sur Ω à valeur dans $M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées définies sur $\mathbb{R}^n$, f est à valeur réele définie sur Ω, g est définie sur Γ_1 et h sur Γ_2. Ici Γ_1 et Γ_2 sont contenus dans le bord de Ω et leur réunion constitue $\partial\Omega$.

On supposera qu'il existe u_0 tel que $u_0 = g$ sur Γ_1. On cherche u sous la forme $u = w + u_0$. Dans ce cas, la formulation variationnelle du problème est : trouver w tel que $w = 0$ sur Γ_1 tel que

$$\begin{aligned} \forall v, v = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\quad & \int_\Omega \nabla v\cdot\vec{V}w + \int_\Omega \nabla v\cdot\big(K\nabla w\big) - \int_{\Gamma_2} hv d\sigma + \int_\Omega \nabla v\cdot\vec{V}u \\ & + \int_\Omega \nabla v\cdot\vec{V}u_0 + \int_\Omega \nabla v\cdot\big(K\nabla u_0\big) + \int_\Omega \nabla v\cdot\vec{V}u_0 \\ & = \int_\Omega fv \end{aligned}$$

soit si on pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla v\cdot\vec{V}u + \int_\Omega \nabla v\cdot\big(K\nabla u\big)$$

et

$$\ell(v) = \int_{\Gamma_2} hv d\sigma - \int_\Omega \nabla v\cdot\vec{V}u - \int_\Omega \nabla v\cdot\vec{V}u_0 - \int_\Omega \nabla v\cdot\big(K\nabla u_0\big) - \int_\Omega \nabla v\cdot\vec{V}u_0 + \int_\Omega fv,$$

on cherche w vérifiant la condition de Dirichlet homogène sur Γ_1 tel que pour tout v s'annulant sur Γ_1, on a

$$a(u, v) = \ell(v).$$

C'est ce qu'on appelle la formulation variationnelle du problème (2.9). Il reste à faire l'essentiel : justifier les calculs, préciser le cadre fonctionnel, donne des conditions pratique permettant d'avoir existence et unicité de la solution.

2.2 Formulation mathématique : espaces fonctionnels

De bonnes références pour ce paragraphes sont [RT84] et [Bre83].

2.2.1 Les espace $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$

On a vu qu'il est naturel de considérer des fonctions d'énergie finie, c'est à dire telle que

$$\mathcal{E}(v) = \int_0^1 k(x)u'(x)^2dx < \infty.$$

On n'étudiera ici que le cas où la fonction k vérifie

$$0 < k_0 \leq k(x) \leq k_1.$$

Dans ce cas,

$$k_0 \int_0^1 v'(x)^2dx \leq \int_0^1 k(x)u'(x)^2dx \leq k_1 \int_0^1 v'(x)^2dx.$$

Il est donc équivalent de dire que l'on considère les fonctions v telles que

$$\int_0^1 v'(x)^2dx < \infty.$$

On est alors amené à préciser la classe des fonctions concernées.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.2.1 (Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$). *On note*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ pour } i = 1, \cdots n\}$$

où $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée de v au sens des distributions. On muni $H^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$\Big(u, v\Big) = \int_\Omega uvdx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u$$

pour lequel $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

On note

$$||u||_1 = \sqrt{\int_\Omega u^2dx + \int_\Omega |||\nabla u||^2dx}.$$

Rappels On rappelle que $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω. Cet ensemble est non réduit à la fonction nulle. En effet, si x_0 est un point quelconque de Ω, on sait qu'il existe une boule ouverte de centre x_0 et de rayon $r > 0$ contenue dans Ω. A une homothétie et une translation près, on peut supposer que $x_0 = 0$ et $r = 1$. Si on note $\rho(x)$ la distance euclidienne $\rho(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Alors la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\rho^2 - 1}\right) & \text{si } \rho(x) \leq 1 \\ 0 & \text{sinon et } x \in \Omega \end{cases} \tag{2.10}$$

est C^∞ à support compact dans Ω. On note supp (φ) le support de $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

On muni $\mathcal{D}(\Omega)$ de la topologie suivante. Si $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$, on dit que $\varphi_m \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si

1. il existe K un compact de Ω tel que supp $(\phi_m) \subset K$ quelque soit $m \in \mathbb{N}$,
2. quelque soit α, multi–indice, $D^\alpha\phi_m \to D^\alpha\phi$ uniformément sur K.

L'espace des distributions sur Ω noté $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$). Plus précisément, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\langle T, \phi_m\rangle \longrightarrow \langle T, \phi\rangle$$

quelque soit la suite $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $\varphi_m \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ est non vide. Si on considère $f \in L^p(\Omega)$, on défini la distribution T_f par

$$\langle T_f, \phi\rangle = \int_\Omega f\phi dx.$$

C'est clairement un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Un autre exemple est la distribution de Dirac définie par

$$\langle \delta, \phi\rangle = \phi(0).$$

Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit T_{x_i} sa dérivée par

$$\forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle T_{x_i}, \phi\rangle = -\langle T, \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\rangle.$$

Cette définition étend naturellement la dérivée des fonctions puisque grâce à la formule de Green, pour $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et quelque soit $i = 1, \cdots, n$,

$$\int_\Omega \phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx + \int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\psi dx = 0.$$

T_{x_i} définit encore une distribution. La distribution T_{x_i} n'est pas nécessairement associée à un élément de $L^p(\Omega)$ pour un p adéquat. En une dimension d'espace, c'est le cas par exemple de la fonction de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas de la définition 2.2.1, dire que $u \in H^1(\Omega)$ signifie

1. $u \in L^2(\Omega)$,
2. Quelque soit $i = 1, \cdots, n$, il existe g_i un élément de $L^2(\Omega)$ tel que quelque soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega g_i \phi dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx.$$

Pour finir ce paragraphe, on introduit la définition de $H_0^1(\Omega)$, espace qui joue un rôle important dans la suite.

Définition 2.2.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

On peut montrer [RT84] que si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$. Par contre si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $H_0^1(\Omega)$ est strictement inclus dans $H^1(\Omega)$. Munissant $H_0^1(\Omega)$ de la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ devient un espace de Hilbert.

2.2.2 Quelques résultats

Pour commencer, remarquons que si $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{D}(\Omega)$, le prolongement de ϕ, noté $\overline{\phi}$,

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

définit une application linéaire entre $\mathcal{D}(\Omega)$ et $H^1(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$||\phi||_{1,\Omega} = ||\overline{\phi}||_{1,\mathbb{R}^n}.$$

Cette application s'étend par continuité en une application de $H_0^1(\Omega)$ vers $H^1(\mathbb{R}^n)$ continue, de norme inférieure ou égale à 1. Le prolongement de $u \in H_0^1(\Omega)$ est encore noté $\overline{u} \in H^1(\Omega)$.

Théorème 2.2.1 (Inégalité de Poincaré). *Si Ω est borné, il existe $C(\Omega) > 0$ telle que quelque soit $v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$||u||_{1,\Omega} \leq C(\Omega) \left(\int_\Omega ||\nabla u||^2 dx \right)^{1/2}. \tag{2.11}$$

Ainsi, il existe $C'(\Omega)$ tel que

$$C'(\Omega)||u||_1 \leq \left(\int_\Omega ||\nabla u||^2 dx \right)^{1/2} \leq ||u||_1,$$

ce qui signifie que $\left(\int_\Omega ||\nabla u||^2 dx \right)^{1/2}$ définit sur $H_0^1(\Omega)$ une norme équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$.

Démonstration. Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\overline{v}$ son prolongement dans $H^1(\Omega)$. L'ouvert Ω étend borné, moyennant une éventuelle permutation des coordonnées, il existe a, b tel que Ω est dans la bande $\{(x_1, \cdots, x_n), a \leq x_n \leq b\}$. Notons $(y, x_n) = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$. On a

$$v(y, x_n) = \int_a^{x_n} \frac{\partial v}{\partial x_n} dx_n.$$

On a alors

$$\begin{aligned} |v(y, x_n)|^2 &\leq \left(\int_a^{x_n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(y, x_n) \right| dx_n \right)^2 \\ &\leq (x_n - a) \int_a^{x_n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(y, x_n) \right|^2 dx_n \\ &\leq (b - a) \int_a^{b} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(y, x_n) \right|^2 dx_n. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_\Omega v^2 &= \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\overline{v})^2 dx \\ &\leq (b - a)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

En posant $C(\Omega) = \sqrt{1 + (b - a)^2}$, on voit que pour $v \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$||v||_1 \leq C(\Omega) ||\nabla v||_{L^2}.$$

Cette inégalité s'étend par densité à $H_0^1(\Omega)$. □

Remarque 2.2.3. *On voit que l'hypothèse «Ω borné» peut être réduite à «Ω borné dans une direction».*

En général, c'est à dire pour $n > 1$, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas continues sur Ω, *a fortiori* sur $\overline{\Omega}$. A titre de contre–exemple, considérons sur $\Omega = B(0, \frac{1}{2})$, la boule unité de rayon $\frac{1}{2}$, la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \left(\log ||x|| \right)^k & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

On a

$$\int_{B(0, \frac{1}{2})} |\log ||x|||^{2k} dx = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} r \, |\log |r||^{2k} dr$$

qui est finie si $k > 0$ car $r^{1/k} \log(r)$ est borné sur $[0, \frac{1}{2}]$. Sa dérivée au sens des distributions est donnée par la fonction

$$f'(x) = -\frac{k}{||x||} \frac{x}{||x||} \left(\log ||x|| \right)^{k-1}.$$

On a

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{||x||^2} \Big| \log ||x|| \Big|^{2k-2} = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r} \Big| \log r \Big|^{2k-2} dr$$

Une primitive de $\dfrac{1}{r}\big(\log r\big)^{2k-2}$ est

$$-\frac{1}{2k-1} \Big| \log r \Big|^{2k-1}$$

qui est bornée si $k < \frac{1}{2}$. On voit que $f \in H^1(B(0, \dfrac{1}{2}))$, mais f ne peut pas être continue car non bornée sur tout compact au voisinage de 0.

Il y a donc un problème à définir la valeur de $v \in H^1(\Omega)$ sur la frontière de Ω. On peut montrer qu'il est possible de définir ce qu'on appelle la trace de $v \in H^1(\Omega)$ sur $\partial\Omega$. L'application trace prolonge continuement la restriction des fonctions sur $\partial\Omega$.

Pour ce faire, on doit supposer que le bord de Ω est «assez régulier». Pour une définition précise, on renvoie à [RT84]. De manière intuitive, cela veut dire que $\partial\Omega$ est localement une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ (i.e. une courbe de $\mathbb{R}^2$ si $n = 2$.)

Théorème 2.2.2 (Théorème de trace). *On suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière assez régulière. Alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et l'application γ_0 définie sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ par*

$$\gamma_0 \quad : \quad \begin{array}{l} \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \\ v \mapsto v_{|\partial\Omega} \end{array}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, encore notée γ_0.

On ne fera pas la démonstration dans ce cours. Cependant, pour illustrer la technique employée, on va la faire dans le cas ou

$$\Omega = \mathbb{R}^n_+ := \{x = (y, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}.$$

Le bord de Ω est $\mathbb{R}^{n-1}$.

Démonstration. Soit $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. v est à support compact dans $\overline{\Omega}$ donc $v(y, 0)$ existe et n'est pas nécessairement nulle, voir figure 2.2 pour une illustration. Par définition, pour $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\gamma_0 v(y) = v(y, 0)$ et

$$|v(y,0)|^2 = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial v^2}{\partial x_n}(y, x_n) dx_n = -2\int_0^{+\infty} v(y, x_n) \frac{\partial v}{\partial x_n}(y, x_n) dx_n.$$

Comme $ab \leq \dfrac{1}{2}\big(a^2 + b^2\big)$,

$$|v(y,0)|^2 \leq \int_0^{+\infty} \left(|v(y, x_n)|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(y, x_n) \right|^2 \right) dx_n$$

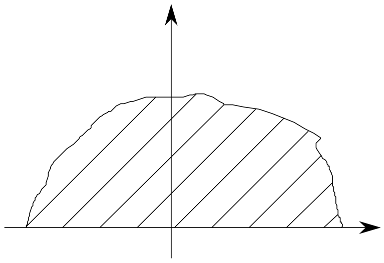


FIG. 2.2 – le support de $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\gamma_0 v(y)|^2 \, dy \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(|v(x)|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x) \right|^2 \right) dx$$

d'où

$$||\gamma_0 v||_{L^2(\Omega)} \leq ||v||_{H^1(\Omega)} \, .$$

L'application se prolonge par continuité de l'adherence V de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ dans $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Il reste à déterminer cette adhérence.

Ceci est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.2.4. *$\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n_+)$.*

Démonstration. Soit ρ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, positive, telle que $\rho(y, x_n) = 0$ si $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $x_n \leq 0$, et vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1.$$

Une telle fonction est obtenue par exemple comme l'exemple (2.10) moyennant une translation. On définit ensuite pour $\epsilon > 0$, la fonction $\rho_\epsilon(x) = \dfrac{1}{\epsilon^n} \rho\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)$ vérifie les même propriétés que ρ. Soit $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, on considère $\overline{v}$ son prolongement à $\mathbb{R}^n$ tout entier, puis $v_\epsilon = \rho_\epsilon * \overline{v}$. On vérifie que v_ϵ est nul pour $x = (y, x_n)$, $x_n < 0$. En effet,

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon * \overline{v}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x - x') \overline{v}(x') dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \rho_\epsilon(x - x') v(x') dx' \end{aligned}$$

Or, si $x = (y, x_n)$ et $x' = (y', x'_n)$ avec $x_n > 0$ et $x'_n < 0$, alors $x_n - x'_n < 0$ donc $\rho_\epsilon(x - x') = 0$ d'où le résultat.

