Etude du problème modèle

Erratum du cours ANPI

On considère le problème

$$\begin{array}{ll} -\mathrm{div}\big(K\nabla u\big) + \vec{v}\cdot\nabla u + au = f & x \in \Omega \\ K\nabla u \cdot \vec{n} = g & x \in \Gamma_1 \\ u = 0 & x \in \Gamma_0 \end{array} \tag{1}$$

dont on veut déterminer la formulation variationnelle. L'ouvert Ω ainsi que Γ_0 et Γ_1 vérifient les hypothèses du polycopié.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. On a

$$\int_\Omega \Big(-\mathrm{div}\big(K\nabla u\big) + \vec{v}\cdot\nabla u + au\Big)\varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

Grâce à la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Big(-\mathrm{div}\big(K\nabla u\big) + \vec{v}\cdot\nabla u + au\Big)\varphi \\ &= \\ &-\int_\Omega \mathrm{div}\big(\varphi\big(K\nabla u\big)\big) + \int_\Omega \nabla\varphi\cdot\big(K\nabla u\big) + \int_\Omega \vec{v}\cdot\nabla u\varphi + \int_\Omega au\varphi \\ &= \int_\Omega \nabla\varphi\cdot\big(K\nabla u\big) + \int_\Omega \vec{v}\cdot\nabla u\varphi + \int_\Omega au\varphi - \int_{\Gamma_1} g\varphi \end{aligned}$$

car $K\nabla u\cdot\vec{n} = g$ sur Γ_1.

Posons, pour $u, v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \Big(\nabla\varphi\cdot\big(K\nabla u\big) + \vec{v}\cdot\nabla u\varphi + au\varphi\Big) \\ L(u) &= \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_1} gvd\sigma \end{aligned}$$

Le problème est donc : Trouver $u \in V = \{u \in H^1(\Omega), \gamma_0 u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ tel que

$$\forall v \in V,\ \ a(u,v) = L(v).$$

On montre que sous les hypothèses suivantes :

– Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ (Kx)\cdot x \geq \alpha||x||^2$$

,

– Il existe $a_0 > 0$ tel que $a > a_0$
– la fonction a est uniformément bornée
– le vecteur vérifie $\vec{v} \cdot \vec{n} \geq 0$sur Γ_1. Ici $\vec{n}$ est le vecteur unitaire sortant à Ω.

que les conditions du théorème de Lax Wendroff sont vérifiées et donc qu'il y a existence et unicité de la solution.

La continuité des formes a et L est évidente. Regardons la coercivité. On a

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega \nabla u \cdot (K \nabla u) + \int_\Omega u\vec{v} \cdot \nabla u + \int_\Omega a u^2 \\ &\geq \min(\alpha, a_0)||u||^2_{H^1} + \int_\Omega u\vec{v} \cdot \nabla u \end{aligned}$$

On regarde le dernier terme. On a, en appliquant la formule de Green,

$$\int_\Omega u\vec{v} \cdot \nabla u = \int_\Omega \mathrm{div}(\vec{v}u^2) + \int_\Omega u\vec{v} \cdot \nabla u$$

donc

$$\int_\Omega u\vec{v} \cdot \nabla u = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} u^2 \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma \geq 0$$

On a donc

$$a(u,v) \geq \min(\alpha, a_0)||u||^2_{H^1}$$

d'où la coercivité.