Des résultats classiques d'analyse montrent que $v_\epsilon \to \overline{v}$ et $\dfrac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}$ dans $L^2(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Ceci montre que $v_\epsilon \to \overline{v}$ dans $H^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. □

Ceci achève la preuve du théorème. □

Il est important de remarquer que l'application trace *n'est pas surjective.* On peut montrer que Im $\gamma_0(\Omega) \subsetneqq L^2(\partial\Omega)$. On peut caractériser rigoureusement l'image de γ_0, voir le cours d'analyse des EDP. Par ailleurs, on a le résultat suivant

Proposition 2.2.5. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière «régulière». Alors, $H_0^1(\Omega)$ est le noyau de l'application trace,*

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = 0\}.$$

On sait que la boule unité de H^1 n'est pas compacte dans la topologie de H^1 car cet espace est de dimension infinie. Cependant, on a le résultat suivant

Théorème 2.2.3 (Théorème de Rellich). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ «régulière». Alors l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte : tout ensemble borné de $H^1(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$.*

En d'autre termes, soit $\{u_n\}$ une suite bornée de $H^1(\Omega)$. Il existe donc $C > 0$ telle que

$$\text{quelque soit } n \in \mathbb{N}, \int_\Omega u_n^2 dx + \int_\Omega \big(\nabla u_n\big)^2 dx \leq C.$$

Alors, il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n - v)^2 dx = 0.$$

En général, $v \notin H^1(\Omega)$.

Démonstration. On ne va faire la preuve que pour $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ et pour des suites à support compact dans $\mathbb{R}_+^n$ (le cas général suppose Ω borné). Le cas général peut se trouver dans [RT84]. On rappelle que la boule unité de $L^2(\Omega)$ n'est pas compacte pour la norme L^2 mais faiblement compacte : si $\{f_n\}_n$ est une suite de la boule unité de $L^2(\Omega)$, il existe une sous–suite (encore notée $\{f_n\}_n$) et $f \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\text{quelque soit } g \in L^2(\Omega), \lim_n \int_\Omega (f_n - f)\, g dx = 0.$$

La démonstration s'effectue en deux étapes. On commence par prolonger $u_n \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ à $H^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\widetilde{u}_n(y, x_n) = \begin{cases} u_n(y, x_n) & \text{si } x_n \geq 0 \\ u_n(y, -x_n) & \text{si } x_n < 0 \end{cases}$$

On vérifie que $\widetilde{u}_n \in H^1(\mathbb{R}^n)$ car $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$. Par exemple

$$\frac{\partial \widetilde{u}_n}{\partial x_i}(y, x_n) = \begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(y, x_n) & \text{si } x_n > 0 \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(y, -x_n) & \text{si } x_n < 0 \end{cases}$$

si $i < n$ et

$$\frac{\partial \widetilde{u}_n}{\partial x_n}(y, x_n) = \begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(y, x_n) & \text{si } x_n > 0 \\ -\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(y, -x_n) & \text{si } x_n < 0. \end{cases}$$

On voit donc que $\{\widetilde{u}_n\}_n$ est une suite bornée de $H^1(\mathbb{R}^n)$ donc de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Il existe donc $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widetilde{u}_n \to u$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On peut supposer que $u = 0$ par linéarité. Grâce à Parseval, et quelque soit $M > 0$,

$$\begin{aligned} ||u_n||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{u}_n(\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{|\xi| \leq M} \left|\hat{u}_n(\xi)\right|^2 d\xi + \frac{1}{1+M^2} \int_{|\xi| \geq M} \left(1 + |\xi|^2\right) \left|\hat{u}_n(\xi)\right|^2 d\xi \end{aligned}$$

Or, on voit facilement que

$$||u_m||^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \int \left(||u_n||^2 + ||\nabla u_n||^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + ||\xi||^2\right) \left|\hat{u}_n(\xi)\right|^2 d\xi,$$

(encore un prolongement par continuité !), donc

$$||u_n||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{|\xi| \leq M} \left|\hat{u}_n(\xi)\right|^2 d\xi + \frac{C}{1+M^2}$$

pour $C > 0$ majorant les normes H^1 de la suite. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $M > 0$ tel que

$$\frac{C}{1+M^2} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit K une boule compacte contenant le support de tous les u_n. K contient aussi le support de tous les $\widetilde{u}_n$. Si on appelle 1_K la fonction indicatrice de K, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_K |\widetilde{u}_n| dx = \int_K |\widetilde{u}_n| \leq \sqrt{\int_K dx} \sqrt{\int_K |u_n|^2}$$

par Cauchy–Schwarz, ce qui montre que $\widetilde{u}_n$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Un résultat classique d'analyse montre alors que

$$\widehat{\widetilde{u}}_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u}_n e^{i\xi \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u}_n \left(1_K(x) e^{i\xi \cdot x}\right) dx.$$

Or, $x \mapsto 1_K(x) e^{i\xi \cdot x}$ est dans L^2 et $\widetilde{u}_n \to 0$ dans L^2. On a donc, grâce à Cauchy–Schwarz, $\widehat{\widetilde{u}}_n(\xi) \to 0$ presque partout. De plus, $|\widehat{\widetilde{u}}_n(\xi)|^2 \leq C(K) ||u_n||^2$ où $C(K)$ est le volume de K. On conclut, en utilisant le théorème de convergence dominée que

$$\int_{|\xi| \leq M} \left|\widehat{u}_n(\xi)\right|^2 d\xi \to 0$$

quand $n \to +\infty$. $\square$

On aura besoin, dans la suite, de manipuler des sous–ensembles de fonctions de $H^1(\Omega)$ plus régulières.

Définition 2.2.6. *Pour tout $m \geq 1$, on note $H^m(\Omega)$ (qu'on appelle espace de Sobolev d'ordre m, l'espace*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

On le munit du produit scalaire

$$\Big(u, v\Big) = \int_\Omega \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \cdot D^\alpha v \Big) dx.$$

Pour la norme associée, notée $||u||_{m,\Omega}$, $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Si Ω est un ouvert de frontière assez régulière, on peut définir $\vec{n}(x)$, $x \in \partial\Omega$ la normale extérieure à Ω. On notera alors

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n},$$

la dérivée normale de u. On a alors le résultat suivant

Proposition 2.2.7. *Soit Ω un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$, assez régulière, alors l'application*

$$v \mapsto \gamma v = (\gamma_0 v, \gamma_n v) = (v_{|\partial\Omega}, \frac{\partial v}{\partial n}_{|\partial\Omega})$$

de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ se prolonge en une application linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$.

Démonstration. Voir [RT84]. □

On utilise ce théorème en particulier pour généraliser la formule de Green aux fonctions de $H^2(\Omega)$. On a alors

Proposition 2.2.8. *Soit Ω un ouvert borné, de frontière $\partial\Omega$ assez régulière. On note n_i la $i^{ième}$ coordonnée de $\vec{n}$. Alors*

1. *Si u et v sont deux fonctions de $H^1(\Omega)$, on a la formule de Green, pour $i = 1, \cdots, n$*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u v n_i d\sigma.$$

2. *Si $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, $K\ : \Omega \to M_n(\mathbb{R})$ est continue, alors*

$$\int_\Omega K \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega div\ \big(K \nabla u\big) v dx = \int_{\partial\Omega} K \nabla u \cdot \vec{n} v d\sigma.$$

Enfin, on a une dernière propriété des espaces de Sobolev, qui sera utilisée par la suite.

Proposition 2.2.9. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière assez régulière. Alors si $m > \frac{n}{2}$, $H^m(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$, et l'injection canonique de $H^m(\Omega)$ dans $C^0(\overline{\Omega})$ est continue.*

Autrement dit, remarquons que si $n = 1$ et $\Omega =]a, b[$, $H^1(]a, b[) \subset C^0([a, b])$. En dimension 1, les fonctions de H^1 sont continues et la notion de trace est classique. Ce n'est plus le cas pour $n = 2$, voir l'exemple (2.12)

Démonstration. On effectue la preuve pour $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, et des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ à support compact. Si $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$, on prolonge u à $\mathbb{R}^m$ par la même technique que dans le théorème 2.2.3. On note encore le prolongement de u par u. Comme dans la preuve du théorème de Rellich, on a presque partout

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi \tag{2.13}$$

car $\widehat{u} \in L^1$. On a ensuite

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(1 + ||\xi||^2\Big)^{m/2} \widehat{u}(\xi) \frac{1}{\Big(1 + ||\xi||^2\Big)^{m/2}} d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\Big(1 + ||\xi||^2\Big)^m} d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Big(1 + ||\xi||^2\Big)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Si $m > \frac{n}{2}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\Big(1 + ||\xi||^2\Big)^m} d\xi$ est finie. La seconde intégrale est aussi finie, car en utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème de Rellich, il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$C_1 \; ||u||^2_{m,\Omega} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Big(1 + ||\xi||^2\Big)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C_2 \; ||u||^2_{m,\Omega}.$$

Ceci montre que la fonction continue $(x, \xi) \mapsto \widehat{u}(\xi) e^{i\xi\cdot x}$ est dans L^1_ξ. En appliquant encore une fois le théorème de convergence dominée et la relation (2.13), on conclut (une fonction presque partout continue est continue car un ensemble de mesure vide pour la mesure de Lebesgue est d'intérieur vide). $\square$

2.3 Problème variationnel abstrait

On considère un espace de Hilbert V muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ et de la norme associée $|| \cdot ||$, $a(\cdot, \cdot)$, une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ (i. e. il existe $M > 0$ tel que $a(u, v) \leq M \; ||u|| \; ||v||$), $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V (i. e. il existe $M > 0$ tel que $L(v) \leq M \; ||v||$). On s'intéresse au problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \text{trouver } u \in V, \; \forall v \in V \;\; a(u, v) = L(v).$$

Définition 2.3.1. *On dit que la forme $a(\cdot, \cdot)$, définie sur $V \times V$ est V-elliptique ou V-coercive si et seulement si*

$$\exists \; \alpha > 0, \; \forall v \in V, \;\; \alpha \; ||v||^2 \leq a(v, v).$$

On peut alors démontrer le théorème d'existence et d'unicité connu sous le nom de *Lemme de Lax et Milgram* :

Théorème 2.3.1 (Lax et Milgram). *On suppose que $a(\cdot\,\cdot)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur V et que L est une forme linéaire continue sur V. Alors il existe une unique solution u au problème $(\mathcal{P})$.*

Démonstration. Comme L est une forme linéaire continue, d'après le théorème de Riesz, il existe un unique élément $l \in V$ tel que

$$\forall v \in V,\ L(v) = (l, v).$$

De même, U étant fixé dans V, $v \to a(u, v)$ est une forme linéaire continue sur V et donc il existe un unique élément $\mathcal{A}u \in V$ tel que

$$\forall v \in V,\ a(u, v) = (\mathcal{A}u, v).$$

$\mathcal{A}$ ainsi défini est un opérateur de V dans V. Cet opérateur est évidemment *linéaire* :

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}(u_1 + u_2), v) = a(u_1 + u_2, v) &= a(u_1, v) + a(u_2, v) = (\mathcal{A}u_1, v) + (\mathcal{A}u_2, v),\\ (\mathcal{A}(\lambda u), v) = a(\lambda u, v) &= \lambda a(u, v) = \lambda(\mathcal{A}u, v).\end{aligned}$$

C'est aussi un opérateur *continu* sur V :

$$\forall v,\ (\mathcal{A}u, v) = a(u, v) \leq M\ ||u||\ ||v||,$$

et donc

$$||\mathcal{A}u|| \leq M\ ||u||.$$

Le problème $(\mathcal{P})$ est alors équivalent à

$$\text{Trouver } u \in V,\ \ \mathcal{A}u = l.$$

Nous allons montrer maintenant que $\mathcal{A}$ est un opérateur bijectif de V dans V ce qui assure que ce problème admet une unique solution pour tout élément l de V.

D'après l'hypothèse de coercivité on a

$$\forall v \in V,\ \alpha||v||^2 \leq a(v, v) \leq (\mathcal{A}v, v) \leq ||\mathcal{A}v||\ ||v||.$$

donc,

$$\forall v \in V,\ \alpha||v|| \leq ||\mathcal{A}v||,$$

ce qui montre que $\mathcal{A}$ est *injectif*. Il reste à montrer que $\mathcal{A}$ est *surjectif*, i.e. que $Im(\mathcal{A}) = V$. Pour cela on montre que $Im(\mathcal{A})$ est fermé et que $Im(\mathcal{A})^\perp = 0$.

Soit donc $w^* \in \overline{Im(\mathcal{A})}$ et soit $(\mathcal{A}v_n)_n$ une suite d'éléments de $Im(\mathcal{A})$ qui converge vers w. On a, grâce à la coercivité,

$$\alpha||v_n - v_m|| \leq ||\mathcal{A}v_n - \mathcal{A}v_m||.$$

La suite $(\mathcal{A}v_n)_n$ étant convergente dans V c'est une suite de Cauchy et donc la suite $(v_n)_n$ est aussi une suite de Cauchy dans V, donc convergente vers une limite notée v^*. Mais comme $\mathcal{A}$ est continu on a

$$w^* = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}v_n = \mathcal{A}v^*,$$

donc $w^* = \mathcal{A}v^*$, ce qui veut dire que $w^* \in Im(\mathcal{A})$ qui, de ce fait est donc fermé.

Reste à montrer que $Im(\mathcal{A})^\perp = 0$. Soit $v_0 \in Im(\mathcal{A})^\perp$. On a

$$\alpha||v_0||^2 \leq a(v_0, v_0) = (\mathcal{A}v_0, v_0) = 0$$

car $v_0 \in Im(\mathcal{A})^\perp$ et $\mathcal{A}v_0 \in Im(\mathcal{A})$. Donc $v_0 = 0$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Remarquons de plus que, $\mathcal{A}$ étant bijectif, il admet un inverse noté $\mathcal{A}^{-1}$ et que

$$\alpha||v|| \leq ||\mathcal{A}v|| \Rightarrow ||\mathcal{A}^{-1}w|| \leq \frac{1}{\alpha}||w||,$$

ce qui montre que $\mathcal{A}^{-1}$ est un opérateur continu. De plus, comme $\mathcal{A}u = l$, on a

$$||u|| \leq ||\mathcal{A}^{-1}l|| \leq \frac{1}{\alpha}||l|| \leq \frac{1}{\alpha}||L||_{V'}.$$

(car $||l|| = \sup \frac{(l,v)}{||v||} \leq \sup \frac{L(v)}{||v||} = ||L||_{V'}$). Au cours de la démonstration, on a montré au passage le corollaire

Corollaire 2.3.2. *La solution u du problème ($\mathcal{P}$) vérifie*

$$||u|| \leq \frac{||L||_{V'}}{\alpha}.$$

Il est intéressant de faire le lien entre cette approche de type «principe des travaux virtuels» et l'approche minimisation d'énergie.

Définition 2.3.3. *On dit que la forme bilinéaire $a(\ . \ , \ . \ )$ est symétrique sur $V \times V$ si*

$$\forall u, v \in V, a(u,v) = a(v,u).$$

On introduit la fonctionnelle

$$J(v) = a(v,v) - L(v)$$

qui joue le rôle de l'énergie. On a alors le résultat suivant concernant le problème d'optimisation

$$\mathcal{P}' \quad \text{trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V, J(u) \leq J(u).$$

On a le

Théorème 2.3.4. *On suppose que L est une forme linéaire continue sur V, que $a(\, . \, , \, . \,)$ est une forme bilinéaire continue et coercive. Alors, le problème $(\mathcal{P}')$ admet une unique solution, qui est la solution du problème $(\mathcal{P})$.*

Démonstration. 1. Soit u la solution du problème $(\mathcal{P})$. Soit v un élément quelconque de V. On a

$$\begin{aligned} J(u+v) &= \frac{1}{2}\Big(a(u,u) + 2a(u,v) + a(v,v)\Big) - \Big(L(u) + L(v)\Big) \\ &= J(u) + \Big(a(u,v) - L(v)\Big) + \frac{1}{2}a(v,v). \end{aligned}$$

Ceci signifie que $a(u,v) - L(v) = J'(u)(v)$ où $J'(u)$ est une forme linéaire continue sur V.
Comme u est solution de $(\mathcal{P})$, $a(u,v) - L(v) = J'(u)(v) = 0 \ \forall v \in V$ et

$$J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) \geq J(u) + \frac{1}{2}\alpha \, ||v||_V^2 \geq J(u)$$

ce qui montre que u est solution de $(\mathcal{P}')$.

2. Réciproquement, si u^* est solution de $(\mathcal{P}')$, alors

$$\begin{aligned} J(u^*) &\leq J(u^*+v) \\ &\leq J(u^*) + \Big(a(u^*,v) - L(v)\Big) + \frac{1}{2}a(v,v) \end{aligned}$$

d'où

$$0 \leq \big(a(u^*,v) - L(v)\big) + a(w,w).$$

En prenant $v = tw$, $t > 0$, on a

$$0 \leq t\big(a(u^*,v) - L(v)\big) + t^2 a(v,v).$$

On divise alors par t, puis on fait tendre t vers 0 d'où

$$0 \leq a(u^*,v) - L(v).$$

En prenant $t < 0$ et par le même raisonnement, on a l'inégalité inverse d'où

$$a(u^*,w) = L(w)$$

soit $u^* = u$.

□

2.4 Applications

2.4.1 Un exemple simple : le problème de Dirichlet homogène

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème suivant : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Ceci est la formulation variationnelle de

$$\begin{array}{ll} -\Delta u = f & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega. \end{array}$$

Montrons que ce problème admet une unique solution.

1. $V = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$ car c'est le noyau d'un opérateur continu, la trace.
2. la forme a définie sur $V \times V$ par

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

   est bilinéaire et continue car

$$\begin{aligned} \big|a(u,v)\big| &\leq \int_\Omega \big|\nabla u \cdot \nabla v\big| dx \\ &\leq \int_\Omega \big|\big|\nabla u\big|\big| \, \big|\big|\nabla v\big|\big| dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \big|\big|\nabla u\big|\big|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \big|\big|\nabla v\big|\big|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leq \big|\big|v\big|\big|_{1,\Omega} \big|\big|u\big|\big|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

3. La forme linéaire L définie sur V par

$$L(v) = \int_\Omega f v dx$$

   est continue car

$$\begin{aligned} \big|\big|L(v)\big|\big| &\leq \int_\Omega \big|f\big| \, \big|v\big| dx \\ &\leq \left(\int_\Omega f^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega u^2\right)^{1/2} \\ &\leq \big|\big|f\big|\big|_{L^2} \big|\big|u\big|\big|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

4. La forme bilinéaire a est coercive. Grâce à l'inégalité de Poincaré (2.11), il existe $C(\Omega)$ tel que quelque soit $u \in V = H_0^1(\Omega)$,

$$||u||_{1,\Omega} \leq C(\Omega) \left(\int_\Omega ||\nabla u||^2 dx\right)^{1/2}.$$

En prenant $\alpha = \frac{1}{C(\Omega)}$, on obtient

$$\alpha||u||_{1,\Omega}^2 \leq a(u,u).$$

Toutes les hypothèses du théorème de Lax Milgram sont réunies. Le problème admet donc une unique solution dans $H_0^1(\Omega)$.

2.4.2 Le problème de Dirichlet non homogène

On considère le problème

$$\begin{array}{ll} -\Delta u = f & x \in \Omega \\ u = g & x \in \partial\Omega \end{array}$$

On va chercher à déterminer des conditions d'existence et d'unicité de la solution de ce problème. Tout d'abord, recherchons sa formulation variationnelle.

En supposant la solution suffisament régulière, et prenant une fonction test v suffisament régulière, on a

$$-\int_\Omega \Delta u \; vdx = \int_\Omega fvdx.$$

Par la formule de Green,

$$\int_\Omega \Delta u \; v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega \text{div } \big(v\nabla u\big) dx = \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Supposons qu'il existe $u_0 \in H^1(\Omega)$ tel que

$$g = \gamma_0 u_0.$$

On va chercher la solution sous la forme $u = w + u_0$ avec $w \in H_0^1(\Omega)$. Prenant alors v nulle au bord, on a alors

$$\int_\Omega fv = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v dx.$$

Réciproquement, si w est solution du problème précédent et assez régulier, $u = w + u_0$ est solution du problème de Dirichlet non homogène.

On pose alors

$$a(w,v) = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega fvdx - \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v dx.$$

Le problème est : trouver $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(w,v) = L(v).$$

Le problème a une unique solution car a est bilinéaire coercive et L linéaire continue.

2.4.3 Le problème de Dirichlet avec conditions de Neumann

On considère

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ce problème n'a *a priori* pas de solution. Si on prend $f = 0$ et $g = 0$, toute constante est solution. La formulation variationnelle de ce problème est : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que quelque soit $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} g v d\sigma + \int_\Omega f v dx$$

car

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Il est intéressant de voir quelle hypothèse du théorème de Lax Milgram est violée. La forme bilinéaire est

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

la forme linéaire est

$$L(v) = \int_{\partial\Omega} g v d\sigma + \int_\Omega f v dx$$

qui sont toutes les deux continues sur $V = H^1(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert.

Par contre a n'est pas coercive. Si c'était le cas, il existerait $\alpha > 0$ tel que quelque soit $v \in H^1(\Omega)$,

$$\alpha\left(\int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega ||\nabla u||^2 dx\right) \le \int_\Omega ||\nabla u||^2 dx.$$

Si on prend $u =$ C constant, on voit que cette inégalité est fausse dès que C est non nul.

Quelle modification doit on faire sur (2.14) pour que le problème modifié ait une solution unique ? La difficulté est de récupérer la condition de coercivité. Considérons le problème suivant

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad x \in \Gamma_1 \\ u &= 0 \quad x \in \Gamma_0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

où $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$. On suppose que Γ_0 et Γ_1 sont des hypersurfaces localement C^1. Dans ce cas, on peut montrer [RT84] un théorème de trace tel que l'application définie pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ par

$$\gamma u = u_{|\Gamma_0}$$

se prolonge par continuité sur $H^1(\Omega)$ en une application continue à valeur dans $L^2(\Gamma_0)$ [1]. De même, si Γ_0 est suffisament régulier, on peut montrer une inégalité de type Poincaré : si

[1] Si $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ et Γ_0 est un segment du bord de $\mathbb{R}^n_+$, on peut facilement étendre la démonstration du théorème 2.2.2

$\gamma u = 0$, alors il existe $C(\Omega) > 0$ tel que

$$\forall u \in \text{Ker}\gamma, C(\Omega)^2 \int_\Omega u^2 dx \leq \int_\Omega |||nablau||^2. \tag{2.16}$$

Dans ce cas, on peut reprendre les calculs précédents et la formulation variationnelle du problème est : Trouver $v \in V := \{w \in H^1(\Omega), \gamma w = 0\}$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Gamma_1} gv d\sigma + \int_\Omega f v dx.$$

La forme bilinéaire $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$ est coercive grâce à (2.16). La forme linéaire ℓ,

$$\ell(v) = \int_{\Gamma_1} gv d\sigma + \int_\Omega f v dx$$

est clairement continue grâce à l'inégalité de Cauchy Schwarz et par continuité de l'application trace. L'espace V étant fermé dans H^1 (continuité de l'application trace). Il existe donc une unique solution dans V.

2.5 Exercices

1. On considère un corps solide élastique Ω fixé sur une partie Γ_0 de sa frontière, soumis à une densité de forces volumiques f. On rappelle que pour tout déplacement v, l'énergie totale est donnée par :
$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma(v)\cdot\mathcal{E}(v)dx - \int_\Omega f\cdot v dx.$$
Soit u telle que pour tout déplacement admissible v
$$\int_\Omega \sigma(u)\cdot\mathcal{E}(v)dx = \int_\Omega f\cdot v dx \tag{2.17}$$
   (a) Montrer que pour tout déplacement admissible v :
   $$E(u) \leq E(v)$$
   dès que le tenseur H ($\sigma = H\mathcal{E}$) est symétrique défini positif.
   (b) Montrer que si $\sigma(u)$ vérifie (2.17) pour tout v alors
   $$\begin{cases} -\text{ div } \sigma(u) = f \\ u_{|\Gamma_0} = 0 \\ \sigma\cdot n_{|\partial\Omega\setminus\Gamma_0} = 0 \end{cases}$$
2. Soit $u \in H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \partial_j v \in L^2(\Omega)\forall j = 1,2\}$. On suppose que $u \in H^1(\Omega)$ et que :
$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_\Omega K\nabla u\cdot\nabla v dx = \int_\Omega f v dx$$
Ici $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $f \in L^2(\Omega)$. Montrer que
$$-\text{ div } (K\nabla u) = f \text{ dans } \Omega.$$
3. (a) Ecrire la formulation variationnelle du problème aux limites
   $$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \text{ dans } (0,1) \\ u'(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$
   où f est donnée dans $L^2(0,1)$.
   (b) Montrer que le problème variationnel a une solution unique.
   (c) Retrouver formellement le problème initial.
   (d) Interpréter le problème initial en terme de problème de minimisation.
4. On considère le problème : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de
$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx = \int_\Omega f v dx$$
où $f \in L^2(\Omega)$. Montrer que ce problème admet une unique solution et donner le problème aux limites correspondant.

5. On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ dans } (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = \alpha \end{cases}$$

où f est donnée dans $L^2(0,1)$.

(a) Soit $V = \{u \in H^1(0,1), u(0) = 0\}$. Montrer que $|v|_{1,\Omega} = (\int_\Omega |u'(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur V et que V est un espace de Hilbert.

(b) Donner le problème variationnel et montrer qu'il admet une solution unique.

(c) Retrouver formellement le problème initial.

(d) Interpréter le problème initial en terme de problème de minimisation.

6. On considère le problème : trouver $u \in H^1(0,L)$ solution de

$$\forall v \in H^1(0,L), \int_0^L u'(x)v'(x)dx + \int_0^L u(x)dx \int_0^L v(x)dx = \int_0^L f(x)v(x)dx$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Montrer que $E(u) = (\int_0^L |u'(x)|^2 dx + (\int_0^L u(x)dx)^2)^{\frac{1}{2}}$ est une norme équivalente à celle de $H^1(0,L)$.

(b) Montrer que ce problème admet une unique solution.

(c) Montrer qu'alors $\int_0^L u(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$. En particulier si $\int_0^L f(x)dx = 0$ quel le problème aux limites satisfait par u.

(d) Que peut on dire du problème

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ dans } (0,1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

7. Etudier le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \text{ dans } (0,1) \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1) \end{cases}$$

où f est donnée dans $L^2(0,1)$.

8. On considère le problème : trouver $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_\Omega K\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega a_0 uv dx + \int_{\partial\Omega} \tau uv d\sigma = \int_\Omega fv dx + \int_{\partial\Omega} gv d\sigma$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$, avec a_0 une constante positive, $\tau \geq 0$ et $K \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ une matrice symétrique définie positive. Démontrer que ce problème admet une unique solution et en donner une interprétation formelle en termes de problème aux limites.

9. Soit $\Omega =]a, b[\times]c, d[$, mettre sous forme variationnelle le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 1 \text{ dans } \Omega \\ u(a,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(b,y) = 0,\ c < y < d, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,c) = 1,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,d) = x,\ a < x < b. \end{cases}$$

Faire l'analyse rigoureuse du problème variationnel obtenu et retrouver formellement le problème initial.

10. Extrait de septembre 1998

On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, borné, de frontière Γ. On suppose donneé une décomposition de Ω en deux sous-domaines telle que : Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints de Ω et $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$. On note $\Sigma = \partial\Omega_1 \setminus \Gamma = \partial\Omega_2 \setminus \Gamma$ l'interface entre Ω_1 et Ω_2 et n la normale à Σ extérieure à Ω_1. On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} -\text{ div } K\nabla u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et où

$$K(x) = \begin{cases} K^1 \text{ pour } x \in \Omega_1 \\ K^2 \text{ pour } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

K^1 et K^2 étant deux matrice symétriques constantes définies positives.

(a) Ecrire ce problème sous forme variationnelle.

(b) Montrer que ce problème admet une unique solution.

(c) On suppose que la restriction de u à chacun des deux ouverts vérifie $u_i = u_{|\Omega_i} \in H^2(\Omega_i)$. Montrer que u vérifie

$$\begin{cases} -\text{ div } \left(K^1\nabla u_1\right) = f \text{ dans } \Omega_1 \\ -\text{ div } \left(K^2\nabla u_2\right) = f \text{ dans } \Omega_2 \\ K^1\nabla u_1 \cdot n = K^2\nabla u_2 \cdot \text{ sur } \Sigma \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

11. Etudier le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' = \delta_{1/2} \text{ dans } (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = \alpha \end{cases}$$

où $\delta_{1/2}$ est une masse de Dirac définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0(\Omega), \quad <\delta_{1/2}, \phi>= \phi(1/2).$$

12. Extrait de janvier 2000

Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, borné et Σ une courbe incluse dans Ω. On se donne $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Sigma)$, K une matrice 2×2 symétrique définie positive, V un vecteur de $\mathbb{R}^2$, $\nu > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On considère le problème variationnel : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nu K \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \mu V \cdot \nabla u v dx = \int_\Omega f v dx + \int_\Sigma g v d\sigma$$

Montrer que ce problème admet une unique solution et donner le problème aux limites équivalent.

13. Etudier le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ dans } (0,1) \\ u(0) = 43 \\ u'(1) = \alpha. \end{cases}$$

14. Etudier et proposer une méthode d'approximation variationnelle du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + au(x) = f(x) \text{ dans } (0,1) \text{ avec } a > 0 \\ u'(1) + \alpha u(1) = 0 \text{ avec } \alpha > 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

où f est donnée dans $L^2(0,1)$.

Chapitre 3

Approximation numérique des problèmes elliptiques

Soit V un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue coercive, et L une forme linéaire continue sur V. On considère le problème variationnel abstrait $(\mathcal{P})$

$$\text{Trouver } u \in V, \quad \forall v \in V, a(u,v) = L(v) \tag{3.1}$$

qui admet une unique solution. Le but de ce chapitre est d'étudier deux méthodes d'approximation des solutions de (3.1, la méthode de Galerkin et la méthode des éléments finis.

3.1 La méthode de Galerkin

On suppose V séparable : il existe une famille libre dénombrable $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ telle que si V_n désigne l'espace vectoriel engendré par les n premiers vecteurs de la base,

$$\cup_{i\in\mathbb{N}}\overline{V_n} = V.$$

En d'autre termes, tout élément $v \in V$ est limites d'une suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ avec $v_n \in V_n$.

On introduit le problème approché $(\mathcal{P}_n)$

$$\text{Trouver } u^n \in V_n, \quad \forall v \in V_n, a(u^n,v) = L(v) \tag{3.2}$$

Ce problème admet une solution unique car V_n, espace de dimension finie, est un Hilbert, a est continue et coercive sur V_n[1]. On peut donc appliquer le Théorème de Lax Milgram, ce qui montre l'existence et l'unicité de la solution.

On écrit ensuite

$$u^n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^n \varphi_j.$$

Déterminer u^n revient à déterminer les α_i^n puisqu'on est dans un espace de dimension finie. Montrons qu'ils sont solution d'un système linéaire. Il est clair que u^n est défini par

$$a(u^n\varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 1, n,$$

[1] On a, $\forall u \in V$, $\alpha||u||^2 \leq a(u,u)$, donc *a fortiori* $\forall u \in V_n$, $\alpha||u||^2 \leq a(u,u)$.

c'est à dire

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^n a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 1, n.$$

En notant

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \vdots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix},$$

A la matrice $n \times n$

$$A = \Big(a(\varphi_i, \varphi_j) \Big)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

et b le vecteur

$$b = \begin{pmatrix} L(\varphi_1) \\ \vdots \\ L(\varphi_n) \end{pmatrix}.$$

Le problème $(\mathcal{P}_n)$ est équivalent à résoudre

$$A\alpha = b.$$

On a donc démontré le

Lemme 3.1.1. *Si la forme bilinéaire a est coercive et continue sur V, on a, pour $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi_j$ et $Y = (\beta_j)_{j=1,n}$*

$$\alpha ||v^n||_V^2 \leq Y^T A Y \leq M ||v^n||_V^2$$

où α et M ne dépendent pas de n.

Ceci montre que la matrice A est inversible. Si A est symétrique, elle est définie positive, sinon c'est $A + A^T$ qui l'est.

Ce procédé permet de définir une suite $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ où u^n est solution du problème $(\mathcal{P}_n)$ défini par (3.1). On se pose la question de connaître son comportement quand $n \to +\infty$. En particulier, la suite converge t-elle vers la solution du problème (3.1) ? On a le théorème suivant

Théorème 3.1.1. *On se place dans les conditions du théorème de Lax Milgram pour le problème $(\mathcal{P})$, dont la solution est notée u. Alors il existe $C > 0$ indépendant de n telle que la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ des solutions de $(\mathcal{P}_n)$ vérifie*

$$\big|\big|u - u^n\big|\big|_V \leq C \min_{v^n \in V^n} \big|\big|u - v^n\big|\big|$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} u^n = u.$$

Démonstration. On a
$$\begin{array}{ll} a(u^n,v^n)=L(v^n) & \forall v^n\in V^n \\ a(u,v)=L(v) & \forall v\in V \end{array}$$
La première relation est l'expression du problème $(\mathcal{P}_n)$, la seconde, celle de $(\mathcal{P})$.

On peut prendre $v\in V_n$ dans la seconde relation et donc
$$a(u-u^n,v^n)=a(u,v^n)-a(u^n,v)=L(v^n)-L(v^n)=0 \tag{3.3}$$
Ensuite, on a, quelque soit $v^n\in V_n$,
$$\begin{array}{rcl} \alpha||u-u^n||_V^2 & \leq & a(u-u^n,u-u^n) \\ & = & a(u-u^n,u-v^n)+a(u-u^n,v^n-u^n) \\ & = & a(u-u^n,u-v^n) \end{array}$$
car, grâce à (3.3), $a(u-u^n,v^n-u^n)=0$. On a donc
$$\begin{array}{rcl} \alpha||u-u^n||_V^2 & \leq & a(u-u^n,u-v^n) \\ & \leq & M||u-u^n|||_V \quad ||u-v^n||_V, \end{array}$$
soit
$$\forall v^n\in V_n,\quad ||u-u^n||_V\leq \frac{M}{\alpha}||u-v^n||_V,$$
c'est à dire
$$||u-u^n||_V\leq \frac{M}{\alpha}\min_{v^n\in V_n}||u-v^n||_V.$$
On pose $C=\dfrac{M}{\alpha}$.

Puisque V est séparable, quelque soit $\epsilon>0$, il existe N_0 et $v^n\in V^{N_0}$ tel que $||u-v^{N_0}||\leq\epsilon$. Si $n\geq N_0$, comme $V_{N_0}\subset V_n$,
$$||u-u^n||_V\leq C\min_{w^n\in V_n}||u-w^n||_V\leq C\min_{w^{N_0}\in V_{N_0}}||u-v^{N_0}||_V\leq C\epsilon,$$
d'où le résultat. □

Application On considère le problème
$$\begin{array}{ll} -u''+au'=f & x\in]0,1[\\ u(0)=u(1)=0 & \end{array}$$
La formulation variationnelle de ce problème est : Trouver $u\in H_0^1(]0,1[)$ tel que
$$\int_0^1 u'v'dx+a\int_0^1 u'vdx=\int_0^1 fvdx$$
qui admet une unique solution puique la forme
$$a(u,v)=\int_0^1 u'v'+\int_0^1 u'v$$

est bilinéaire continue coercive [2] L'ensemble des fonctions $\varphi_k = \sin k\pi x$, $k \in \mathbb{N}^*$ est un sous–ensemble de H_0^1. On peut montrer que c'est une base hilbertienne de $H_0^1(]0,1[)$.

Dans $V_n = \text{Vec}\{\varphi_n, k \leq n\}$, le problème linéaire approché est, pour $u^n = \sum_{k\leq n} \alpha_k^n \varphi_k$, définit par

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n \left(\int_0^1 \varphi_k' \varphi_j' + a \int_0^1 \varphi_k' \varphi_j \right) = \int_0^1 f\varphi_j \quad j \leq n.$$

On a

$$\int_0^1 \varphi_k' \varphi_j' = kj\pi^2 \int_0^1 \cos k\pi x \cos j\pi x = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \dfrac{1}{2} k^2 \pi^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \varphi_k' \varphi_j = k\pi \int_0^1 \cos k\pi x \sin j\pi x = \begin{cases} \dfrac{1}{2} k\pi & \text{si } k = j \\ -\dfrac{1}{2} \dfrac{k}{j-k} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ceci montre que la matrice $A_n = \big(a(\varphi_k, \varphi_j)\big)_{j,k\leq n}$ est *pleine*. Etant non symétrique, elle n'a a priori pas de propriétés particulière.

D'un point de vue numérique, on rencontre des problèmes de stockage (matrice pleine), et de coût de calcul (un produit matrice vecteur nécessite $\mathcal{O}(n^2)$ opérations. Généralement, cette méthode est inopérante.

3.2 Introduction à la méthode des éléments finis

L'approche est voisine de celle décrite dans le paragraphe précédent. Néanmoins, elle s'en distingue par les points suivants

1. On construit des problèmes approchés associé à des sous espaces de dimension finie V_h de V, mais ces sous espaces ne sont pas emboités.
2. Ces sous espaces V_h ont des bases dont les fonctions sont à support compact «petit» ce qui simplifira les calculs et sera conséquences de propriétés intéressantes.

On introduit maintenant la variante la plus simple de la méthode des éléments finis, appelés éléments finis de Lagrange P^1. Elle est introduite en deux dimensions d'espace, la dimension étant un simple exemple d'application, la dimension 3 ne pose pas de problème conceptuels particulier mais est beaucoup plus lourde à mettre en oeuvre. Le problème modèle est

$$\begin{array}{ll} -\text{div}\big(K\nabla u\big) + \vec{v}\cdot\nabla u + au = f & x \in \Omega \\ K\nabla u \cdot \vec{n} = g & x \in \Gamma_1 \\ u = 0 & x \in \Gamma_0 \end{array} \tag{3.4}$$

Comme d'habitude, Ω est un ouvert de bord régulier, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, Γ_0 est de mesure non nulle. Le problème (3.4) se met sous forme variationnelle

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in V$$

[2] $a(u,u) = \int_0^1 (u')^2\,dx + \int_0^1 u'u dx = \int_0^1 (u')^2\,dx$ car $\int_0^1 uu'dx = \frac{1}{2}\left[u^2\right]_0^1 = 0$ par la formule de Green et car $H^1(]0,1[) \subset C^0([0,1])$.

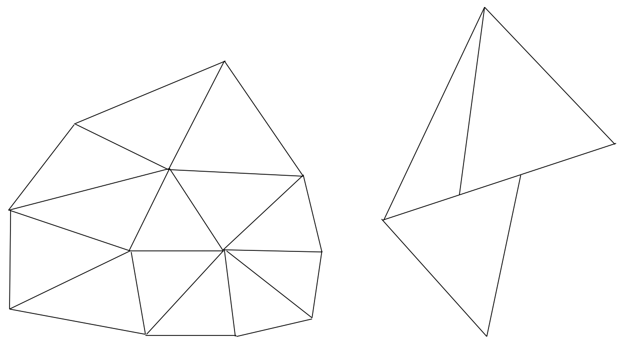
où $V = \{u \in H^1(\Omega), \gamma_0 u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$

3.2.1 Maillage et espace d'approximation

On suppose l'ouvert Ω polyhédrique, c'est à dire que $\partial\Omega$ est affine par morceau et borné.

On se donne une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω, encore appelé maillage, et on dira que cette triangulation est admissible si $\mathcal{T}_h = \{T_i\}_{i=1,n_t}$, $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^{n_t} T_i$ et si

1. $\forall i, 1 \leq i \leq n_t$, T_i est un triangle,
2. si $i \neq j$, $\overset{o}{T}_i \cap \overset{o}{T}_j = \emptyset$,
3. toute arête d'un triangle T_i de $\mathcal{T}_h$ est ou bien une arête d'un autre triangle T_j de $\mathcal{T}_h$ ou bien un morceau de $\partial\Omega$. Dans le premier cas, on dit que T_i et T_j sont adjacents.



(a) (b)

FIG. 3.1 – (a) : triangulation admissible, (b) : exemple de triangulation non admissible

Un exemple et un contre–exemple sont présentés sur la figure 3.1.

Pour T_j dans $\mathcal{T}_h$, on note h_j le diamètre de T_j et on note

$$h = \max_{1 \leq j \leq n_t} h_j.$$

On supposera aussi que la triangulation est compatible avec les conditions aux limites dans le sens où Γ_0 est une réunion d'arêtes de triangles T_j de $\mathcal{T}_h$ et Γ_1 est aussi une réunion d'arêtes de triangles T_j de $\mathcal{T}_h$, voir figure 3.2.

On introduit l'espace d'approximation suivant

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}), \forall T_j \in \mathcal{T}_h, v_{h|T_j} \in P(T_j), v_{h \min \Gamma_0} = 0\}$$

où $P_1(T_j)$ est l'ensemble des polynômes de degré ≤ 1 en (x, y) défini sur T_j.

Décrivons un élément de $P(T)$ pour un triangle T quelconque de sommet A, B et C. Appelons $\Lambda_A(M)$, $\Lambda_B(M)$, $\Lambda_C(M)$ les coordonnées barycentriques d'un point M de coordonnées (x, y). On a pour A par exemple,

$$\Lambda_A(M) = \frac{\det\begin{pmatrix} x - x_B & x_C - x_B \\ y - y_B & y_C - y_B \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} x_A - x_B & x_C - x_A \\ y_A - y_B & y_C - y_B \end{pmatrix}}.$$

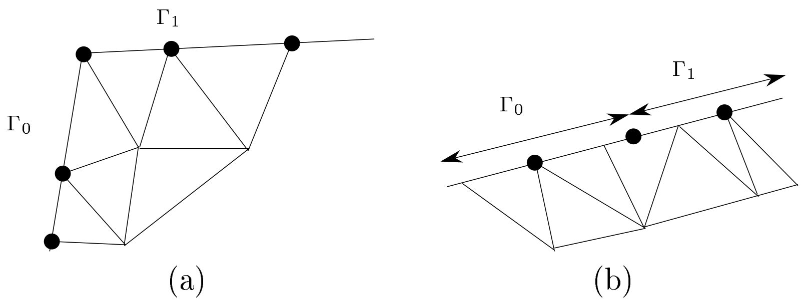


FIG. 3.2 – (a) : triangulation compatible avec les conditions aux limites, (b) : triangulation non compatible avec les conditions aux limites.

On voit que c'est un élément de $P^1(T)$ qui s'annule en B et C et vaut 1 en A. Il s'ensuit que si $P \in P^1(T)$,

$$P = P(A)\Lambda_A + P(B)\Lambda_B + P(C)\Lambda_C.$$

On a la proposition suivante

Proposition 3.2.1. *Si $\mathcal{T}_h$ est une triangulation admissible, alors $V_h \subset V = \{v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v_{|\Gamma_0} = 0\}$.*

Démonstration. Ω étant borné, si $v_h \in C^0(\overline{\Omega})$, alors $v_h \in L^2(\Omega)$. Il reste à montrer que quelque soit $1 \leq j \leq 2$, $\frac{\partial v_h}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$, la dérivation étant à prendre au sens des distributions. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\Big\langle \frac{\partial v_h}{\partial x_j}, \varphi \Big\rangle &= = -\Big\langle v_h, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \varphi \Big\rangle \\
&= \int_\Omega v_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\
&= -\sum_{i=1}^{n_t} \int_{T_j} v_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\
&= \sum_{i=1}^{n_t} \Big(\int_{T_i} \frac{\partial v_{h|T_i}}{\partial x_j} \varphi dx + \int_{\partial T_j} v_{h|T_i} \varphi n_j d\sigma \Big).
\end{aligned}$$

Or $v_{h|T_i}$ est un polynôme de degré un donc $\dfrac{\partial v_{h|T_i}}{\partial x_j}$ est un polynôme de degré inférieur à 1. Notons F^j la fonction sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F^i_{|T_i} = \frac{\partial v_{h|T_i}}{\partial x_j}$$

est polynômiale par morceau, donc $F \in L^2(\Omega)$. De plus, $v_{h|T_i}\varphi$ est continue sur ∂T_i et la normale extérieure à un point M de ∂T_i est opposée à la normale extérieure au triangle adjacent à T_i contenant le point M. Il s'ensuit que

$$\sum_{j=1}^{n_t} \int_{\partial T_j} v_{h|T_i} \varphi n_j d\sigma = \sum_{\text{arêtes sur } \partial\Omega} \int_{\text{arête}} v_{h|T_i} \varphi n_j d\sigma = 0$$

car $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$.

On en déduit que

$$\langle \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \varphi \rangle = -\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} F \rangle$$

avec $F^i \in L^2(\Omega)$, ce qui montre que $v_h \in H^1(\Omega)$.

Enfin, et par définition de V_h et à cause de la compatibilité des conditions aux limites et du maillage, on a $\gamma_0 v_{h|\Gamma_0} = 0$. $\square$

Les espace d'approximation V_h étant inclus dans l'espace V associé au problème, on parle d'approximation interne.

Il faut maintenant montrer que V_h est un espace vectoriel de dimension finie, et en déterminer une base. Pour cela, on dénombre de 1 à n les sommets du maillage qui n'appartiennent pas à $\partial\Omega_0$. Les sommets appartenant à $\partial\Omega_0$ ne sont pas numérotés.

Considérons le sommet M_i. On définit $\varphi_i \in V_h$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} \varphi_i(M_j) = \delta_j^i & \forall j, 1 \leq j \leq n \\ \varphi_i(M) = 0 & \text{si } M \in \partial\Omega_0. \end{array}$$

La fonction φ_i est ainsi bien définie. En effet, sur tout triangle T de $\mathcal{T}_h$ de sommets M_{i_1}, M_{i_2}, M_{i_3}, φ_i est déterminé de manière unique, dans $P^1(T)$ par ses valeurs aux trois sommets de T ainsi qu'on l'a vu plus haut. De plus, si on considère deux triangles adjacents ayant une arête commune, la fonction φ_i est continue au travers de l'arête car elle est affine sur cette arête et possède les même valeurs à ses sommets. En résumé, $\varphi_{i|T} \in P^1(T)$, $\varphi_i \in C^0(\overline{\Omega})$ et $\varphi_{i|\partial\Omega_0} = 0$. Donc $\varphi_i \in V_h$.

Par ailleurs, il est clair que toute fonction v_h de V_h définie par

$$v_h = \sum_{i=1}^{n} v_i \varphi_i$$

appartient à $V_h := \text{Vect}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$.

Réciproquement, soit $v_h \in V_h$. $v_h \in C^0(\overline{\Omega})$, donc $v_h(M_i)$ est bien défini. Alors la fonction définie par

$$\varphi_h = \sum_{i=1}^{n} v_h(M_i) \varphi_i$$

appartient à V_h. Soit T triangle de sommets M_{i_1}, M_{i_2}, M_{i_3}. On a $v_h(M_{i_k}) = \varphi_h(M_{i_k})$, $k = 1, 3$, et donc

$$v_{h|T} = \varphi_{h|T}$$

quelque soit T et donc $\varphi_h = v_h$.

On en déduit que $V_h = \ \text{vec}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$. La famille est génératrice. On montre de même qu'elle est libre, donc $\{\varphi_i, \cdots, \varphi_n\}$ est une base de V_h.

L'approximation par éléments finis de Lagrange P^1 est définie par le triplet suivant

- T un triangle,
- $P^1(T)$ un espace d'interpolation,

– $v_h(M_{i_1})$, $v_h(M_{i_2})$, $v_h(M_{i_3})$ les degrés de liberté.
Les degrés de libertés sont ici les valeurs de v_h aux trois sommets de T. Ils permettent de déterminer de manière unique v_h sur le triangle T.

Plus généralement, considérons un triplet (K, P, Σ) où

1. K est une partie compacte connexe d'intérieur vide de $\mathbb{R}^n$,
2. $\Sigma = \{a_i\}_{i=1,\cdots,N}$ est un ensemble de N points distincts de K,
3. P est un espace vectoriel de dimension finie composé de fonctions définies sur K.

Définition 3.2.2. *On dira que Σ est unisolvant pour P si et seulement si étant donné N scalaires (α_i) quelconques, il existe une unique fonction de P telle que*

$$p(a_j) = \alpha_j, \qquad 1 \leq j \leq N.$$

et on a la définition suivante

Définition 3.2.3 (Element finis). *Lorsque l'ensemble Σ est unisolvant pour P, le triplet (K, P, Σ) est appelé élément fini de Lagrange.*

On verra dans les exercices des exemple d'éléments finis de Lagrange.

Remarque 3.2.4. *On remarque les propriétés suivantes des fonctions φ_i.*

1. *Le support de φ_i est formé par la réunion des triangles ayant M_i pour sommet,*
2. *Le produit $\varphi_i\varphi_j$ n'est pas identiquement nul si et seulement si l'intersection des supports de φ_i et φ_j est non vide, c'est à dire si et seulement si $[M_i, M_j]$ est une arête de $\mathcal{T}_h$. La même remarque s'applique à $\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j$.*

3.2.2 Le problème approché

Rappelons que l'on s'intéresse à l'approximation du problème (3.1) qui s'écrit formellement $u \in V$, $a(u, v) = L(v), \forall v \in V$.

L'espace V_h étant précisé, on peut introduire le problème approché

$$\text{Trouver } u_h \in V_h, \qquad a(u_h, v_h) = L(v_h) \qquad v_h \in V_h. \tag{3.5}$$

Nous montrons, comme pour la méthode de Galerkin, que ce problème est équivalent à résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues. En effet (3.5) est équivalent au problème

$$\text{Trouver } u_h \in V_h, \qquad a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i) \qquad 1 \leq i \leq n \tag{3.6}$$

Comme $u_h \in V_h$, (3.6) est équivalent à trouver $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$ $(u_h = \sum_{i=1}^{n} u_i\varphi_i)$ tels que

$$\sum_{j=1}^{n} u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i) \qquad 1 \leq i \leq n,$$

ce qui est le système annoncé.

On note $U = (u_i)_{1\le i\le n}$, $A = (A_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $F = (F_i)_{1\le i\le n}$, $F_i = L(\varphi_i)$. Le système s'écrit

$$AU = F$$

On peut appliquer le lemme 3.1.1. On montre alors que la matrice A hérite de la forme bilinéaire a un certain nombre de propriétés :

Lemme 3.2.5. – *Si la forme a est coercive sur V, la matrice A est définie positive, et donc régulière.*
- *Si la forme a est symétrique, la matrice A est symétrique,*
- *$A_{ij} \neq 0$ si et seulement si les sommets M_i et M_j appartiennent à un même triangle*

Le dernier point est très important en pratique, et clarifie la différence essentielle entre la méthode de Galerkin et la méthode des éléments finis : la matrice A est creuse.

Démonstration. Les deux premières propriétés découlent de la démonstration du lemme 3.1.1.

On a

$$A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_\Omega \Big(K\nabla\varphi_j \cdot \varphi_i + \vec{V}\cdot\nabla\varphi_j\varphi_i + a\varphi_i\varphi_j \Big) dx$$

Utilisant la remarque 3.2.4, on voit que $\mathrm{supp}(\nabla\varphi_i) \subset \mathrm{supp}\varphi_i$. Donc si $[M_i, M_j]$ n'est pas une arête de $\mathcal{T}_h$, $A_{ij} = 0$. □

Le caratère creux de la matrice A est donc dû au fait que
- les fonctions de base φ_i ont un support local,
- L'opérateur $\mathcal{L} = -\mathrm{div}(K\nabla\cdot) + \vec{V}\cdot\nabla + a$ est un opérateur local ($\mathrm{supp}\mathcal{L}\varphi \subset$ supp φ).

Si l'une ou l'autre des hypothèses n'est pas satisfaite, la matrice A n'est plus creuse. C'est le cas pour la méthode de Galerkin avec une base a support non local (voir l'exemple du paragraphe 3.1 où l'opérateur est local, mais les fonctions de base ne le sont pas.

C'est le cas également si on utilise une base locale (par exemple une base d'élément finis P^1) mais avec un opérateur non local, par exemple

$$\mathcal{L}\varphi(y) = \int_0^1 k(x,y)\varphi(x)dx.$$

Pour l'équation

$$\mathcal{L}\varphi = f$$

qui est associé à la forme bilinéaire

$$a(\varphi, \psi) = \int_0^1\int_0^1 k(x,y)\varphi(x)\psi(y)dxdy$$

et à la forme

$$L\psi = \int_0^1 f(x)\psi(x)dx.$$

La forme a est continue coercive sur $V = L^2(0,1)$ si

$$0 < k_0 \le k(x) < k_1.$$

3.3 Convergence de l'approximation par éléments finis P_1, estimation d'erreur

Le premier résultat concernant la convergence et l'estimation d'erreur reprend le lemme démontré pour la méthode de Galerkin.

Lemme 3.3.1 (Lemme de Céa). *Sous les hypothèses du théorème de Lax–Milgram pour le problème ($\mathcal{P}$), il existe une constante C, indépendante du choix de V_h, telle que*

$$||u - u_h||_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||.$$

Démonstration. On a

$$\begin{array}{ll} a(u,v) = L(v) & \forall v \in V \\ a(u_h, v_h) = l(v_h) & \forall v_h \in V_h \subset V \end{array}$$

et donc

$$a(u - u_h, w_h) = 0, \qquad \forall w_h \in V_h.$$

On reprend les calculs

$$\begin{array}{rcl} \alpha||u-u_h||_V^2 & \leq & a(u-u_h, u-u_h) \\ & = & a(u-u_h, u-v_h) + a(u-u_h, v_h-u_h) \\ & = & a(u-u_h, u-v_h) \\ & \leq & M||u-u_h||\,||u-v_h|| \end{array}$$

d'où

$$||u - u_h|| \leq \frac{M}{\alpha}||u - v_h||$$

quelque soit $v_h \in V_h$, d'où le résultat. □

Remarquons que

1. la constante $C = \dfrac{M}{\alpha}$ ne dépend que de la forme bilinéaire a, pas de V_h,
2. le terme $\inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h|| = ||u - P_h(u)||_V$ où P_h est l'opérateur de projection L^2 sur V_h.

Il faut montrer que $||u - P_h(u)||_V$ tend vers 0 quand $h \to 0$, c'est à dire qu'on peut trouver V_h et $v_h \in V_h$ tel que $||u - v_h||_V$ est arbitrairement petit, c'est à dire en fait que

$$\overline{\cup_{h>0} V_h} = V.$$

On va maintenant montrer que pour les espaces V_h du type de ceux introduits plus haut, cette propriété est vraie.

En fait, $P_h(u)$ est difficile à calculer ainsi que la différence $||u - P_h(u)||_V$. En fait, il suffit de trouver un majorant à $||u - P_h(u)||_V$ et qui tend vers 0, sous de bonne conditions. En particulier, on a évidemment

$$\inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h|| = ||u - P_h(u)||_V \leq ||u - \Pi_h(u)||_V$$

où $\Pi_h(u)$ est l'élément de V_h qui interpole u aux noeuds du maillage.

Grâce à cette remarque, l'erreur $||u-u_h||_V$ peut-être estimée (en tout cas majorée) grâce à un simple argument d'interpolation. C'est l'objet de ce qui suit.

Soit un triangle T et

$$h_T = \mathrm{diam}(T) = \{\max|x-y|,\ x,y\ \in T\ \}$$

Lemme 3.3.2. *Soit T un triangle de $\mathbb{R}^2$, et π l'opérateur d'interpolation de Lagrange dans $P_1(T)$. Alors il existe une constante $C>0$, indépendante de T, telle que $\forall v\ \in H^2(T)$,*

$$\left\{\begin{array}{lcl} |v-\pi v|_{0,T} & \leq & C h_T^2\ |v|_{2,T} \\ |v-\pi v|_{1,T} & \leq & C \dfrac{h_T^2}{\rho_T}\ |v|_{2,T} \end{array}\right.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que l'opérateur π est bien défini sur $H^2(\Omega)\subset C^0(\overline{\Omega})$.

Dans un premier temps, on va exprimer $v-\pi v$ et $\nabla(v-\pi v)$. On notera $\{a_i\}_{i=1,3}$ les trois sommets du triangle T. On a alors[3]

$$v(a_i) = v(x) + \nabla v(x)\cdot(a_i-x) + \int_0^1 (1-\theta)D^2 v(x+\theta(a_i-x))(a_i-x)\cdot(a_i-x)\ d\theta \quad (3.7)$$

Dans la suite on notera $x_\theta^i = x+\theta(a_i-x)$ et φ_i les fonctions de base locales de $P_1(T)$. De l'égalité précédente, on tire donc

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^3 v(a_i)\varphi_i(x) & = & \displaystyle\left(\sum_{i=1}^3 \varphi_i(x)\right) v(x) + \sum_{i=1}^3 \nabla v(x)\cdot(a_i-x)\varphi_i(x) \\ & & \displaystyle + \sum_{i=1}^3 \int_0^1 (1-\theta)D^2 v(x_\theta^i)(a_i-x)\cdot(a_i-x)\varphi_i(x)\ d\theta \end{array}$$

Comme $\sum_{i=1}^3 \varphi_i(x) = 1$, on a donc

$$\pi v(x) = v(x)+\nabla v(x)\cdot\sum_{i=1}^3 (a_i-x)\varphi_i(x)+\sum_{i=1}^3\int_0^1 (1-\theta)D^2 v(x_\theta^i)(a_i-x)\cdot(a_i-x)\varphi_i(x)\ d\theta \quad (3.8)$$

Or l'interpolation P_1 d'une fonction affine est exacte. Donc pour tout vecteur $V\in\mathbb{R}^2$ et pour x fixé, on a

$$\forall y\in T,\ V\cdot(y-x) = V\cdot\sum_{i=1}^3 (a_i-x)\varphi_i(y)$$

[3] On est assez rapide ici, vu les notions introduites sur les espaces de Sobolev. Une façon de justifier l'égalité (3.7) est de vérifier que $C^2(T)$ est dense dans $H^2(T)$.

Prenant $y = x$, il vient alors

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^{3} V \cdot (a_i - x)\varphi_i(x)$$

Appliquée à $V = \nabla v(x)$, cette relation donne

$$\nabla v(x) \cdot \sum_{i=1}^{3} \;(a_i - x)\;\varphi(x) = 0$$

Reportant ce résultat dans la relation (3.8) il vient

$$\pi v(x) - v(x) \;=\; \sum_{i=1}^{3} \int_0^1 (1-\theta) D^2 v(x_\theta^i)(a_i - x)\cdot(a_i - x)\;\varphi_i(x)\;d\theta \tag{3.9}$$

Par ailleurs, on tire de la relation (3.7)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} v(a_i)\nabla\varphi_i(x) \;&=\; \left(\sum_{i=1}^{3}\nabla\varphi_i(x)\right) v(x) + \nabla v(x)\cdot\sum_{i=1}^{3}(a_i - x)\nabla\varphi_i(x)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{3}\int_0^1 (1-\theta)D^2 v(x_\theta^i)(a_i - x)\cdot(a_i - x)\nabla\varphi_i(x)\;d\theta\end{aligned}$$

D'où

$$\nabla\pi(x) = \nabla v(x) + \sum_{i=1}^{3}\int_0^1 (1-\theta)D^2 v(x_\theta^i)(a_i - x)\cdot(a_i - x)\nabla\varphi_i(x)\;d\theta$$

car on a

$$\sum_{i=1}^{3}\nabla\varphi_i(x) \;=\; \nabla\left(\sum_{i=1}^{3}\varphi_i(x)\right) \;=\; \nabla(1) \;=\; 0$$

et

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i=1}^{3}(a_i - x)\nabla\varphi_i(x) \;&=\; \textstyle\sum_{i=1}^{3} a_i\nabla\varphi_i(x) - x\;\sum_{i=1}^{3}\nabla\varphi_i(x) \;=\; \sum_{i=1}^{3} a_i\nabla\varphi_i(x)\\ &=\; \nabla(\textstyle\sum_{i=1}^{3} a_i\;\varphi_i(x)) \;=\; \nabla(x) = I.\end{aligned} \tag{3.10}$$

On a donc obtenu au total

$$\nabla\pi(x) - \nabla v(x) \;=\; \sum_{i=1}^{3}\int_0^1 (1-\theta)D^2 v(x_\theta^i)(a_i - x)\cdot(a_i - x)\nabla\varphi_i(x)\;d\theta$$

Calculons maintenant

$$
\begin{aligned}
|v-\pi v|^2_{0,T} &= \int_T |v(x)-\pi v(x)|^2\ dx \\
&= \int_T \left[\int_0^1 (1-\theta)\sum_{i=1}^3 D^2v(x^i_\theta)(a_i-x)\cdot(a_i-x)\ \varphi_i(x)\ \ d\theta\right]^2\ dx \\
&\leq \int_T \left[\int_0^1\ d\theta \int_0^1 \left((1-\theta)\sum_{i=1}^3 D^2v(x^i_\theta)(a_i-x)\cdot(a_i-x)\ \varphi_i(x)\right)^2\ d\theta\right] dx \\
&\leq \int_0^1 \int_T \left((1-\theta)\sum_{i=1}^3 D^2v(x^i_\theta)(a_i-x)\cdot(a_i-x)\ \varphi_i(x)\right)^2\ dx\ d\theta \\
&\leq \int_0^1 \int_T \left(\sum_{i=1}^3 (1-\theta)||D^2v(x^i_\theta)||\ ||(a_i-x)||^2\varphi_i(x)\right)^2\ dx\ d\theta
\end{aligned}
$$

Or d'après la définition de h_T on a $||a_i-x||\leq h_T$. De plus comme $0\leq\varphi_i(x)\leq 1$ et comme $\sum_{i=1}^3\varphi_i(x)=1$, grâce à la convexité on obtient :

$$
\begin{aligned}
|v-\pi v|^2_{0,T} &\leq h_T^4 \int_0^1 \int_T \sum_{i=1}^3 \left[(1-\theta)||D^2v(x^i_\theta)||\ \right]^2 dx\ d\theta \\
&\leq h_T^4 \int_0^1 \sum_{i=1}^3 \left[\int_T (1-\theta)^2||D^2v(x^i_\theta)||^2\ dx\ \right]^2 d\theta \\
&\leq h_T^4 \int_0^1 \sum_{i=1}^3 \left[\int_{T^i_\theta} ||D^2v(y)||^2\ dy\ \right]^2 d\theta
\end{aligned}
$$

où l'on a fait le changement de variable $y=\theta a_i+(1-\theta)x$ (et donc $dy=(1-\theta)dx$), où l'on a utilisé que $0\leq 1-\theta\leq 1$ et où l'on a noté $T^i_\theta=\{\theta a_i+(1-\theta)x,\ \text{pour } x\in T\}$. On remarque que $T_\theta\subset T$ car T est convexe.

Au total on obtient donc

$$
\begin{aligned}
|v-\pi v|^2_{0,T} &\leq 3h_T^4\int_T ||D^2v(y)||^2\ dy \\
&\leq C\ h_T^4\ |v|^2_{2,T}
\end{aligned}
$$

Ce qui est la première inégalité recherchée. Démontrons maintenant la deuxième estimation.

$$\begin{aligned}
|v-\pi v|_{1,T}^2 &= |\nabla v - \nabla \pi v|_{0,T}^2 = \int_T |\nabla v(x) - \nabla \pi v(x)|^2 \; dx \\
&= \int_T \left[\int_0^1 (1-\theta) \sum_{i=1}^3 D^2 v(x_\theta^i)(a_i - x)\cdot(a_i - x)\nabla\varphi_i(x) \right]^2 d\theta \; dx \\
&\leq \int_T \left[\int_0^1 d\theta \int_0^1 \left((1-\theta) \sum_{i=1}^3 D^2 v(x_\theta^i)(a_i - x)\cdot(a_i - x)\nabla\varphi_i(x) \right)^2 d\theta \right] dx \\
&\leq \int_0^1 \int_T \left[(1-\theta) \sum_{i=1}^3 D^2 v(x_\theta^i)(a_i - x)\cdot(a_i - x)\nabla\varphi_i(x) \right]^2 dx \; d\theta \\
&\leq 3 \int_0^1 \int_T \sum_{i=1}^3 \left[(1-\theta) \; ||D^2 v(x_\theta^i)|| \; ||(a_i - x)||^2 \; \frac{1}{\rho_{i,T}} \right]^2 dx \; d\theta
\end{aligned}$$

car on a $(\sum_{i=1}^3 \alpha_i)^2 \;\leq\; 3\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2$ et $||\nabla\varphi_i|| \;=\; \frac{1}{\rho_{i,T}}$ (où $\rho_{i,T}$ désigne la longueur de la hauteur du triangle T issu du sommet a_i)[4] On obtient donc en utilisant les mêmes majorations que précedemment :

$$\begin{aligned}
|v-\pi v|_{1,T}^2 &\leq 3 \; \frac{h_T^4}{\rho_T^2} \int_0^1 \sum_{i=1}^3 \int_T (1-\theta)^2 ||D^2 v(x_\theta^i)||^2 \; dx \; d\theta \\
&\leq 9 \; \frac{h_T^4}{\rho_T^2} \; \int_0^1 \int_T ||D^2 v(y)||^2 \; dy \; d\theta \\
&\leq C \; \frac{h_T^4}{\rho_T^2} \; |v|_{2,T}^2
\end{aligned}$$

ce qui est la seconde inégalité recherchée.

□

Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir, à partir du lemme 3.3.2 une estimation d'erreur et donc un résultat de convergence.

Théorème 3.3.3. *Soit Ω un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$. On considère une famille de triangulation $\{\mathcal{T}_h\}_h$ ($h = \min_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$) telles que*

1. $\lim h = 0$,
2. *il existe une constante $\sigma > 0$ telle que $\forall h, \; ,\forall T \in \mathcal{T}_h, \dfrac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma$.*

Alors, il on a

[4]On sait que $||\nabla\varphi_i|| = \dfrac{1}{|T|} l_i$ où l_i est la longueur du coté opposé au sommet a_i. Or on sait (géométrie élémentaire) que $|T| = 2\rho_{i,T} l_i$ d'où le résultat.

1. $\lim_{h\to 0} ||u - u_h||_{H1(\Omega)} = 0$,

2. il existe une constante C indépendante de h telle que si $u \in H^2(\Omega)$, alors

$$||u - u_h||_{H^1(\Omega)} \leq C\, h\, ||u||_{H^2(\Omega)}.$$

Démonstration. Si $u \in H^2(\Omega)$, alors $u \in C^0(\Omega)$. On peut donc construire $\pi_h u$ l'interpolé P^1 de u sur la triangulation $\mathcal{T}_h$. De plus, $\pi_h u \in V)h$ et (lemme 3.3.1),

$$|u - u_h||_V\ C||u - \pi_h u||_V.$$

On a

$$||u - \pi_h u||_V = ||u - \pi_h u||_{H^1(\Omega)} \leq \sum_T ||u - \pi_h u||_{H^1(T)}.$$

Or

$$||u - \pi_h u||_{H^1(T)} \leq C\frac{h_T^2}{\rho_T}|u|_{2,T} \leq Ch_T|u|_{2,T},$$
$$||u - \pi_h u||_{0,T} \leq Ch_T^2|u|_{2,T}$$

Grâce à l'hypothèse sur la famille $\mathcal{T}_h$, il vient

$$||u - \pi_h u||_{H^1(T)} \leq Ch|u|_{2,T}$$

soit au total

$$||u - \pi_h u||_{H^1(\Omega)} \leq Ch\left(\sum_T |u|_{2,T}\right) \leq Ch|u|_{2,\Omega} \leq Ch|u|_{2,\Omega}.$$

Pour montrer la convergence de la méthode, on procède ainsi. Soit $\epsilon > 0$, si $u \in H^1(\Omega)$, il existe $v \in H^2(\Omega)$ tel que $||u - v|| \leq \epsilon$. On peut donc trouver $h(\epsilon)$ tel que si $h \leq h(\epsilon)$, $||v - \pi_h(v) \leq \epsilon$ et donc

$$||u - u_h|| \leq ||u - \pi_h v|| \leq ||u - v|| + ||v - \pi_h v|| \leq 2\epsilon$$

On utilise une fois de plus le lemme 3.3.1. □

Remarquons que dans le dernier cas, on ne peut donner aucune estimation d'erreur sur $||u - u_h||$. La démonstration précédente se généralise aux cas d'éléments finis de degrè plus élevé, voir à ce sujet les exercices.

Remarque 3.3.4. – *La condition 2 revient à dire que pour la famille de triangulations considérées $\mathcal{T}_h$, les angles des triangles sont minorés uniformément.*

- *Si la constante σ devient grand, (i.e. $\rho_T << h_T$, i.e. le triangle est applati) alors la constante d'erreur devient grande, autrement dit, pour avoir une erreur raisonable, il est important d'avoir un maillage aussi régulier que possible (pas de triangles très effilés).*
- *la constante d'erreur locale (i.e. sur un triangle T) dépend de la norme de la dérivée seconde u sur T. Si le nombre d'éléments du maillage est fixé (coût de calcul fixé), on a intérêt, pour minimiser l'erreur à la répartir à peu près équitablement entre les différents triangles. Ceci montre qu'on a intérêt à prendre des triangles de grande taille là où $|u|_{2,T}$ est faible et un triangle de petite taille là où $|u|_{2,T}$ est grand. Il y a deux manière d'utiliser ce principe.*

1. *on a aucune idée a priori des zones où u sera peu régulière. Il s'agit des coins, des zones où f est peu régulière, etc. On en tient alors compte au moment de construire le maillage en maillant plus finement ces zones. C'est une approche statique.*
2. *On choisit une approche adaptative. Ceci consiste à engendrer un maillage initial et à exécuter un premier calcul. A l'aide des résultats de ce calcul, on essaie d'avoir une estimation a posteriori de l'erreur, etp on utilise cette information pour essayer d'adapter le maillage à la régularité de la solution. Cette technique permet d'obtenir après adaptation du maillage, à coût de résolution égal, une solution beaucoup plus précise. Pour mesurer l'intérêt d'une telle approche, il faut tenir compte du surcoût lié au calcul de l'erreur a posteriori et de l'adaptation de maillage. Quand la solution comporte à la fois des zones de fortes régularité et des zones de faible régularité, le gain peut être important.*

3.4 Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis.

L'utilisation de la méthode des éléments finis conduit à concevoir des codes dont la structure est liée aux propriétés de la méthode. Tout code est structuré en trois étapes distinctes,

1. une étape de prétraitement consistant principalement à engendrer le maillage du domaine,
2. l'étape centrale consistant à construire le système linéaire et à le résoudre,
3. une étape de post traitement consistant à représenter la solution obtenue sous une forme lisible permettant de tierer le plus clairement possible les informations contenues dans les résultats de calcul.

On détaille

3.4.1 Prétraitement

Informatiquement, un maillage triangulaire est représenté par un certain nombre de données :

- le nombre de sommets n_s,
- le nombre de triangle n_t,
- le tableau $coor(1:2,1;ns)$ des coordonnées des sommets de la triangulation. $coor(1,i)$ et $coor(2,i)$ sont les deux composantes du sommet numéro i,
- $nu(1:3,1:n_t)$ défini la topologie du maillage. $nu(1,jt)$, $nu(2,jt)$, $nu(3,jt)$ sont les numéros des trois sommets du jt ième triangle,
- une description des conditions aux limites.

Pour ce dernier point, il existe plusieurs «écoles» :

- On peut définir un tableau $logfr(1:ns)$ définissant par l'entier $logfr(is)$ le type de conditions aux limites. Par exemple, les points internes sont tels que $logfr(is)=0$ (et dans la routine de discrétisation des conditions aux limites, on aura un test du type

```
if (logfr(is).eq.0) then
      on ne fait rien
endif
```
Pour les points limites, on pourra faire : si
```
if (logfr(is).eq.2) then
   conditions de type Dirichlet
endif
if (logfr(is).eq.3) then
   conditions de type Neuman
endif
if (logfr(is).eq.4) then
   ........
endif
```
L'avantage de cette méthode est qu'il ne faut pas spécifier les points frontières dans la définition du maillage. L'inconvénient est triple : il faut être capable de déterminer les points frontières, la plupart des informations du tableau $logfr$ ne sert à rien, enfin, dans certain cas on peut avoir à spécifier des conditions aux limites par segment.
- Un autre méthode, plus économique, est de définir
  - $nfac$ le nombre d'arêtes frontières,
  - le tableau $nsfac(1:2,1:nfac)$. $nsfac(1,ifac)$–$nsfac(2,ifac)$ sont les numéros des sommets de l'arête frontière numéro $ifac$,
  - le tableau $logfac(1:nfac)$ qui joue un rôle analogue au tableau $logfr$ précédent.
- ou encore d'autres méthodes.

Une fois le maillage définit, on a souvent besoin de calculer les segments de la triangulation. On estime le nombre de segment en utilisant la relation d'Euler :

$$ns - nseg + nt = 1 - \text{nombre de trous dans } \Omega.$$

On peut montrer que pour un maillage régulier (au sens du théorème 3.3.3), un sommet a de l'ordre de 4–6 voisins, si bien que

$$nseg \simeq 3ns \text{ et } nt \simeq 2ns.$$

Ces estimations sont valables pour ns grand. Ceci permet d'estimer a priori le nombre maximal de segments et de triangles pour une triangulation régulière en fonction du seul nombre de sommets.

L'algorithme permettant le calcul des segments le plus simple consiste à
- définir un tableau $jaret(1:ns,1:nvmax,1;2)$ qui est initialisé à 0. $nvmax$ désigne le nombre maximal de voisins
- effectuer la boucle suivante, les aretes sont définies par $nubo(1:2,1:nseg)$

```
        DO 500 K=1,IT
           IS1=NU(NOR(K,IT),JT)      !             ON DETERMINE LES ARETES DE T
           IS2=NU(NEX(K,IT),JT)
C                             -- IS2 EST-IL VOISIN DE IS1 ?
           DO 100 KV=1,NVMAX                  !    BOUCLE SUR LE NOMBRE DE SOMMETS VOISINS DE IS1
              IF (JARET(IS1,KV,1).EQ.0) GOTO 110  ! SI   JARET(IS1,KV,1)=0 SOIT ON A EPUISE TOUS LES
                                                 ! VOISINS DE IS1, SOIT C' EST PEUT ETRE IS2
              IF (JARET(IS1,KV,1).EQ.IS2) THEN
                 IGO=JARET(IS1,KV,2)
```

```
                   NUB1=IABS(NUBO(1,IGO))
                   NUBO(1,IGO)=-NUBO(1,IGO)  ! ON CHANGE LE SIGNE DE NUBO(1,IGO). S'IL EST NEGATIF EN FIN
                                             ! D'ALGORITHME, CE POINT EST SUR UN BORD.
                   NUB2=NUBO(2,IGO)
                  GOTO 200
                ENDIF
100          CONTINUE
C                            -- IS1 EST-IL VOISIN DE IS2 ?
110          DO 120 KV=1,NVMAX
                IF (JARET(IS2,KV,1).EQ.0) GOTO 130  ! IDEM, VOIR COMMENTAIRE PLUS HAUT SUR JARET
                IF (JARET(IS2,KV,1).EQ.IS1) THEN
                   IGO=JARET(IS2,KV,2)
                   NUB1=NUBO(1,IGO)
                   NUBO(1,IGO)=-NUBO(1,IGO)
                   NUB2=NUBO(2,IGO)
                   GOTO 200
                 ENDIF
120          CONTINUE
C                            -- L'ARETE [IS1,IS2] N'EXITE PAS : ON LA CREE
            KV=KV+1
C
130         NSEGP=NSEGP+1          ! ON AUGMENT LE NOMBRE D' ARETE DE 1
            JARET(IS2,KV,1)=IS1    | ON DIT QUE IS1 ET IS2 SONT VOISINS
            JARET(IS2,KV,2)=NSEGP
            NUBO(1,NSEGP)=-IS1     ! ON DONNE UNE VALEUR NEGATIVE A NUBO(1,*), POUR VOIR S'IL EST
                                   ! (EVENTUELLEMENT) SUR LE BORD.
            NUBO(2,NSEGP)=IS2
            IGO=NSEGP
C
200         CONTINUE
C
500       CONTINUE
1000  CONTINUE
```

Une autre phase du prétraitement consiste à entrer toutes les données de calcul :

1. la matrice K,
2. le vecteur V,
3. le coefficient a,
4. la fonction g,
5. la fonction f.

Il est important dans un contexte d'utilisation industrielle que ces outils de prétraitement soient «conviviaux».

Ecrire un mailleur 2D n'est pas si simple que ça. Ecrire un mailleur tridimensionnel est un travail énorme et difficile, qui n'est effectué que par des équipes spécialisées. En général on utilise des codes commerciaux. Un mailleur bidimensionnel, Emc2, gratuit se trouve sur les pages web de l'INRIA (http ://www-rocq.inria.fr/gamma/cdrom/www/emc2/fra.htm) dans la rubrique logiciels.

3.4.2 Le code lui–même

Il est constitué de deux étapes

1. la construction du système linéaire,
2. sa résolution.

Construction du système linéaire

En général, le système linéaire n'est pas construit de la manière dont on le définit. On ne calcule pas par exemple $\int_\Omega K\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i$ qui consiste à connaître les deux triangles adjacents à l'arête $[M_i, M_j]$. On utilise une technique qui travaille triangle par triangle, ce qui est une donnée directement accessible dans le maillage tel qu'il est définit.

1. Sur chaque triangle, on effectue des calculs élémentaires (calculs locaux à l'élément). Considérons un triangle T dont les sommets sont numérotés 1, 2, 3. On calcule alors les matrices suivantes
   - la matrice de rigidité $a_{pq} = \int_T \Big[K\nabla\varphi_p \cdot \nabla\varphi_q + \vec{V} \cdot \nabla\varphi_p\varphi_q\Big]$, $p, q = 1, 3$. C'est une matrice 3×3.
   - la matrice de masse $m_{pq} = \int_T a(x)\varphi_p\varphi_q$, $p, q = 1, 3$. Si les coefficients K et $\vec{V}$ sont constants, on peut calculer ces matrices explicitement. Sinon, il faut utiliser une formule de quadrature.
   - le second terme $\int_T f\varphi_p$
2. On assemble les matrices élémentaires et les vecteurs élémentaires dans la matrice A et le vecteur B du système linéaire. On opère ainsi :

```
do jt=1,ns
is1=nu(1,jt);is2=nu(2,jt);is3=nu(3,jt);
Calcul des termes élémentaires
A_{is_1 is_2}= A_{is_1 is_2}+ a_{12}+m_{12}
etc
```

Cette méthode permet d'effectuer $\mathcal{O}(nt) = \mathcal{O}(ns)$ opération, au lieu des $\mathcal{O}(ns^2)$ de la méthode «naïve».

Remarque 3.4.1. *Le calcul d'une matrice élémentaire peut éventuellement se faire par transformation sur un élément de référence. Ceci revient à un changement de variable dans les intégrales.*

On traitera plus tard le choix des structures de données qui servent à stocker la matrice creuse A. On aborde d'abord, car les choses sont liées, le problème de la résolution dus système linéaire.

La résolution du système linéaire

On peut utiliser une méthode directe ou une méthode itérative. Une bonne référence est [Cia83]. Une référence plus complète est [Var00].

Méthode directe Factorisation LDU L triangulaire inférieure, U triangulaire supérieure, D diagonale.

$$A = LDU,$$

de coût $\mathcal{O}(ns^3)$ opérations flottantes pour la calculer $Ax = b$ est résolu par $Lz = b$ ($ns^2/2$ opérations), $Dy = z$ (ns opérations) et $Ux = y$ ($ns^2/2$ opérations). Si A est symétriques, $U = L^T$

Méthodes itératives On peut employer les méthodes de Jacobi, Gauss–Seidel, gradient conjugué, méthode de sur–relaxation, etc.

3.4.3 Prise en compte du creux

On a vu que dans une méthode d'éléments finis, le nombre de coefficients non nul est de l'ordre $\mathcal{O}(ns)$. Le gain devient très important quand ns est grand, aussi bien en terme de mémoire qu'en terme de coût de calcul.

Pour effectuer un produit matrice–vecteur, en tirant partie du creux pour économiser place et temps, il convient d'adapter un stockage adapté de la matrice A. Le stockage classique est du type

- aai, liste des coefficients non nuls de la ligne i (le tableau $jaret(is, 1 : nv, 1)$)
- nd les indices des collones correspondantes (le tableau $jaret(is, 1 : aai, 1)$)

Dans ce cas,

$$\sum a_{ij} x_j = \sum_{l=1}^{aai} a_{i,jaret(is,l,1)} x(jaret(is, l, 1)).$$

La structure de données générale est variable (on peut par exemple stocker l'ensemble des lignes les unes derrière les autres avec un pointeur de début de ligne).

La matrice A est ainsi stockée dans une structure particulière adaptée à sa nature creuse et au produit matrice–vecteur.

L'utilisation d'une telle structure de données modifie la partie assemblage de la phase de construction du système linéaire. Elle devient

```
do  p=1,3
  is=nu(p,k)
  do  q=1,3
     j=nu(q,k)
     rechercher la position du coefficient i,j
     aa(pos)=aa(pos)+ a_{p,q}+m_{p,q}
  enddo
enddo
```

Pour une méthode directe, le problème est un peu plus compliqué. En effet, le creux de la matrice A n'est pas conservé au cours de la factorisation LU , c'est à dire si $i > j$, il est possible que $a_{ij} = 0$ et $l_{ij} \neq 0$. De plus, le creux de L n'est pas intrinsèque, il dépend en fait de la numérotation des sommets du maillage.

3.5 Exercices

1. Constructions des sous espaces de dimension finie.
   (a) Soit $I =]0,1[$, on se donne une décomposition de $\overline{I}$:
   $$\overline{I} = \bigcup_{k=1}^{N} \overline{I_k}, \text{ où } I_k =]x_k, x_{k+1}[; k = 0, ...N-1; x_0 = 0; x_N = 1.$$
   Soit $v \in C^0(\overline{I})$ définie par $v(x) = a_k x + b_k$ pour $x \in I_k$. Montrer que $v \in H^1(I)$.
   (b) Soit $\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{N} \overline{\Omega_k}$ une décomposition de $\overline{\Omega}$ telle que
      i. Ω_k est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans Ω et de frontière Γ_k, $\mathcal{C}^1$ par morceaux pour tout k.
      ii. $\Omega_k \cap \Omega_{k'} = \emptyset$ pour tout $k \neq k'$.

   On considère une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, telle que $v_{|\Omega_k} \in H^1(\Omega_k)$. Montrer que $v \in H^1(\Omega)$.
2. (a) Chercher (λ, e) tel que
   $$\begin{cases} -e''(x) = \lambda e(x), \quad 0 < x < L \\ e(0) = e(L) = 0 \end{cases}$$
   On note (λ_n, e_n) la suite des solutions. Vérifier que $(e_n)_n$ forment une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$.
   (b) Montrer que
   $$\int_0^L e_n'(x) e_m'(x) dx = \lambda_n \delta_{n,m} \forall n, m \geq 1.$$
   (c) On se propose d'approcher la solution du problème
   $$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$
   par la méthode de Galerkin. Décomposer u et f dans la base Hilbertienne. Montrer que
   $$u_n = \frac{f_n}{\lambda_n}$$
   où u_n et f_n sont les coefficients de la décomposition.
   (d) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n^2$ est finie.
   (e) On approche u par $u^N = \sum_{n=1}^{N} u_n e_n$. Montrer que
   $$\|u - u^N\|_{0,I} \leq \frac{\|f\|_{0,I}}{\lambda_{N+1}}.$$
   Conclure.

(f) Décrire la méthode de Galerkin pour approcher le problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Omega =]0, L[\times]0, M[$.

3. On note $V = H^1(0,1)$. On considère le problème variationnel

$$\forall v \in V, \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

où $f \in L^2(0,1)$.

(a) Montrer que le problème variationnel a une solution unique. Donner le problème aux limites correspondant.

(b) On se propose de constuire une méthode d'approximation variationnelle. On considère une subdivision de $\overline{I} = [0,1]$ telle que $\overline{I} = [0,1] = \cup_i \overline{I_i}$, avec $I_i =]x_i, x_{i+1}[$, $i = 0, ...N$ et $x_i = ih$ avec $h = 1/(N+1)$. Soit

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{I}); v|_{I_i} \in \P_1, i = 0...N\}$$

i. A-t-on $V_h \subset V$. Donner la dimension et une base de V_h.

ii. Ecrire le problème variationnel approché et le système linéaire à résoudre pour obtenir u_h. Y-a-t-il existence et unicité de u_h.

iii. Enoncer et démontrer le lemme de Céa.

4. Construire une méthode d'approximation correspondant au problème précédent dans le cas où

(a) $V = H_0^1(I)$.

(b) $V = \{v \in H^1(I); v(0) = v(1)\}$.

(c) $V = \{v \in H^1(I); \int_I v(x)dx = 0\}$.

5. Soit $\hat{K} = [0,1]$, les triplets $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ sont-ils des éléments finis ? et si oui donner les fonctions de base.

(a) $P_{\hat{K}} = P^1$, $\Sigma_{\hat{K}} = \{p \to p(0), p \to p(1)\}$

(b) $P_{\hat{K}} = P^2$, $\Sigma_{\hat{K}} = \{p \to p(0), p \to p(1), p \to p(1/2)\}$

(c) $P_{\hat{K}} = P^3$, $\Sigma_{\hat{K}} = \{p \to p(0), p \to p(1), p \to p(1/3), p \to p(2/3)\}$

(d) $P_{\hat{K}} = P^0$, $\Sigma_{\hat{K}} = \{p \to \int_0^1 p(x)dx\}$

(e) $P_{\hat{K}} = P^3$, $\Sigma_{\hat{K}} = \{p \to p(0), p \to p(1), p \to p'(0), p \to p'(1)\}$

Soit $K = [a,b]$, dans les exemples ci-dessus $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ et (K, P_K, Σ_K) sont-ils affines équivalents.

6. Soit $\hat{K} = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$, on appelle $\hat{a}_i$ les sommets et m_i les milieux des côtés. Les triplets $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ sont-ils des éléments finis ? et si oui donner les fonctions de base.
   (a) $P_{\hat{K}} = P^1$, $\Sigma_{\hat{K}} = \{p \to p(\hat{a}_i), i = 1,2,3\}$
   (b) $P_{\hat{K}} = P^1$, $\Sigma_{\hat{K}} = \{p \to p(m_i), i = 1,2,3\}$
   (c) $P_{\hat{K}} = P^2$, $\Sigma_{\hat{K}} = \{p \to p(\hat{a}_i), p \to p(m_i), i = 1,2,3\}$
   (d) $P_{\hat{K}} = P^0$, $\Sigma_{\hat{K}} = \{p \to \frac{1}{mes\hat{K}} \int_{\hat{K}} pdx\}$
   (e) $P_{\hat{K}} = P^0$, $\Sigma_{\hat{K}} = \{p \to p(\hat{a}_i), p \to \nabla p(m_i) \cdot m_i\hat{a}_i, i = 1,2,3\}$

   Soit K un triangle, dans les exemples ci-dessus $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ et (K, P_K, Σ_K) sont-ils affines équivalents.

7. Soit $\hat{K} = [0,1] \times [0,1]$ On appelle $\hat{a}_i, i = 1,4$ les sommets , $\hat{a}_i, i = 5,8$ les milieux des côtés et $\hat{a}_9$ le centre du carré.
   (a) Soit $P_{\hat{K}} = Q_1$, $\Sigma_{\hat{K}} = \{p \to p(\hat{a}_i), i = 1,4\}$. Montrer que ceci défini un élément fini.
   (b) De même pour $P_{\hat{K}} = Q_2$, $\Sigma_{\hat{K}} = \{p \to p(\hat{a}_i), i = 1,9\}$.
   (c) Elimination du noeud $\hat{a}_9$.
   On pose $\Sigma^* = \{p \to p(\hat{a}_i), i = 1,8\}$ et

$$Q_2^* = \{p \in Q_2, 4p(\hat{a}_9) + \sum_{i=1}^{4} p(\hat{a}_i) - 2\sum_{i=5}^{8} p(\hat{a}_i) = 0\}$$

   Montrer que $(\hat{K}, Q_2^*, \Sigma^*)$ est un élément fini et donner les fonctions de bases.

8. Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$, de frontiére Γ polygonale. On considère une triangulation de $\bar{\Omega}$ comme suit :

$$\mathcal{T}_h = \{K \in \bar{\Omega}, K \text{triangle fermé tel que } \bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K\}$$

   Soit $V_h = \{v_h \in L^2(\Omega); v_h|_K \in P^1 - sommets\}$ Montrer que $V_h \subset H^1(\Omega)$. Dire comment construire une base de V_h. Soit $V_h = \{v_h \in L^2(\Omega); v_h|_K \in P^1 - milieux\}$ A-t-on $V_h \subset H^1(\Omega)$?

9. Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$, de frontiére Γ polygonale.

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega \\ \nabla u \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

   où f est donnée dans $L^2(\Omega)$.
   (a) Donner la formulation variationnelle. Existence unicité ?

(b) Montrer que l'approximation variationnelle par la méthode des éléments finis P^1-sommets, sur une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω est équivalente à :

$$A_h U_h + M_h U_h = F_h$$

où $U_h = (u_h(s_i))_{i=1}^N$, s_i désigne un sommet quelconque de $\mathcal{T}_h$.
Préciser N et les coefficients de A_h et M_h. Montrer que M_h est définie positive et A_h est semi-définie positive.

(c) On note A_h^K et M_h^K les matrices élémentaires définies sur K par :

$$a_{ij}^K = \int_K \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j dx, m_{ij}^K = \int_K \phi_i\phi_j dx, \qquad i,j = 1,2,3$$

où ϕ_i sont les fonctions de bases définies sur K.
Pour évaluer ces intégrales, on adopte la formule :

$$\int_K f(x)dx = \frac{mesK}{3}\sum_{i=1}^{3} f(s_i)$$

où s_i désigne les sommets de K.
On désigne par $\tilde{A}_h^K$ et $\tilde{M}_h^K$ les matrices induites en utilisant la formule précédente.
Calculer $\tilde{A}_h^K$ et $\tilde{M}_h^K$. Montrer que si tous les angles de K sont aigus alors $a_{ij}^K \leq 0$ $\forall i \neq j$.
En déduire que la matrice $\tilde{A}_h + \tilde{M}_h$ est monotone.

(d) Dans le cas particulier où Ω est défini par
Ecrire explicitement les matrices locales $\tilde{A}_h^K$ et $\tilde{M}_h^K$ et assembler les matrices $\tilde{A}_h$ et $\tilde{M}_h$.

(e) Montrer qu'il existe c_1 et c_2 indépendantes de h telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, c_2(Mx,x) \leq (\tilde{M}x,x) \leq c_1(Mx,x)$$

10. Soient Ω un rectangle de $\mathbb{R}^2$, de frontiére Γ et $f \in L^2(\Omega)$ et $g = \gamma_0(u_0)$ avec $u_0 \in H^1(\Omega)$.

(a) On considère le problème variationnel suivant : trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} (\nabla u, \nabla v) = (f,v) \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \gamma_0(u) = g \end{cases}$$

Montrer que ce problème admet une unique solution.

(b) Soit V_h l'espace d'approximation de $H^1(\Omega)$ construit à partir des élément finis Q_1 et V_h^0 le sous espace de V_h des fonctions nulles sur Γ. Montrer que le probléme variationnel approché suivant

$$(P_h) \qquad \begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ (\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h^0 \\ u_h(s_j) = g(s_j) \text{ pour } s_j \in \Gamma \end{cases}$$

admet une unique solution.

(c) Soit $\mathcal{C}_h$ une discrétisation de Ω en rectangle. Montrer que le problème (P_h) est équivalent à résoudre

$$A_h U_h + B_h G_h = F_h$$

où A_h, U_h, B_h, G_h et F_h sont à préciser.

(d) On note A_h^R la matrice élémentaire définie sur R où R désigne un rectangle quelconque :

$$a_{ij}^R = \int_R \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j dx$$

calculer A_h^R.

(e) Application sur un maillage particulier :

11. Analyse d'érreur pour l'interpolation de Lagrange.

(a) Soit (K, P, Σ) un élément fini. Soit k un entier > 0. On suppose que pour tout polynôme de degré k est une fonction de P. On note h_K le diamètre de K et ρ_K le rayon intérieur de K. On note aussi $\Big| \, . \, \Big| m, K$ la semi norme

$$\Big| f \Big|_{m,K} = \left(\int_K ||D^m f|| dx \right)^{1/2}.$$

Enfin, Πv désigne l'interpolée de lagrange de v, pour v assez régulière. En utilisant la même technique que dans le §3.3 (adapté au cas d'un polynôme de degré k) que pour tout m, $0 \leq m \leq k+1$, pour tout $v \in H^{k+1}(K)$

$$\Big| v - \Pi v \Big|_{m,K} \leq C \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} \Big| v \Big|_{k+1,K}$$

où C ne dépend que de K.

(b) En déduire un résultat analogue pour un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^n$.

Bibliographie

[Bre83] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications.* Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, P.G. Ciarlet et J.L. Lions Eds. Masson, 1983.

[Cia83] P.G. Ciarlet. *Analyse Numérique et optimisation.* Mathématiques Appliquées pour la MaŐîtrise, P.G. Ciarlet et J.L. Lions Eds. Masson, 1983.

[RT84] P.A. Raviart and J.M. Thomas. *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications.* Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, P.G. Ciarlet et J.L. Lions Eds. Masson, 1984.

[Rud74] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, 1974.

[Var00] R.S. Varga. *Matrix iterative analysis. 2nd revised and expanded ed.* Springer Series in Computational Mathematics. 27. Berlin : Springer. x, 358 p. , 2000.

Index